ТЕОРИЯ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНЫХ ПРОГРАММ*

В.И.Шалак

Целью настоящей работы является развитие идей, высказанных в работах [1] и [2] и представляющих некоторый подход к абстрактной теории логической вычислимости.

В основе предлагаемого подхода лежит простое наблюдение: любое действие можно охарактеризовать тем состоянием, к которому приводит его выполнение. Если теперь, находясь в текущем состоянии, взять описание целевого состояния, то можно выявить те требуемые минимальные изменения текущего состояния, которые позволят совершить данный переход.

С логической точки зрения совершенно неважно, как конкретно, какими средствами будет совершен переход между состояниями. Интересна сама возможность перехода.

Так возникла идея построения динамической логики путем описания целевых состояний, а не последовательностей действий, которые к этим состояниям приводят. Для этого каждой формуле языка некоторым естественным образом сопоставляется отношение достижимости на множестве состояний. В случае логики высказываний множеством состояний является множество приписываний истинностных значений пропозициональным переменным. Прежде чем определить понятие пропозициональных программ и заняться изучением их свойств, необходимо фиксировать язык. Обозначим используемый язык посредством ***L***. Он будет состоять из:

1. p,q,r,... $\in$ *Var* - множество пропозициональных переменных;
2. &,$\vee$,$\rightarrow$,$\neg$ - логические связки;
3. [,],(,) - скобки.

Определим множество **BF** булевых формул.

Def 1.

1. *Var*$\subseteq$**BF**;
2. Если A,B $\in$ **BF**, то и $\neg$A, (A&B), (A$\vee$B) $\in$ **BF**;

*Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН 1997. - М., 1998.

3. Ничто другое булевой формулой не является.

Определим множество **PP** пропозициональных программ.

Def 2.

1. Если A $\in$ **BF**, то [A] $\in$ **PP**;
2. Ничто другое пропозициональной программой не является.

Пусть $Val=\{0,1\}^{Var}$. Это обычное множество приписываний истинностных значений пропозициональным переменным. Для удобства дальнейшего изложения дадим два следующих определения.

Def 3. $\boldsymbol{L}(A)=\{p \mid p\in Var$ и p - подформула формулы A$\}$

Def 4. $s\cong_{L(A)}t$ е.т.е. $\forall p(p\notin \boldsymbol{L}(A) \Rightarrow s(p)=t(p))$, где $s,t\in Val$.

Основная идея развиваемой теории пропозициональных программ заключается в том, чтобы некоторым естественным образом сопоставить формулам пропозициональной логики бинарное отношение достижимости на множестве *Val*. Именно это отношение достижимости мы и будем называть пропозициональной программой. Итак, всякой булевой формуле A будет соответствовать пропозициональная программа $[A]\subseteq Val\times Val$. Запись s[A]t будет служить сокращением для $<s,t>\in[A]$ и будет читаться как "*из состояния s посредством пропозициональной программы [A] достижимо состояние t*". Дадим строгое определение.

Def 5.

1. $s[P]t \Leftrightarrow s\cong_{L(P)}t$, $t(P)=1$, $P\in\{p,\neg p\}$.
2. $s[A\vee B]t \Leftrightarrow s[A]t$ или $s[B]t$.
3. $s[A\&B]t \Leftrightarrow (s[A]\circ[B]t,\ t(A)=1)$ или $(s[B]\circ[A]t,\ t(B)=1)$.
4. $s[\neg\neg A]t \Leftrightarrow s[A]t$.
5. $s[\neg(A\vee B)]t \Leftrightarrow s[\neg A\&\neg B]t$.
6. $s[\neg(A\&B)]t \Leftrightarrow s[\neg A\vee\neg B]t$.

Теперь нашей целью будет исследование свойств пропозициональных программ. Прежде всего заметим, что пункты 4-6 определения *Def 5* позволяют проносить отрицания до пропозициональных переменных. Докажем данное свойство строго. Для этого зададим на множестве булевых формул **BF** операцию * следующим образом:

Def 6.

1. $p^* = p$
2. $(\neg p)^* = \neg p$
3. $(\neg\neg A)^* = (A)^*$
4. $(A \& B)^* = (A)^* \& (B)^*$
5. $(A \vee B)^* = (A)^* \vee (B)^*$
6. $(\neg(A \vee B))^* = (\neg A)^* \& (\neg B)^*$
7. $(\neg(A \& B))^* = (\neg A)^* \vee (\neg B)^*$

Теорема 1. $[A] = [A^*]$.

Доказательство проводим индукцией по степени формулы A.

1. Если $A=p$ или $A=\neg p$, то результат тривиален.

2. $A=\neg\neg B$. В этом случае $[\neg\neg B]=[B]$ по Def 5, $[B]=[B^*]$ по индуктивному допущению, а $[B^*]=[(\neg\neg B)^*]$ по Def 6.

3. $A=B\&C$. В этом случае $s[B\&C]t \Leftrightarrow (s[B]\circ[C]t, t(B)=1)$ или $(s[C]\circ[B]t, t(C)=1)$ по Def 5. Далее по индуктивному допущению $(s[B]\circ[C]t, t(B)=1)$ или $(s[C]\circ[B]t, t(C)=1)$ е.т.е. $(s[B^*]\circ[C^*]t, t(B^*)=1)$ или $(s[C^*]\circ[B^*]t, t(C^*)=1)$. И наконец по *Def 5* и *Def 6* получаем $(s[B^*]\circ[C^*]t, t(B^*)=1)$ или $(s[C^*]\circ[B^*]t, t(C^*)=1) \Leftrightarrow s[B^*\&C^*]t \Leftrightarrow s[(B\&C)^*]t$.

4. $A=B\vee C$. В этом случае $s[B\vee C]t \Leftrightarrow s[B]t$ или $s[C]t$ по *Def 5*. По индуктивному допущению получаем $s[B]t$ или $s[C]t$ е.т.е. $s[B^*]t$ или $s[C^*]t$. И наконец по *Def 5* и *Def 6* получаем $s[B^*]t$ или $s[C^*]t \Leftrightarrow s[B^*\vee C^*] \Leftrightarrow s[(B\vee C)^*]t$.

5. $A=\neg(B\&C)$. В этом случае $[\neg(B\&C)]=[\neg B\vee\neg C]$ по *Def 5*. Далее $[\neg B\vee\neg C]=[(\neg B)^*\vee(\neg C)^*]$ по индуктивному допущениею и пункту 4 доказательства, а $[(\neg B)^*\vee(\neg C)^*]= [((\neg(B\&C))^*]$ по *Def 6*.

6. $A=\neg(B\vee C)$. В этом случае $[\neg(B\vee C)]=[\neg B\&\neg C]$ по *Def 5*. Далее $[\neg B\&\neg C]=[(\neg B)^*\& (\neg C)^*]$ по индуктивному допущению и пункту 3 доказательства, а $[(\neg B)^*\& (\neg C)^*]= [((\neg(B\vee C))^*]$ по *Def 6*.

Теорема доказана. В дальнейшем она позволит при доказательстве свойств программ рассматривать лишь программы вида $[A^*]$.

Дадим еще определение:

Def 7. $\mathrm{Ran}([A]) = \{t \mid \ \exists s(s[A]t)\ \}$

Теорема 2. Пропозициональные программы обладают следующими свойствами:

1. $\mathrm{Ran}([p])=\{t|t(p)=1\}$.
2. $\mathrm{Ran}([\neg p])=\{t|t(p)=0\}$.
3. $\mathrm{Ran}([p])=\mathrm{Val}\backslash\mathrm{Ran}([\neg p])$.
4. $s(A)=1\Rightarrow s[A]s$.
5. $s[A]t\Rightarrow t(A)=1$.
6. $[\neg\neg A]=[A]$.
7. $[\neg(A\vee B)]=[\neg A\&\neg B]$.
8. $[\neg(A\&B)]=[\neg A\vee\neg B]$.
9. $[A\&B]=[B\&A]$.
10. $[A\vee B]=[B\vee A]$.
11. $[A\&(B\&C)]=[(A\&B)\&C]$.
12. $[A\vee(B\vee C)]=[(A\vee B)\vee C]$.
13. $[A\vee A]=[A]$.
14. $[A]\subseteq[A\&A]$.
15. $[A\&(B\vee C)]=[(A\&B)\vee(A\&C)]$.
16. $[A\vee(B\&C)]\subseteq[(A\vee B)\&(A\vee C)]$.
17. $[A]\subseteq[A\vee(A\&B)]$.
18. $[A]\subseteq[A\&(A\vee B)]$.
19. $\neg\exists t(t(A)=1)\Rightarrow[A]\subseteq[B]$.
20. $\neg\exists t(t(A)=1)\Rightarrow[A\vee B]=[B]$.
21. $\neg\exists t(t(A)=1)\Rightarrow[A\&B]=[A]$.
22. $[(A\&p)\vee(A\&\neg p)\vee A]=[(A\&p)\vee(A\&\neg p)]$.
23. $\exists A(s[A]t)\Leftrightarrow \exists B(s\cong_{L(B)}t)$.
24. $s[A]t\Rightarrow s\cong_{L(A)}t$.
25. $\exists t(t(A)=1)\Rightarrow \forall s\exists t(s[A]t)$.
26. $[A\vee B]=[A]\cup[B]$.

Доказательство.

1-3. Непосредственно следуют из *Def 5.*

4. Допустим, что имеет место $s(A)=1$. Докажем индукцией по степени формулы A, что в этом случае $s[A]s$. При доказательстве будем использовать результаты Теоремы 1.

Пусть $A=P$, где $P\in\{p,\neg p\}$. Если $s(P)=1$, то по *Def 5* получаем $s[P]s$.

Пусть $A=B\vee C$ и $s(B\vee C)=1$. В этом случае $s(B)=1$ или $s(C)=1$. По индуктивному допущению имеем, что $s[B]s$ или $s[C]s$ и, следовательно, по *Def 5* получаем $s[B\vee C]s$.

Пусть A=B&C и s(B&C)=1. В этом случае s(B)=1 и s(C)=1. По индуктивному допущению имеем, что s[B]s и s[C]s и, следовательно, s[B]∘[C]s. Далее по *Def 5* получаем s[B&C]s.

5. Допустим, что s[A]t. Покажем, что в этом случае t(A)=1. Доказательство проводим индукцией по степени формулы A.

Пусть A=P, где P∈{p,¬p}. По *Def 5* сразу получаем t(P)=1.

Пусть A=B∨C и s[B∨C]t. По *Def 5* получаем, что s[B]t или s[C]t. По индуктивному допущению получаем t(B)=1 или t(C)=1 и, следовательно, t(B∨C)=1.

Пусть A=B&C и s[B&C]t. По *Def 5* получаем, что (s[B]∘[C]t и t(B)=1) или (s[C]∘[B]t и t(C)=1). Рассмотрим случай s[B]∘[C]t и t(B)=1. По индуктивному допущению получаем, что t(C)=1. Следовательно, t(B&C)=1.

6-13. Непосредственно следуют из *Def 5.*

14. Допустим, что s[A]t. Тогда t(A)=1 и t[A]t по свойствам 4 и 5 настоящей теоремы. Следовательно, s[A&A]t по *Def 5.*

Обратное включение в общем случае не имеет места. В качестве контрпримера можно взять формулу (p∨q) и приписывание s такое, что s(p)=0 и s(q)=0. Тогда существует такое приписывание t, что s[(p∨q)&(p∨q)]t и t(p)=1, t(q)=1. По *Def 5* очевидно, что s[(p∨q)]t не имеет места.

15. Доказывается непосредственно из определения *Def 5.*

Забегая вперед заметим, что свойства 6-12 и 15 позволяют осуществлять равносильные преобразования пропозициональных программ к некоторому каноническому виду, когда формула, задающая программу, находится в конъюнктивное нормальной форме.

16. Доказывается непосредственно из определения *Def 5* с использованием свойства 4 настоящей теоремы.

Обратное включение в общем случае не имеет места. В качестве контрпримера вместо A можно взять формулу (p∨q), вместо B взять формулу r_1, а вместо C - формулу r_2. Тогда имеет место строгое включение $[(p\vee q)\vee(r_1\&r_2)]\subset[((p\vee q)\vee r_1)\&((p\vee q)\vee r_2)]$.

17. Доказывается непосредственно из определения *Def 5.*

Обратное включение в общем случае не имеет места. В качестве контрпримера может быть представлено строгое включение [p]⊂[p∨(p&q)].

18. Доказывается непосредственно из определения *Def 5.*

Обратное включение в общем случае не имеет места. В качестве контрпримера может быть представлено строгое включение [p]⊂[p& (p∨q)].

19-21. Доказывается непосредственно из определения *Def 5* с использованием свойств 4 и 5 настоящей теоремы.

22. Доказывается непосредственно из определения *Def 5*.

23. Допустим, что s[A]t для некоторой формулы A. Покажем, что в этом случае $s\cong_{L(A)}t$. Доказательство проводим индукцией по степени формулы A.

Пусть A=P, где P∈{p,¬p}. По *Def 5* получаем, что $s\cong_{L(P)}t$.

Пусть A=B∨C и s[B∨C]t. По *Def 5* s[B]t или s[C]t. По индуктивному допущению получаем $s\cong_{L(B)}t$ или $s\cong_{L(C)}t$, но в этом случае по Def 4 следует, что $s\cong_{L(B\vee C)}t$.

Пусть A=B&C и s[B&C]t. По *Def 5* (s[B]∘[C]t и t(B)=1) или (s[C]∘[B]t и t(C)=1). Рассмотрим случай s[B]∘[C]t и t(B)=1. По определению композиции бинарных отношений существует s'∈*Val*, для которого верно, что s[B]s' и s'[C]t. Тогда по индуктивному допущению имеем $s\cong_{L(B)}s'$ и $s'\cong_{L(C)}t$. Очевидно, что отсюда следует $s\cong_{L(B\&C)}t$. Второй случай рассматривается аналогично.

Для доказательства в обратную сторону допустим, что для некоторой формулы B имеет место $s\cong_{L(B)}t$. Возьмем множество пропозициональных переменных $\boldsymbol{L}$(B), которое, очевидно, является конечным. Из переменных, входящих в множество $\boldsymbol{L}$(B), построим формулу вида $P_{i1}\&P_{i2}\&...\&P_{ik}$, где $P_{ij}=p_{ij}$, если $t(p_{ij})=1$ и $P_{ij} = \neg p_{ij}$, если $t(p_{ij})=0$, $p_{ij} \in\boldsymbol{L}(B)$. Порядок конъюнктов не является существенным. По *Def 5* очевидно, что $s[P_{i1}\&P_{i2}\&...\&P_{ik}]t$.

25. Считая без уменьшения степени общности, что формула A находится в конъюнктивной нормальной форме, доказывается непосредственно из определения *Def 5*.

26. Непосредственно следует из *Def 5*.

Следствие. Всякая пропозициональная программа [A] может быть преобразована к некоторому каноническому виду [A'], когда формула A' находится в конъюнктивное нормальной форме и [A]=[A'].

Данное преобразование возможно благодаря свойствам 6-13, 15 пропозициональных программ. Для дополнительного упрощения пропозициональных программ может быть использовано свойство 22.

Дадим некоторые комментарии к теореме 2.

Свойство 4 означает, что если в текущем состоянии s формула A истинна, то это состояние остается достижимым после выполнения программы [A]. В зависимости от вида формулы A могут быть достижимы и другие состояния, но одним из них обязательно будет s.

Свойство 5 отражает другую важную особенность пропозициональных программ. Если из текущего состояния s посредством [A] достижимо хотя бы одно состояние t, то в нем формула A будет истинна.

Свойства 6-12 говорят, что для формул, задающих пропозициональные программы, выполняются законы снятия двойного отрицания, законы де-моргана, законы коммутативности и ассоциативности для конъюнкции и дизъюнкции. В то же время идемпотентность имеет место лишь для дизъюнкции (13). Для конъюнкции же выполняется более слабое свойство $[A]\subseteq[A\&A]$.

Дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции (15) вместе с другими свойствами (6-13) позволяет осуществлять приведение пропозициональных программ к конъюнктивным нормальным формам. Это в свою очередь значительно облегчает дальнейшее исследование их свойств.

В полном объеме дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции, а также законы поглощения не имеют места (16-18).

Отношение теоретико-множественного включения естественным образом задает частичный порядок на множестве пропозициональных программ **PP**. Свойство 19 говорит, что любая программа, задаваемая противоречивой формулой, является наименьшим элементом относительно этого порядка. Заметим, что наибольший элемент существует е. и т. е. множество пропозициональных переменных *Var* конечно.

Свойство 23 говорит, что из одного состояния s посредством некоторой формулы A достижимо другое состояние t е. и т. е. эти состояния отличаются в приписывании истинностных значений не более чем конечному числу пропозициональных переменных. Иными словами, любое "вычисление" конечно и любой конечный переход может быть представлен в виде некоторого "вычисления".

Очень важным является свойство 25, которое гласит, что коль скоро целевое состояние описано непротиворечивым образом, оно может быть достигнуто.

В последующих работах будет показана тесная связь пропозициональных программ с некоторыми теоретико-доказательными методами для логики высказываний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шалак В.И.* Динамическая интерпретация высказываний. //Тезисы X Всесоюзной конференции по логике, методологии и философии науки. Минск, 1990b. С. 129-130.

2. *Шалак В.И.* Динамическая интерпретация высказываний. //Логические исследования. Вып2. М., 1993 С. 68-81.