ТЕОРИЯ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНЫХ ПРОГРАММ II*

В.И.Шалак

Целью настоящей работы является развитие идей, высказанных в работах [1], [2] и [3] и представляющих некоторый подход к абстрактной теории логической вычислимости.

В основе предлагаемого подхода лежит простое наблюдение: любое действие можно охарактеризовать тем состоянием, к которому приводит его выполнение. Если теперь, находясь в текущем состоянии, взять описание целевого состояния, то можно выявить те требуемые минимальные изменения текущего состояния, которые позволят совершить данный переход.

С логической точки зрения совершенно неважно, как конкретно, какими средствами будет совершен переход между состояниями. Интересна сама возможность перехода.

Так возникла идея построения динамической логики путем описания целевых состояний, а не последовательностей действий, которые к этим состояниям приводят. Для этого каждой формуле языка некоторым естественным образом сопоставляется отношение достижимости на множестве состояний. В случае логики высказываний множеством состояний является множество приписываний истинностных значений пропозициональным переменным.

Обозначим используемый язык посредством ***L.*** Он состоит из:

1. p,q,r,... $\in$ *Var* - множество пропозициональных переменных;
2. &,$\vee$,$\rightarrow$,$\neg$ - логические связки;
3. (,) , [,] - скобки.

Определим множество **BF** булевых формул.

Def 1.
1. *Var*$\subseteq$**BF**;
2. Если A,B $\in$ **BF**, то и $\neg$A, (A&B), (A$\vee$B) $\in$ **BF**;
3. Ничто другое булевой формулой не является.

*Логические исследования. Вып.5. - М.: Наука, 1998 г.

Определим множество **PP** пропозициональных программ.

Def 2.
1. Если A $\in$ **BF**, то [A] $\in$ **PP**;
2. Ничто другое пропозициональной программой не является.

Пусть Val=$\{0,1\}^{Var}$. Это обычное множество приписываний истинностных значений пропозициональным переменным. Для удобства дальнейшего изложения дадим два следующих определения.

Пусть U - произвольное множество формул.

Def 3. L(U)= {p | $\exists$A(A$\in$U, p$\in$ Var и p - подформула формулы A) }

Примем соглашение, что если U является одноэлементным множеством {A}, то вместо L({A}) будем писать просто L(A). В каждом конкретном случае из контекста будет ясно, что имеется ввиду.

Def 4. s$\cong_{L(U)}$t е.т.е. $\forall$p(p$\notin$$\boldsymbol{L}$(U) $\Rightarrow$ s(p)=t(p)), где s,t$\in$ Val.

Основная идея развиваемой теории пропозициональных программ заключается в том, чтобы некоторым естественным образом сопоставить формулам пропозициональной логики бинарное отношение достижимости на множестве *Val*. Именно это отношение достижимости мы и будем называть пропозициональной программой. Итак, всякой булевой формуле A будет соответствовать пропозициональная программа [A]$\subseteq$ $Val\times Val$. Запись s[A]t будет служить сокращением для <s,t>$\in$[A] и будет читаться как "*из состояния s посредством пропозициональной программы [A] достижимо состояние t*". Дадим строгое определение.

Def 5.
1. s[P]t $\Leftrightarrow$ s$\cong_{L(P)}$t, t(P)=1, P$\in${p,$\neg$p}.
2. s[A$\vee$B]t $\Leftrightarrow$ s[A]t или s[B]t.
3. s[A&B]t $\Leftrightarrow$ (s[A]$\circ$[B]t, t(A)=1) или (s[B]$\circ$[A]t, t(B)=1).
4. s[$\neg\neg$A]t $\Leftrightarrow$ s[A]t.
5. s[$\neg$(A$\vee$B)]t $\Leftrightarrow$ s[$\neg$A&$\neg$B]t.
6. s[$\neg$(A&B)]t $\Leftrightarrow$ s[$\neg$A$\vee$$\neg$B]t.

Теперь нашей целью будет исследование свойств пропозициональных программ. Прежде всего заметим, что пункты 4-6 определения *Def 5* позволяют проносить отрицания до пропозициональных переменных. Докажем данное свойство строго. Для этого зададим на множестве булевых формул **BF** операцию * следующим образом:

Def 6.
1. $p^* = p$
2. $(\neg p)^* = \neg p$
3. $(\neg\neg A)^* = (A)^*$
4. $(A\&B)^* = (A)^*\&(B)^*$
5. $(A\vee B)^* = (A)^*\vee(B)^*$
6. $(\neg(A\vee B))^* = (\neg A)^*\&(\neg B)^*$
7. $(\neg(A\&B))^* = (\neg A)^* \vee(\neg B)^*$

Теорема 1. $[A] = [A^*]$.

Дадим еще определение:

Def 7. $\mathrm{Ran}([A]) = \{t \mid \exists s(s[A]t)\}$

Теорема 2. Пропозициональные программы обладают следующими свойствами:

1. $\mathrm{Ran}([p])=\{t|t(p)=1\}$. 2. $\mathrm{Ran}([\neg p])=\{t|t(p)=0\}$.
3. $\mathrm{Ran}([p])=\mathrm{Val}\backslash\mathrm{Ran}([\neg p])$. 4. $s(A)=1\Rightarrow s[A]s$.
5. $s[A]t\Rightarrow t(A)=1$. 6. $[\neg\neg A]=[A]$.
7. $[\neg(A\vee B)]=[\neg A\&\neg B]$. 8. $[\neg(A\&B)]=[\neg A\vee\neg B]$.
9. $[A\&B]=[B\&A]$. 10. $[A\vee B]=[B\vee A]$.
11. $[A\&(B\&C)]=[(A\&B)\&C]$. 12. $[A\vee(B\vee C)]=[(A\vee B)\vee C]$.
13. $[A\vee A]=[A]$. 14. $[A]\subseteq[A\&A]$.
14'. $[P]=[P\&P]$, $P\in\{p,\neg p\}$.
15. $[A\&(B\vee C)]=[(A\&B)\vee(A\&C)]$.
16. $[A\vee(B\&C)]\subseteq[(A\vee B)\&(A\vee C)]$.
17. $[A]\subseteq[A\vee(A\&B)]$. 18. $[A]\subseteq[A\&(A\vee B)]$.
19. $\neg\exists t(t(A)=1)\Rightarrow[A]\subseteq[B]$. 20. $\neg\exists t(t(A)=1)\Rightarrow[A\vee B]=[B]$.
21. $\neg\exists t(t(A)=1)\Rightarrow[A\&B]=[A]$.
22. $[(A\&p)\vee(A\&\neg p)\vee A]=[(A\&p)\vee(A\&\neg p)]$.
23. $\exists A(s[A]t)\Leftrightarrow \exists B(s\cong_{L(B)}t)$. 24. $s[A]t\Rightarrow s\cong_{L(A)}t$.
25. $\exists t(t(A)=1)\Rightarrow \forall s\exists t(s[A]t)$. 26. $[A\vee B]=[A]\cup[B]$.

Следствие. Всякая пропозициональная программа [A] может быть преобразована к некоторому каноническому виду [A'], когда формула A' находится в конъюнктивное нормальной форме и [A]=[A'].

Доказательство теоремы 2 и следствия приведено в [3].

Семантика пропозициональных программ имеет тесную связь с некоторыми теоретико-доказательными методами для логики высказываний.

Дадим определение множества всех путей Path(A) через формулу A:

Def 8.
1. Path(P)={{P}}, где P∈{p, ¬p}.
2. Path(A∨B)=Path(A)∪Path(B).
3. Path(A&B)={u| v∈Path(A), w∈Path(B), u=v∪w, ¬∃p(p∈u, ¬p∈u)}.

Из определения очевидно, что для всякой формулы A множество путей Path(A) является конечным множеством и каждый путь u∈Path(A) является конечным множеством.

Пусть в формуле A классической логики высказываний все отрицания пронесены до пропозициональных переменных и двойные отрицания сняты. Тогда несложно показать, что формула A выполнима е. и т. е. Path(A)$\neq \emptyset$. Отсюда уже легко сделать один шаг до построения соответствующих теоретико-доказательных процедур. Различными авторами такие процедуры были определены для логики высказываний, логики предикатов, для некоторых систем модальной логики [4].

Нашей следующей задачей будет показать, как соотносится пропозициональная программа [A] и множество путей Path(A).

Теорема 3. s[A]t ⇔ ∃u(u∈Path(A), s$\cong_{L(u)}$t, ∀P(P∈u ⇒ t(P)=1)).

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся несколько лемм.

В классической логике высказываний имеют место следующие эквивалентности:
1. ¬¬A↔A. 2. ¬(A∨B)↔ ¬A&¬B. 3. ¬(A&B)↔ ¬A∨¬B.
4. A&B↔B&A. 5. A∨B↔B∨A. 6. A&(B&C)↔(A&B)&C.
7. A∨(B∨C)↔(A∨B)∨C. 8. A∨A↔A. 9. P↔P&P.
10. A&(B∨C)↔(A&B)∨(A&C).

Этих эквивалентностей достаточно, чтобы любую формулу A логики высказываний привести к конъюнктивной нормальной форме A'.

Лемма 1. Path(A)=Path(A'), где A' - конъюнктивная нормальная форма формулы A.

Для доказательства леммы достаточно показать, что преобразование произвольной формулы в соответствии с приведенными выше эквивалентностями 1.-10. не приводит к изменению множества путей через формулу. Доказательство тривиально.

Лемма 2. $t(A)=1 \Rightarrow \forall s(s \cong_{L(A)} t \Leftrightarrow s[A]t)$, где $A=P_1\&...\&P_n$, $P_i \in \{p_i, \neg p_i\}$.

Доказательство проводим индукцией по длине формулы A.

I. $A=P$, $P \in \{p, \neg p\}$. Базис индукции.

+1. $t(P)=1$ - допущение
+2. $s \cong_{L(P)} t$ - допущение
3. $s[P]t$ - из 1, 2 по *Def 5*
4. $s \cong_{L(P)} t \Rightarrow s[P]t$ - из 2, 3
+5. $s[P]t$ - допущение
6. $s \cong_{L(P)} t$ - из 5 по *Def 5*
7. $s[P]t \Rightarrow s \cong_{L(P)} t$ - из 5, 6
8 $s \cong_{L(P)} t \Leftrightarrow s[P]t$ - из 4, 7
9.$\forall s(s \cong_{L(P)} t \Leftrightarrow s[P]t)$ - из 8
10. $t(P)=1 \Rightarrow \quad \forall s(s \cong_{L(P)} t \Leftrightarrow s[P]t)$ - из 1-9.

II. $A=P\&B$, где $P \in \{p, \neg p\}$, $B= P_1\&...\&P_k$, $P_j \in \{p_j, \neg p_j\}$. Индукционный шаг.

+1. $\forall t(t(P)=1 \Rightarrow \quad \forall s(s \cong_{L(P)} t \Leftrightarrow s[P]t))$ - индукционное допущение
+2. $\forall t(t(B)=1 \Rightarrow \quad \forall s(s \cong_{L(B)} t \Leftrightarrow s[B]t))$ - индукционное допущение
+3. $t(P\&B)=1$ - допущение
4. $\forall s(s \cong_{L(P)} t \Leftrightarrow s[P]t)$ - из 1, 3
5. $\forall s(s \cong_{L(B)} t \Leftrightarrow s[B]t)$ - из 2, 3
+6. $s \cong_{L(P\&B)} t$ - допущение
7. $s \cong_{L(P)} s'$, $s'(P)=1$ - из 6
8. $s[P]s'$ - из 7 по *Def 5*
9. $t(P)=s'(P)$ - из 3, 7
10. $s' \cong_{L(B)} t$ - из 6, 9
11. $s'[B]t$ - из 2, 3, 10
12. $s[P]s'$, $s'[B]t$, $t(P)=1$ - из 3, 8, 11
13. $s[P\&B]t$ - из 12 по *Def 5*
14. $s \cong_{L(P\&B)} t \Rightarrow s[P\&B]t$ - из 6-13
+15. $s[P\&B]t$ - допущение
16. $(\exists s'(s[P]s', s'[B]t), t(P)=1)$ или $(\exists s'(s[B]s', s'[P]t), t(B)=1)$ - из 15 по *Def 5*
+17. $\exists s'(s[P]s', s'[B]t), t(P)=1$ - допущение
18. $s[P]s'$, $s'[B]t$, $t(P)=1$ - из 17 для некоторого s'
19. $s'(P)=1$, $t(B)=1$ - из 18 по теореме 2
20. $s \cong_{L(P)} s'$, $s' \cong_{L(B)} t$ - из 1, 2, 18, 19
21. $s \cong_{L(P\&B)} t$ - из 20 по *Def 4*
+22. $\exists s'(s[B]s', s'[P]t), t(B)=1$ - допущение
23. $s[B]s'$, $s'[P]t$, $t(B)=1$ - из 22 для некоторого s'
24. $s'(P)=1$, $t(B)=1$ - из 23 по теореме 2
25. $s \cong_{L(P)} s'$, $s' \cong_{L(B)} t$ - из 1, 2, 23, 24

26. $s \cong_{L(P\&B)} t$ - из 25 по *Def 4*
27. $s[P\&B]t \Rightarrow s \cong_{L(P\&B)} t$ - из 15-26
28. $\forall s(s \cong_{L(P\&B)} t \Leftrightarrow s[P\&B]t)$ - из 14, 27
29. $t(P\&B)=1 \Rightarrow \quad \forall s(s \cong_{L(P\&B)} t \Leftrightarrow s[P\&B]t)$ - из 3-28

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. В силу леммы 1 и следствия к теореме 2 можно считать, что формула A находится в конъюнктивной нормальной форме $A=C_1 \vee ... \vee C_n, C_i=P_1\&...\&P_k$, $P_j \in \{p_j, \neg p_j\}$ $n \geq i \geq 1$, $k \geq j \geq 1$.

+1. s[A]t - допущение
2. $s[C_i]t$ - для некоторого $C_i=P_1\&...\&P_k$,
$P_j \in \{p_j, \neg p_j\}$ из 1 по *Def 5*
3. $\{P_1,...,P_k\} \in Path(A)$ - из 1, 2 по *Def 8*
4. $t(P_1\&...\&P_k)=1$ - из 2 по теореме 2
5. $\forall P(P \in \{P_1,...,P_k\} \Rightarrow t(P)=1)$ - из 4
6. $s \cong_{L(\{P1,...,Pk\})} t$ - из 2 по лемме 2
7. $\exists u(u \in Path(A), s \cong_{L(u)} t, \forall P(P \in u \Rightarrow t(P) = 1))$ - из 3, 5, 6

+1. $\exists u(u \in Path(A), s \cong_{L(u)} t, \forall P(P \in u \Rightarrow t(P)=1))$ - допущение
2. $u \in Path(A)$, $s \cong_{L(u)} t$, $\forall P(P \in u \Rightarrow t(P)=1)$ - из 1 для некоторого u
3. $u=\{P_1,...,P_k\}$ - для некоторого $C_i=P_1\&...\&P_k$
из 2 по *Def 8*
4. $t(P_1\&...\&P_k)=1$ - из 3
5. $s \cong_{L(P1\&...\&Pk)} t$ - из 2, 3
6. $s[P_1\&...\&P_k]t$ - из 4, 5 по лемме 2
7. s[A]t - из 6 по *Def 5*

Теорема доказана.

Следствие 1. $Path(A) \subseteq Path(B) \Rightarrow [A] \subseteq [B]$.

+1. $Path(A) \subseteq Path(B)$ - допущение
+2. s[A]t - допущение
3. $\exists u(u \in Path(A), s \cong_{L(u)} t, \forall P(P \in u \Rightarrow t(P)=1))$ - из 2 по теореме 3
4. $\exists u(u \in Path(B), s \cong_{L(u)} t, \forall P(P \in u \Rightarrow t(P)=1))$ - из 1, 3
5. s[B]t - из 4 по теореме 3

Следствие 2. Неверно, что $[A] \subseteq [B] \Rightarrow Path(A) \subseteq Path(B)$.

Имеется контрпример. Пусть $A = (p\&q) \vee (p\&\neg q) \vee p$ и $B = (p\&q) \vee (p\&\neg q)$. Тогда $[A]=[B]$, $Path(A) = \{\{p,q\},\{p,\neg q\},\{p\}\}$, $Path(B) = \{\{p,q\},\{p,\neg q\}\}$.

Следствие 3. t∈Ran([A]) ⇔ ∃u(u∈Path(A), ∀P(P∈u ⇒ t(P)=1)).

Важность теоремы 3 заключается в том, что она разрешает нам говорить о выполнении пропозициональной программы [A] в терминах нахождения пути через формулу A. Возможно построение логики пропозициональных программ по аналогии с тем, как строятся динамические логики. Для этого определим множество **FM** формул:

Def 9.
1. **BF**⊆**FM**.
2. A∈**BF**, B∈**FM** ⇒ [A]B∈**FM**.
3. A, B∈**FM** ⇒ ¬A, (A&B), (A∨B), (A→B)∈**FM**.
4. Ничто другое формулой не является.

Определим отношение $s \models A$ - “при приписывании s истинна формула A”.

Def 10.
1. $s \models p \Leftrightarrow s(p) = 1$.
2. $s \models \neg A \Leftrightarrow$ неверно, что $s \models A$.
3. $s \models (A\&B) \Leftrightarrow s \models A$ и $s \models B$.
4. $s \models (A \vee B) \Leftrightarrow s \models A$ или $s \models B$.
5. $s \models (A \to B) \Leftrightarrow$ если $s \models A$, то $s \models B$.
6. $s \models [A] \Leftrightarrow \quad \forall t(s[A]t \Rightarrow t \models B)$.

Def 11. Формула A общезначима ($\models A$), е. и т. е. $\forall s(s \models A)$.

Класс общезначимый формул аксиоматизируем посредством аксиом и правил вывода классической логики высказываний плюс следующих аксиом и одного правила вывода:

Ax.1 [A]A
Ax.2 [A](B→C) → ([A]B→[A]C)
Ax.3 [¬¬A]B ↔ [A]B
Ax.4 [A∨B]C ↔ [A]&[B]C
Ax.5 [¬(A∨B)]C ↔ [¬A&¬B]C
Ax.6 [A&B]C ↔ ([A][B](A→C)&[B][A](B→C))
Ax.7 [¬(A&B)] ↔ [¬A∨¬B]C
Ax.8 ([A]B&[A]C) → [A](B&C)
Ax.9 [P]A ↔ ¬[P]¬A, P∈{p, ¬p}
Ax.10 [P](A∨B) → ([P]A∨[P]B), P∈{p, ¬p}
Ax.11 [P]q ↔ q, P∈{p, ¬p}, p≠q

$\vdash B \implies \vdash [A]B$

Вопросы аксиоматизации логики пропозициональных программ будут рассмотрены в следующих работах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шалак В.И.* Динамическая интерпретация высказываний. // Тезисы X Всесоюзной конференции по логике, методологии и философии науки. Минск, 1990b. С. 129-130.

2. *Шалак В.И.* Динамическая интерпретация высказываний. // Логические исследования. Вып2. М., 1993 С. 68-81.

3. *Шалак В.И.* Теория пропозициональных программ. // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН, 1998.

4. *Bibel W.* Automated Theorem Proving. // Braunscweig; Wiesbaden: Vieweg, 1982.