РЕЛЯЦИОННАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ*

В.И.Шалак

В работе дана динамическая (реляционная) интерпретация классической логики высказываний. Каждой элементарной формуле сопоставляется отношение достижимости на некотором множестве. Отношения достижимости, сопоставляемые сложным формулам, определяются не в терминах булевых операций, а в терминах композиции и объединения отношений, сопоставленных подформулам. Доказаны теоремы непротиворечивости и полноты классической логики высказываний относительно предложенной семантики.

В работе указано на связь построенной интерпретации импликативных формул с интерпретацией продукций. Это позволяет рассматривать продукции как некоторый фрагмент классической логики.

Данная работа является продолжением [1,2,3,4].

Обозначим используемый язык посредством ***L*.** Он состоит из:

1. p,q,r,... $\in$ *Var* - множество пропозициональных переменных;
2. &,$\vee$,$\rightarrow$,$\neg$ - логические связки;
3. (,) - скобки.

Определим множество **Frm** формул.

Def 1.
1. *Var*$\subseteq$ **Frm**;
2. Если A,B $\in$ **Frm**, то и $\neg$A, (A&B), (A$\vee$B), (A$\rightarrow$B) $\in$ **Frm**;
3. Ничто другое формулой не является.

Пусть *Val*=$\{0,1\}^{Var}$. Это обычное множество приписываний истинностных значений пропозициональным переменным. Для удобства дальнейшего изложения примем следующие определения.

*Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН 1998. - М., 1999.

Пусть U - произвольное множество формул.

Def 2. L(U)= {p | $\exists$A(A$\in$U, p$\in$*Var* и p - подформула формулы A) }

Примем соглашение, что если U является одноэлементным множеством {A}, то вместо L({A}) будем писать просто L(A). В каждом конкретном случае из контекста будет ясно, что имеется ввиду.

Def 3. $s \cong_{L(U)} t$ е.т.е. $\forall$p(p$\notin$***L***(U) $\Rightarrow$ s(p)=t(p)), где s,t$\in$*Val*.

Сопоставим каждой формуле пару бинарных отношений достижимости на множестве *Val*. Итак, всякой формуле A будут соответствовать два бинарных отношения T(A)$\subseteq$*Val*$\times$*Val* и F(A) $\subseteq$*Val*$\times$*Val*. Определим их строго:

Def 4.
1. T(p) = {<s,t> | $s \cong_{L(p)} t$, t(p)=1 }.
2. F(p) = {<s,t> | $s \cong_{L(p)} t$, t(p)=0 }.

3. T($\neg$A) = F(A).
4. F($\neg$A) = T(A).

5. T(A$\vee$B) = T(A)$\cup$T(B).
6. F(A$\vee$B) = {<s,t> | $\exists$v$\in$*Val*(<s,v>$\in$F(A), <v,t>$\in$F(B), t(A)=0) или

$\exists$v$\in$*Val*(<s,v>$\in$F(B), <v,t>$\in$F(A), t(B)=0)}.

7. T(A&B) = {<s,t> | $\exists$v$\in$*Val*(<s,v>$\in$T(A), <v,t>$\in$T(B), t(A)=1) или

$\exists$v$\in$*Val*(<s,v>$\in$T(B), <v,t>$\in$T(A), t(B)=1)}.

8. F(A&B)=F(A)$\cup$F(B).

9. T(A$\rightarrow$B) = {<s,t> | (s(A)=1,<s,t>$\in$T(B)) или (s(A)=0, s=t)}.
10. F(A$\rightarrow$B) = {<s,t> | $\exists$v$\in$*Val*(<s,v>$\in$T(A), <v,t>$\in$F(B), t(A)=1) или

$\exists$v$\in$*Val*(<s,v>$\in$F(B), <v,t>$\in$T(A), t(B)=0)}.

Пункт 9 определения в точности соответствует интерпретации продукций. Продукции имеют вид A$\rightarrow$ α, где A - некоторая формула, а α - терм, представляющий действие. Если условие A имеет место, то выполняется действие α. В противном случае действие α игнорируется.

Возможен и другой вариант, когда каждой формуле A сопоставляется всего лишь одно отношение достижимости $[A]\subseteq$ *Val*$\times$*Val. Запись s*$[A]$*t будет служить сокращением для <s,t>*$\in[A]$ *и будет читаться как “из состояния s посредством пропозициональной программы* $[A]$ *достижимо* *состояние t". Дадим строгое определение.*

Def 4'.
1.$s[\![P]\!]t \Leftrightarrow s\cong_{L(P)}t$, $t(P)=1$, $P\in\{p,\neg p\}$.
2.$s[\![A\vee B]\!]t \Leftrightarrow s[\![A]\!]ts[\![B]\!]t$.
3.$s[\![A\&B]\!]t \Leftrightarrow (s[\![A]\!]\circ[\![B]\!]t,\ t(A)=1)$ *или* $(s[\![B]\!]\circ[\![A]\!]t,\ t(B)=1)$.
4.$s[\![A\rightarrow B]\!]t \Leftrightarrow (s(A)=1,\ s[\![B]\!]t)$ *или* $(s(A)=0,\ s=t)$.
5.$s[\![\neg\neg A]\!]t \Leftrightarrow s[A]t$.
6.$s[\![\neg(A\vee B)]\!]t \Leftrightarrow s[\![\neg A\&\neg B]\!]t$.
7.$s[\![\neg(A\&B)]\!]t \Leftrightarrow s[\![\neg A\vee\neg B]\!]t$.
8.$s[\![\neg(A\rightarrow B)]\!]t \Leftrightarrow s[\![A\&\neg B]\!]t$.
.

В этом случае многие доказательства упрощаются. В дальнейшем будем придерживаться первого варианта.

Теорема 1. Определенные нами отношения обладают следующими свойствами:
1. $T(p)\cap F(p)=\emptyset$.
2. $\forall s\in Val(<s,s>\in T(p)\cup F(p))$.
3. $s(A)=1 \Rightarrow\ <s,s>\in T(A)$, $s(A)=0 \Rightarrow <s,s>\in F(A)$.
4. $<s,t>\in T(A) \Rightarrow t(A)=1$, $<s,t>\in F(A) \Rightarrow t(A)=0$.

Доказательство.

1. Доказательство тривиально в силу *Def 4*.

2. Так как $s\cong_{L(p)}s$ и ($s(p)=1$ или $s(p)=0$), то получаем $<s,s>\in T(p)\cup F(p)$.

3. Доказательство индукцией по степени формулы A.
Базис индукции. A=p.
+1. s(p)=1
2. $s\cong_{L(p)}s$ - по *Def 3*
3. $<s,s>\in T(p)$ - из 1, 2 по *Def 4*
+4. s(p)=0
5. $s\cong_{L(p)}s$ - по *Def 3*
6. $<s,s>\in F(p)$ - из 4, 5 по *Def 4*

Индукционный шаг.
+1. $A=\neg B$
+2. $s(\neg B)=1$
3. $s(B)=0$ - по определению s
4. $<s,s>\in F(B)$ - из 3 по индуктивному допущению
5. $<s,s>\in T(\neg B)$ - из 4 по *Def 4*
+6. $s(\neg B)=0$
7. $s(B)=1$ - по определению s

8. <s,s>∈T(B) - из 7 по индуктивному допущению
9. <s,s>∈F(¬B) - из 8 по *Def 4*

+1. A=B&C
+2. s(B&C)=1
3. s(B)=1, s(C)=1 - из 2 по определению s
4. <s,s>∈T(B), <s,s>∈T(C) - из 3 по индуктивному допущению
5. <s,s>∈T(B&C) - из 3, 4 по *Def 4*
+6. s(B&C)=0
7. s(B)=0 или s(C)=0 - из 6 по определению s
8. <s,s>∈F(B) или <s,s>∈F(C) - из 7 по индуктивному допущению
9. <s,s>∈F(B)∪F(C) - из 8
10. <s,s>∈F(B&C) - из 9 по *Def 4*

+1. A=B∨C
+2. s(B∨C)=1
3. s(B)=1 или s(C)=1 - из 2 по определению s
4. <s,s>∈T(B) или <s,s>∈T(C) - из 3 по индуктивному допущению
5. <s,s>∈T(B)∪T(C) - из 4
6. <s,s>∈T(B∨C) - из 5 по *Def 4*
+7. s(B∨C)=0
8. s(B)=0, s(C)=0 - из 7 по определению s
9. <s,s>∈F(B), <s,s>∈F(C) - из 8 по индуктивному допущению
10. <s,s>∈F(B∨C) - из 8, 9 по *Def 4*

+1. A=B→C
+2. s(B→C)=1
3. s(B)=0 или s(C)=1 - из 2 по определению s
+4. s(B)=0
5. <s,s>∈T(B→C) - из 4 по *Def 4*
+6. s(B)=1, s(C)=1
7. <s,s>∈T(C) - из 6 по индуктивному допущению
8. <s,s>∈T(B→C) - из 6, 7 по *Def 4*
+9. s(B→C)=0
10. s(B)=1, s(C)=0 - из 9 по определению s
11. <s,s>∈T(B), <s,s>∈F(C) - из 10 по индуктивному допущению
12. <s,s>∈F(B→C) - из 10, 11 по *Def 4*

4. Доказательство индукцией по степени формулы A.
Базис индукции. A=p.
+1. <s,t>∈T(p)
2. t(p)=1 - из 1 по *Def 4*
+3. <s,t>∈F(p)
4. t(p)=0 - из 3 по *Def 4*

Индукционный шаг.

+1. $A=\neg B$
+2. $\langle s,t \rangle \in T(\neg B)$
3. $\langle s,t \rangle \in F(B)$ - из 2 по *Def 4*
4. $t(B)=0$ - из 3 по индуктивному допущению
5. $t(\neg B)=1$ - из 4 по определению t
+6. $\langle s,t \rangle \in F(\neg B)$
7. $\langle s,t \rangle \in T(B)$ - из 6 по *Def 4*
8. $t(B)=1$ - из 7 по индуктивному допущению
9. $t(\neg B)=0$ - из 8 по определению t

+1. $A=(B\&C)$
+2. $\langle s,t \rangle \in T(B\&C)$
3. $\exists v \in \mathit{Val}(\langle s,v \rangle \in T(B),\ \langle v,t \rangle \in T(C),\ t(B)=1)$ или
$\exists v \in \mathit{Val}(\langle s,v \rangle \in T(C),\ \langle v,t \rangle \in T(B),\ t(C)=1)$ - из 2 по *Def 4*
+4. $\exists v \in \mathit{Val}(\langle s,v \rangle \in T(B),\ \langle v,t \rangle \in T(C),\ t(B)=1)$
5. $\langle s,v \rangle \in T(B),\ \langle v,t \rangle \in T(C),\ t(B)=1$ - из 4 по удалению $\exists$ на v
6. $t(C)=1$ - из 5 по индуктивному допущению
7. $t(B\&C)=1$ - из 5, 6 по определению t
+8. $\exists v \in \mathit{Val}(\langle s,v \rangle \in T(C),\ \langle v,t \rangle \in T(B),\ t(C)=1)$
9. $\langle s,v \rangle \in T(C),\ \langle v,t \rangle \in T(B),\ t(C)=1$ - из 4 по удалению $\exists$ на v
10. $t(B)=1$ - из 9 по индуктивному допущению
11. $t(B\&C)=1$ - из 9, 10 по определению t
+12. $\langle s,t \rangle \in F(B\&C)$
13. $\langle s,t \rangle \in F(B)$ или $\langle s,t \rangle \in F(C)$ - из 12 по *Def 4*
14. $t(B)=0$ или $t(C)=0$ - из 13 по индуктивному допущению
15. $t(B\&C)=0$ - из 14 по определению t

+1. $A=(B\vee C)$
+2. $\langle s,t \rangle \in F(B\vee C)$
3. $\exists v \in \mathit{Val}(\langle s,v \rangle \in F(B),\ \langle v,t \rangle \in F(C),\ t(B)=0)$ или
$\exists v \in \mathit{Val}(\langle s,v \rangle \in F(C),\ \langle v,t \rangle \in F(B),\ t(C)=0)$ - из 2 по *Def 4*
+4. $\exists v \in \mathit{Val}(\langle s,v \rangle \in F(B),\ \langle v,t \rangle \in F(C),\ t(B)=0)$
5. $\langle s,v \rangle \in F(B),\ \langle v,t \rangle \in F(C),\ t(B)=0$ - из 4 по удалению $\exists$ на v
6. $t(C)=0$ - из 5 по индуктивному допущению
7. $t(B\vee C)=0$ - из 5, 6 по определению t
+8. $\exists v \in \mathit{Val}(\langle s,v \rangle \in F(C),\ \langle v,t \rangle \in F(B),\ t(C)=0)$
9. $\langle s,v \rangle \in F(C),\ \langle v,t \rangle \in F(B),\ t(C)=0$ - из 4 по удалению $\exists$ на v
10. $t(B)=0$ - из 9 по индуктивному допущению
11. $t(B\vee C)=0$ - из 9, 10 по определению t
+12. $\langle s,t \rangle \in T(B\vee C)$
13. $\langle s,t \rangle \in T(B)$ или $\langle s,t \rangle \in T(C)$ - из 12 по *Def 4*
14. $t(B)=1$ или $t(C)=1$ - из 13 по индуктивному допущению
15. $t(B\vee C)=1$ - из 14 по определению t

+1. A=B→C
+2. <s,t>∈T(B→C)
3. (s(B)=1,<s,t>∈T(C)) или (s(B)=0, s=t) - из 2 по *Def 4*
+4. s(B)=0, s=t
5. t(B)=0 - из 4
6. t(B→C)=1 - из 5 по определению t
+7. s(B)=1,<s,t>∈T(C)
8. t(C)=1 - из 7 по индуктивному допущению
9. t(B→C)=1 - из 7, 8 по определению t
+10. <s,t>∈F(B→C)
11. ∃v∈*Val*(<s,v>∈T(B), <v,t>∈F(C), t(B)=1) или
∃v∈*Val*(<s,v>∈F(C), <v,t>∈T(B), t(C)=0) - из 10 по *Def 4*
+12. ∃v∈*Val*(<s,v>∈T(B), <v,t>∈F(C), t(B)=1)
13. <s,v>∈T(B), <v,t>∈F(C), t(B)=1 - из 12 по удалению ∃ на v
14. t(C)=0 - из 13 по индуктивному допущению
15. t(B→C)=0 - из 13, 14 по определению t
+16. ∃v∈*Val*(<s,v>∈F(C), <v,t>∈T(B), t(C)=0)
17. <s,v>∈F(C), <v,t>∈T(B), t(C)=0 - из 16 по удалению ∃ на v
18. t(B)=1 - из 17 по индуктивному допущению
19. t(B→C)=0 - из 17, 18 по определению t

Теорема доказана.

Def 5. *Id*(M) = {<m,m> | <m,m>∈M}

Теорема 2. Формула классической логики высказываний **A** общезначима, если и только если *Id*(*Val*x*Val*)⊆T(**A**).

Доказательство тривиально в силу свойств 3 и 4 теоремы 1.

Теорема 2 наводит на мысль, что возможна чисто реляционная интерпретация классической логики высказываний. Попробуем ее дать.

Язык логики высказываний остается прежним. В качестве модели берем тройку <**M, T, F**>, где **M** - некоторое непустое множество миров, а **T** и **F** - функции типа **Var-**>$\mathbf{2}^{MxM}$, которые удовлетворяют двум ограничениям:
1. $\mathbf{Pr}_2$(**T**(p))∩ $\mathbf{Pr}_2$(**F**(p))=∅, где $\mathbf{Pr}_2$ - проекция на второй элемент пары.
2. *Id*(**MxM**)⊆**T**(p)∪**F**(p)

Эти условия могут рассматриваться как аналоги условий непротиворечивости и полноты описаний состояния в классической логике высказываний.

На сложные формулы функции **T** и **F** распространяются по индукции:

Def 6.
1. $\mathbf{T}(\neg A) = \mathbf{F}(A)$
2. $\mathbf{F}(\neg A) = \mathbf{T}(A)$
3. $\mathbf{T}(A\&B) = (\mathbf{T}(A) \bullet \mathbf{T}(B) \bullet Id(\mathbf{T}(A))) \cup (\mathbf{T}(B) \bullet \mathbf{T}(A) \bullet Id(\mathbf{T}(B)))$
4. $\mathbf{F}(A\&B) = \mathbf{F}(A) \cup \mathbf{F}(B)$
5. $\mathbf{T}(A\vee B) = \mathbf{T}(A) \cup \mathbf{T}(B)$
6. $\mathbf{F}(A\vee B) = (\mathbf{F}(A) \bullet \mathbf{F}(B) \bullet Id(\mathbf{F}(A))) \cup (\mathbf{F}(B) \bullet \mathbf{F}(A) \bullet Id(\mathbf{F}(B)))$
7. $\mathbf{T}(A\to B) = (Id(\mathbf{T}(A)) \bullet \mathbf{T}(B)) \cup Id(\mathbf{F}(A))$
8. $\mathbf{F}(A\to B) = (\mathbf{T}(A) \bullet \mathbf{F}(B) \bullet Id(\mathbf{T}(A))) \cup (\mathbf{F}(B) \bullet \mathbf{T}(A) \bullet Id(\mathbf{F}(B)))$

Формула **A** общезначима, если и только если $Id(\mathbf{MxM}) \subseteq \mathbf{T}(\mathbf{A})$

Возможен и другой вариант определения модели с одним отношением достижжимости. В этом случае моделью будет пара $<\boldsymbol{M}, \boldsymbol{R}>$, $\boldsymbol{M}$ *- некоторое непустое множество миров, а* $\boldsymbol{R}$ *- функция типа* $\boldsymbol{Lit}\text{-}>\boldsymbol{2}^{MxM}$, $\boldsymbol{Lit}$ *- это множество литералов (пропозициональных переменных и их отрицаний), которая удовлетворяет двум ограничениям:*

1. $\boldsymbol{Pr}_2(\boldsymbol{R}(p)) \cap \boldsymbol{Pr}_2(\boldsymbol{R}(\neg p)) = \emptyset$, $\boldsymbol{Pr}_2$ *- проекция на второй элемент пары.*

2. $Id(\boldsymbol{MxM}) \subseteq \boldsymbol{R}(p) \cup \boldsymbol{R}(\neg p)$

На сложные формулы функция $\boldsymbol{R}$ *распространяется по индукции:*

Def 6'.
1. $\boldsymbol{R}(A\&B) = (\boldsymbol{R}(A) \bullet \boldsymbol{R}(B) \bullet Id(\boldsymbol{R}(A))) \cup (\boldsymbol{R}(B) \bullet \boldsymbol{R}(A) \bullet Id(\boldsymbol{R}(B)))$
2. $\boldsymbol{R}(A\vee B) = \boldsymbol{R}(A) \cup \boldsymbol{R}(B)$
3. $\boldsymbol{R}(A\to B) = (Id(\boldsymbol{R}(A)) \bullet \boldsymbol{R}(B)) \cup Id(\boldsymbol{R}(\neg A))$
4. $\boldsymbol{R}(\neg\neg A) = \boldsymbol{R}(A)$
5. $\boldsymbol{R}(\neg(A\&B)) = \boldsymbol{R}(\neg A\vee\neg B)$
6. $\boldsymbol{R}(\neg(A\vee B)) = \boldsymbol{R}(\neg A\&\neg B)$
7. $\boldsymbol{R}(\neg(A\to B)) = \boldsymbol{R}(A\&\neg B)$

$\boldsymbol{A}$ *общезначима, если и только если* $Id(\boldsymbol{MxM}) \subseteq \boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})$

В этом случае многие доказательства упрощаются. В дальнейшем будем придерживаться первого варианта.

Теорема 3. Для любой формулы A определенные нами отношения обладают следующими свойствами:
1. $\mathbf{Pr}_2(\mathbf{T}(A)) \cap \mathbf{Pr}_2(\mathbf{F}(A)) = \emptyset$.
2. $Id(\mathbf{MxM}) \subseteq \mathbf{T}(A) \cup \mathbf{F}(A)$.

1. Доказательство проводим индукцией по степени формулы A.

Базис индукции. A=p
Утверждение имеет место по определению модели.

Индукционный шаг.
+1. A=¬B
2. $\mathbf{Pr}_2(\mathbf{T}(\neg B)) \cap \mathbf{Pr}_2(\mathbf{F}(\neg B)) = \mathbf{Pr}_2(\mathbf{F}(B)) \cap \mathbf{Pr}_2(\mathbf{T}(B))$ - по *Def 6*
3. $\mathbf{Pr}_2(\mathbf{F}(B)) \cap \mathbf{Pr}_2(\mathbf{T}(B)) = \emptyset$ - по индуктивному допущению

+1.A=B&C
2. $\mathbf{Pr}_2(\mathbf{T}(B\&C)) = \mathbf{Pr}_2((\mathbf{T}(B) \bullet \mathbf{T}(C) \bullet \mathit{Id}(\mathbf{T}(B))) \cup (\mathbf{T}(C) \bullet \mathbf{T}(B) \bullet \mathit{Id}(\mathbf{T}(C))))$

$$= \mathbf{Pr}_2(\mathbf{T}(B) \bullet \mathbf{T}(C) \bullet \mathit{Id}(\mathbf{T}(B))) \cup \mathbf{Pr}_2(\mathbf{T}(C) \bullet \mathbf{T}(B) \bullet \mathit{Id}(\mathbf{T}(C)))$$ - по *Def 6*

3. $\mathbf{Pr}_2(\mathbf{F}(B\&C)) = \mathbf{Pr}_2(\mathbf{F}(B) \cup \mathbf{F}(C)) = \mathbf{Pr}_2(\mathbf{F}(B)) \cup \mathbf{Pr}_2(\mathbf{F}(C))$ - по *Def 6*
+4. $s \in \mathbf{Pr}_2(\mathbf{F}(B\&C))$
5. $s \in \mathbf{Pr}_2(\mathbf{F}(B))$ или $s \in \mathbf{Pr}_2(\mathbf{F}(C))$ - из 4.
+6. $s \in \mathbf{Pr}_2(\mathbf{F}(B))$ - допущение при рассуждении по случаям
7. $s \notin \mathbf{Pr}_2(\mathbf{T}(B))$ - из 6 по индуктивному допущению
8. $s \notin \mathbf{Pr}_2(\mathit{Id}(\mathbf{T}(B)))$ - из 7 по *Def 5.*
9. $s \notin \mathbf{Pr}_2(\mathbf{T}(B) \bullet \mathbf{T}(C) \bullet \mathit{Id}(\mathbf{T}(B)))$ - из 8.
10. $s \notin \mathbf{Pr}_2(\mathbf{T}(C) \bullet \mathbf{T}(B) \bullet \mathit{Id}(\mathbf{T}(C)))$ - из 7.
+11. $s \in \mathbf{Pr}_2(\mathbf{F}(C))$ - допущение при рассуждении по случаям.
Этот случай полностью аналогичен предыдущему.
12. $s \notin \mathbf{Pr}_2(\mathbf{T}(B\&C))$ - из 4-11
13. $\mathbf{Pr}_2(\mathbf{T}(B\&C)) \cap \mathbf{Pr}_2(\mathbf{F}(B\&C)) = \emptyset$ - из 4-12

+1.A= B∨C
2. $\mathbf{Pr}_2(\mathbf{T}(B \vee C)) = \mathbf{Pr}_2(\mathbf{T}(B) \cup \mathbf{T}(C)) = \mathbf{Pr}_2(\mathbf{T}(B \vee C)) \cup \mathbf{Pr}_2(\mathbf{T}(B \vee C))$ - по *Def 6*
3. $\mathbf{Pr}_2(\mathbf{F}(B \vee C)) = \mathbf{Pr}_2((\mathbf{F}(B) \bullet \mathbf{F}(C) \bullet \mathit{Id}(\mathbf{F}(B))) \cup (\mathbf{F}(C) \bullet \mathbf{F}(B) \bullet \mathit{Id}(\mathbf{F}(C)))) =$

$$\mathbf{Pr}_2(\mathbf{F}(B) \bullet \mathbf{F}(C) \bullet \mathit{Id}(\mathbf{F}(B))) \cup \mathbf{Pr}_2(\mathbf{F}(C) \bullet \mathbf{F}(B) \bullet \mathit{Id}(\mathbf{F}(C)))$$ - по *Def 6*

+4. $s \in \mathbf{Pr}_2(\mathbf{T}(B \vee C))$
5. $s \in \mathbf{Pr}_2(\mathbf{T}(B))$ или $s \in \mathbf{Pr}_2(\mathbf{T}(C))$ - из 4
+6. $s \in \mathbf{Pr}_2(\mathbf{T}(B))$ - допущение при рассуждении по случаям
7. $s \notin \mathbf{Pr}_2(\mathbf{F}(B))$ - из 6 по индуктивному допущению
8. $s \notin \mathbf{Pr}_2(\mathit{Id}(F(B)))$ - из 7 по *Def 5.*
9. $s \notin \mathbf{Pr}_2(\mathbf{F}(B) \bullet \mathbf{F}(C) \bullet \mathit{Id}(\mathbf{F}(B)))$ - из 8.
10. $s \notin \mathbf{Pr}_2(\mathbf{F}(C) \bullet \mathbf{F}(B) \bullet \mathit{Id}(\mathbf{F}(C)))$ - из 7.
+11. $s \in \mathbf{Pr}_2(\mathbf{T}(C))$ - допущение при рассуждении по случаям.
Этот случай полностью аналогичен предыдущему.
12. $s \notin \mathbf{Pr}_2(\mathbf{F}(B \vee C))$ - из 4-11

13. $\mathbf{Pr}_2(\mathbf{T}(B\vee C))\cap \mathbf{Pr}_2(\mathbf{F}(B\vee C))=\emptyset$ - из 4-12

+1.A=B→C
2. $\mathbf{Pr}_2(\mathbf{T}(B\to C)) = \mathbf{Pr}_2((Id\ (\mathbf{T}(B)) \bullet \mathbf{T}(C)) \cup Id(\mathbf{F}(B)))=$

$\mathbf{Pr}_2(Id(\mathbf{T}(B))\bullet\mathbf{T}(C)) \cup \mathbf{Pr}_2(Id(\mathbf{F}(B)))$ - по *Def 6*

3.$\mathbf{Pr}_2(\mathbf{F}(B\to C))=\mathbf{Pr}_2((\mathbf{T}(B)\bullet\mathbf{F}(C)\bullet Id(\mathbf{T}(B))) \cup(\mathbf{F}(C)\bullet\mathbf{T}(B)\bullet Id(\mathbf{F}(C))))=$

$\mathbf{Pr}_2(\mathbf{T}(B)\bullet\mathbf{F}(C)\bullet Id(\mathbf{T}(B))) \cup\mathbf{Pr}_2(\mathbf{F}(C)\bullet\mathbf{T}(B)\bullet Id(\mathbf{F}(C)))$ - по *Def 6*

+4. $s\in\mathbf{Pr}_2(\mathbf{T}(B\to C))$
5. $s\in\mathbf{Pr}_2(Id(\mathbf{T}(B))\bullet\mathbf{T}(C))$ или $s\in\mathbf{Pr}_2(Id(\mathbf{F}(B)))$ - из 4
+6. $s\in\mathbf{Pr}_2(Id(\mathbf{T}(B))\bullet\mathbf{T}(C))$ - допущение при рассуждении по случаям.
7. $s\in\mathbf{Pr}_2(\mathbf{T}(C))$ - из 6
8. $s\notin\mathbf{Pr}_2(\mathbf{F}(C))$ - из 7 по индуктивному допущению
9. $s\notin\mathbf{Pr}_2(\mathbf{T}(B)\bullet\mathbf{F}(C)\bullet Id(\mathbf{T}(B)))$ - из 8 по *Def 5*
10. $s\notin\mathbf{Pr}_2(\mathbf{F}(C)\bullet\mathbf{T}(B)\bullet Id(\mathbf{F}(C)))$ - из 8 по *Def 5*
11. $s\notin\mathbf{Pr}_2(\mathbf{F}(B\to C))$ **-** из 9,10
+12. $s\in\mathbf{Pr}_2(Id(\mathbf{F}(B)))$ - допущение при рассуждении по случаям.
13. $s\in\mathbf{Pr}_2(\mathbf{F}(B))$ - из 12
14. $s\notin\mathbf{Pr}_2(\mathbf{T}(B))$ - из 13 по индуктивному допущению
15. $s\notin\mathbf{Pr}_2(\mathbf{T}(B)\bullet\mathbf{F}(C)\bullet Id(\mathbf{T}(B)))$ - из 14 по *Def 5*
16. $s\notin\mathbf{Pr}_2(\mathbf{F}(C)\bullet\mathbf{T}(B)\bullet Id(\mathbf{F}(C)))$ - из 14 по *Def 5*
17. $s\notin\mathbf{Pr}_2(\mathbf{F}(B\to C))$ - из 15,16
18. $s\notin\mathbf{Pr}_2(\mathbf{F}(B\to C))$ - из 4-17
19. $\mathbf{Pr}_2(\mathbf{T}(B\to C))\cap \mathbf{Pr}_2(\mathbf{F}(B\to C))=\emptyset$ - из 4, 18

Первое свойство доказано.

2. Доказательство проводим индукцией по степени формулы A.

Базис индукции. A=p
Утверждение имеет место по определению модели.

Индукционный шаг.
+1. A=¬B
2. $\mathbf{T}(\neg B)\cup\mathbf{F}(\neg B)= \mathbf{F}(B)\cup\mathbf{T}(B)$ **-** по *Def 6*
3. $Id(\mathbf{MxM})\subseteq\mathbf{F}(B)\cup\mathbf{T}(B)$ - по индуктивному допущению

+1. A=B&C
+2. $<s,s>\notin\mathbf{T}(B\&C)\cup\mathbf{F}(B\&C)$ - для некоторого s
3. $<s,s>\notin\mathbf{T}(B\&C)$ - из 2
4. $<s,s>\notin\mathbf{F}(B\&C)$ - из 2
5. $<s,s>\notin\mathbf{F}(B)$ и $<s,s>\notin\mathbf{F}(C)$ - из 4 по *Def 6*
6. $<s,s>\in\mathbf{T}(B)$ и $<s,s>\in\mathbf{T}(C)$ - из 5 по индуктивному допущению
7. $<s,s>\notin\mathbf{T}(B)\bullet\mathbf{T}(C)\bullet Id(\mathbf{T}(B))$ - из 3 по *Def 6*

8. $\langle s,s\rangle \in Id(\mathbf{T}(B))$ - из 6 по *Def 5*
9. $\langle s,s\rangle \in \mathbf{T}(B)\bullet\mathbf{T}(C)\bullet Id(\mathbf{T}(B))$ - из 6, 8
10. противоречие 7, 9
11. $\langle s,s\rangle \in \mathbf{T}(B\&C)\cup\mathbf{F}(B\&C)$ - из 2, 10

+1. $A=B\vee C$
+2. $\langle s,s\rangle \notin \mathbf{T}(B\vee C)\cup\mathbf{F}(B\vee C)$ - для некоторого s
3. $\langle s,s\rangle \notin \mathbf{T}(B\vee C)$ - из 2
4. $\langle s,s\rangle \notin \mathbf{F}(B\vee C)$ - из 2
5. $\langle s,s\rangle \notin \mathbf{T}(B)$ и $\langle s,s\rangle \notin \mathbf{T}(C)$ - из 3 по *Def 6*
6. $\langle s,s\rangle \in \mathbf{F}(B)$ и $\langle s,s\rangle \in \mathbf{F}(C)$ - из 5 по индуктивному допущению
7. $\langle s,s\rangle \notin \mathbf{F}(B)\bullet\mathbf{F}(C)\bullet Id(\mathbf{F}(B))$ - из 4 по *Def 6*
8. $\langle s,s\rangle \in Id(\mathbf{F}(B))$ - из 6 по *Def 5*
9. $\langle s,s\rangle \in \mathbf{F}(B)\bullet\mathbf{F}(C)\bullet Id(\mathbf{F}(B))$ - из 6, 8
10. противоречие 7, 9
11. $\langle s,s\rangle \in \mathbf{T}(B\vee C)\cup\mathbf{F}(B\vee C)$ - из 2, 10

+1.$A=B\rightarrow C$
+2. $\langle s,s\rangle \notin \mathbf{T}(B\rightarrow C)\cup\mathbf{F}(B\rightarrow C)$ - для некоторого s
3 . $\langle s,s\rangle \notin \mathbf{T}(B\rightarrow C)$ - из 2
4 . $\langle s,s\rangle \notin \mathbf{F}(B\rightarrow C)$ - из 2
5. $\langle s,s\rangle \notin (Id(\mathbf{T}(B))\bullet\mathbf{T}(C)) \cup Id(\mathbf{F}(B))$ - из 3 по *Def 6*
6. $\langle s,s\rangle \notin Id(\mathbf{T}(B))\bullet\mathbf{T}(C)$ и $\langle s,s\rangle \notin Id(\mathbf{F}(B))$ - из 5
7. $\langle s,s\rangle \notin \mathbf{F}(B)$ - из 6
8. $\langle s,s\rangle \in \mathbf{T}(B)$ - из 7 по индуктивному допущению
9. $\langle s,s\rangle \notin \mathbf{T}(C)$ - из 6, 8
10. $\langle s,s\rangle \in \mathbf{F}(C)$ - из 9 по индуктивному допущению
11. $\langle s,s\rangle \notin (\mathbf{T}(B)\bullet\mathbf{F}(C)\bullet Id(\mathbf{T}(B))) \cup (\mathbf{F}(C)\bullet\mathbf{T}(B)\bullet Id(\mathbf{F}(C)))$ - из 4 по *Def 6*
12. $\langle s,s\rangle \in Id(\mathbf{T}(B)))$ - из 8 по *Def 5*
13. $\langle s,s\rangle \notin \mathbf{T}(B)\bullet\mathbf{F}(C)\bullet Id(\mathbf{T}(B))$ - из 11
14. $\langle s,s\rangle \in \mathbf{T}(B)\bullet\mathbf{F}(C)\bullet Id(\mathbf{T}(B))$ - из 8, 10, 12
15. противоречие 13, 14
16. $\langle s,s\rangle \in \mathbf{T}(B\rightarrow C)\cup\mathbf{F}(B\rightarrow C)$ - из 2, 15

Второе свойство доказано.

Теорема доказана.

Покажем, что классическая логика высказываний непротиворечива относительно построенной семантики. В качестве системы аксиом возьмем следующую:

A1. $A\rightarrow(B\rightarrow A)$
A2. $(A\rightarrow(B\rightarrow C)) \rightarrow((A\rightarrow B) \rightarrow(A\rightarrow C))$
A3. $A\&B\rightarrow A$

A4. $A\&B \to B$
A5. $A \to (B \to A\&B)$
A6. $A \to A \vee B$
A7. $B \to A \vee B$
A8. $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$
A9. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
A10. $\neg\neg A \to A$

$A \to B,\ A\ /\ B$ - modus ponens

Теорема 4. Все теоремы классической логики высказываний общезначимы в построенной семантике.

Проверим свойство единственного правила вывода сохранять общезначимость.

+1. $Id(\mathbf{MxM}) \subseteq \mathbf{T}\ (A \to B)$, $Id(\mathrm{MxM}) \subseteq \mathbf{T}(A)$
2. $Id(\mathbf{MxM}) \subseteq (Id(\mathbf{T}(A)) \bullet \mathbf{T}(B)) \cup Id(\mathbf{F}(A))$ - из 1 по *Def 6*
3. $Id(\mathbf{MxM}) \subseteq Id(\mathbf{T}(A)) \bullet \mathbf{T}(B)$ - из 1, 2 по теореме 3
4. $Id(\mathbf{MxM}) \subseteq \mathbf{T}(B)$ - из 3.

Проверим общезначимость всех аксиом.

A1. $A \to (B \to A)$
+1. $<s,s> \notin \mathbf{T}(A \to (B \to A))$
2. $\mathbf{T}(A \to (B \to A)) = (Id(\mathbf{T}(A)) \bullet \mathbf{T}(B \to A)) \cup Id(\mathbf{F}(A)) =$
$(Id(\mathbf{T}(A)) \bullet ((Id(\mathbf{T}(B)) \bullet \mathbf{T}(A)) \cup \mathbf{F}(B))) \cup Id(\mathbf{F}(A)) =$
$(Id(\mathbf{T}(A)) \bullet Id(\mathbf{T}(B))\ \bullet \mathbf{T}(A)) \cup (Id(\mathbf{T}(A)) \bullet \mathbf{F}(B)) \cup Id(\mathbf{F}(A))$
3. $<s,s> \notin Id(\mathbf{T}(A)) \bullet Id(\mathbf{T}(B))$ - из 1,2
4. $<s,s> \notin Id(\mathbf{T}(A)) \bullet \mathbf{F}(B)$ - из 1,2
5. $<s,s> \notin Id(\mathbf{F}(A))$ - из 1,2
6. $<s,s> \notin \mathbf{F}(A)$ - из 5
7. $<s,s> \in \mathbf{T}(A)$ - из 6 по теореме 3
8. $<s,s> \in Id(\mathbf{T}(A))$ - из 7 по *Def 5*
9. $<s,s> \notin Id(\mathbf{T}(B))$ - из 3,8
10. $<s,s> \notin \mathbf{T}(B)$ - из 9 по *Def 5*
11. $<s,s> \in \mathbf{F}(B)$ - из 10 по теореме 3
12. $<s,s> \notin \mathbf{F}(B)$ - из 4,8
13. противоречие 11, 12
14. $<s,s> \in \mathbf{T}(A \to (B \to A))$ - из 1, 13

A2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
+1. $<s,s> \notin \mathbf{T}((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$
2. $\mathbf{T}((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))) =$
$(Id(\mathbf{T}(A \to (B \to C)))\ \bullet \mathbf{T}((A \to B) \to (A \to C))) \cup Id(\mathbf{F}(A \to (B \to C)))$
3. $<s,s> \notin Id(\mathbf{T}(A \to (B \to C)))\ \bullet \mathbf{T}((A \to B) \to (A \to C))$ - из 1,2

4. $<s,s> \notin Id(\mathbf{F}(A\to(B\to C)))$ - из 1,2
5. $<s,s> \notin \mathbf{F}(A\to(B\to C))$ - из 4
6. $<s,s> \in \mathbf{T}(A\to(B\to C))$ - из 5 по теореме 3
7. $<s,s> \in Id(\mathbf{T}(A\to(B\to C)))$ - из 6 по *Def 5*
8. $<s,s> \notin \mathbf{T}((A\to B) \to(A\to C))$ - из 3,7
9. $\mathbf{T}((A\to B) \to(A\to C))=(Id(\mathbf{T}(A\to B)) \bullet\mathbf{T}(A\to C)) \cup Id(\mathbf{F}(A\to B))$
10. $<s,s> \notin Id(\mathbf{T}(A\to B)) \bullet\mathbf{T}(A\to C)$ - из 8, 9
11. $<s,s> \notin Id(\mathbf{F}(A\to B))$ - из 8, 9
12. $<s,s> \notin \mathbf{F}(A\to B)$ - из 11 по *Def 5*
13. $<s,s> \in \mathbf{T}(A\to B)$ - из 12 по теореме 3
14. $<s,s> \in Id(\mathbf{T}(A\to B))$ - из 13 по *Def 5*
15. $<s,s> \notin \mathbf{T}(A\to C)$ - из 10, 14
16. $<s,s> \notin (Id\ (\mathbf{T}(A)) \bullet \mathbf{T}(C)) \cup Id(\mathbf{F}(A))$ - из 15 по *Def 6*
17. $<s,s> \notin Id\ (\mathbf{T}(A)) \bullet \mathbf{T}(C)$ - из 16
18. $<s,s> \notin Id(\mathbf{F}(A))$ - из 16
19. $<s,s> \notin \mathbf{F}(A)$ - из 18
20. $<s,s> \in \mathbf{T}(A)$ - из 19 по теореме 3
21. $<s,s> \in Id(\mathbf{T}(A))$ - из 20 по *Def 5*
22. $<s,s> \notin \mathbf{T}(C)$ - из 17, 21
23. $<s,s> \in (Id\ (\mathbf{T}(A))\bullet\mathbf{T}(B)) \cup Id(\mathbf{F}(A))$ - из 13
24. $<s,s> \in Id(\mathbf{T}(A))\bullet\mathbf{T}(B)$ - из 18,23
25. $<s,s> \in \mathbf{T}(B)$ - из 21, 24
26. $\mathbf{T}(A\to(B\to C))=(Id(\mathbf{T}(A)) \bullet\mathbf{T}(B\to C)) \cup Id(\mathbf{F}(A))$
27. $<s,s> \in Id(\mathbf{T}(A)) \bullet\mathbf{T}(B\to C)$ - из 6, 18, 26
28. $<s,s> \in \mathbf{T}(B\to C)$ - из 27
29. $<s,s> \in (Id(\mathbf{T}(B))\bullet\mathbf{T}(C)) \cup Id(\mathbf{F}(B))$ - из 28 по *Def 6*
30. $<s,s> \notin \mathbf{F}(B)$ - из 25 по теоереме3
31. $<s,s> \notin Id(\mathbf{F}(B))$ - из 30 по *Def 5*
32. $<s,s> \in Id(\mathbf{T}(B))\bullet\mathbf{T}(C)$ - из 29, 31
33. $<s,s> \in \mathbf{T}(C)$ - из 32
34. противоречие 22, 33
35. $<s,s> \in \mathbf{T}((A\to(B\to C)) \to((A\to B) \to(A\to C)))$ - из 1, 34

A3. $A\&B\to A$
+1. $<s,s> \notin \mathbf{T}(A\&B\to A)$
2. $\mathbf{T}(A\&B\to A)=(Id(\mathbf{T}(A\&B)) \bullet\mathbf{T}(A)) \cup Id(\mathbf{F}(A\&B))$
3. $<s,s> \notin Id(\mathbf{T}(A\&B)) \bullet\mathbf{T}(A)$ - из 1,2
4. $<s,s> \notin Id(\mathbf{F}(A\&B))$ - из 1,2
5. $Id(\mathbf{F}(A\&B))= Id(\mathbf{F}(A) \cup\mathbf{F}(B))= Id(\mathbf{F}(A)) \cup Id(\mathbf{F}(B))$
6. $<s,s> \notin Id(\mathbf{F}(A))$ и $<s,s> \notin Id(\mathbf{F}(B))$ - из 4,5
7. $<s,s> \notin \mathbf{F}(A)$ и $<s,s> \notin \mathbf{F}(B)$ - из 6 по *Def 5*
8. $<s,s> \in \mathbf{T}(A)$ и $<s,s> \in \mathbf{T}(B)$ - из 7 по теореме 3
9. $<s,s> \in Id(\mathbf{T}(A))$ и $<s,s> \in Id(\mathbf{T}(B))$ - из 8 по *Def 5*
10. $<s,s> \notin Id(\mathbf{T}(A\&B))$ - из 3, 8
11. $Id(\mathbf{T}(A\&B))= Id((\mathbf{T}(A)\bullet\mathbf{T}(B)\bullet Id(\mathbf{T}(A))) \cup (\mathbf{T}(B)\bullet\mathbf{T}(A)\bullet Id(\mathbf{T}(B))))=$
$Id(\mathbf{T}(A)\bullet\mathbf{T}(B)\bullet Id(\mathbf{T}(A))) \cup Id(\mathbf{T}(B)\bullet\mathbf{T}(A)\bullet Id(\mathbf{T}(B)))$

12. $<s,s>\notin Id(\mathbf{T}(A)\bullet\mathbf{T}(B)\bullet Id(\mathbf{T}(A)))$ - из 10,11
13. $<s,s>\notin\mathbf{T}(A)\bullet\mathbf{T}(B)\bullet Id(\mathbf{T}(A))$ - из 12 по *Def 5*
14. $<s,s>\in\mathbf{T}(A)\bullet\mathbf{T}(B)\bullet Id(\mathbf{T}(A))$ - из 8,9
15. противоречие 13,14
16. $<s,s>\in\mathbf{T}(A\&B\to A)$ - из 1, 15

A4. $A\&B\to B$
Доказательство аналогично предыдущему.

A5. $A\to(B\to A\&B)$
+1. $<s,s>\notin\mathbf{T}(A\to(B\to A\&B))$
2. $\mathbf{T}(A\to(B\to A\&B))=(Id(\mathbf{T}(A))\bullet\mathbf{T}(B\to A\&B))\cup Id(\mathbf{F}(A))$
3. $<s,s>\notin Id(\mathbf{T}(A))\bullet\mathbf{T}(B\to A\&B)$ - из 1, 2
4. $<s,s>\notin Id(\mathbf{F}(A))$ - из 1, 2
5. $<s,s>\notin\mathbf{F}(A)$ - из 4 по *Def 5*
6. $<s,s>\in\mathbf{T}(A)$ - из 5 по теоереме 3
7. $<s,s>\in Id(\mathbf{T}(A))$ - из 6 по *Def 5*
8. $<s,s>\notin\mathbf{T}(B\to A\&B)$ - из 3, 7
9. $\mathbf{T}(B\to A\&B)=(Id(\mathbf{T}(B))\bullet\mathbf{T}(A\&B))\cup Id(\mathbf{F}(B))$
10. $<s,s>\notin Id(\mathbf{T}(B))\bullet\mathbf{T}(A\&B)$ - из 8, 9
11. $<s,s>\notin Id(\mathbf{F}(B))$ - из 8, 9
12. $<s,s>\notin\mathbf{F}(B)$ - из 11 по *Def 5*
13. $<s,s>\in\mathbf{T}(B)$ - из 12 по теореме 3
14. $<s,s>\in Id(\mathbf{T}(B))$ - из 13 по *Def 5*
15. $<s,s>\notin\mathbf{T}(A\&B)$ - из 10, 14
16. $<s,s>\notin((\mathbf{T}(A)\bullet\mathbf{T}(B)\bullet Id(\mathbf{T}(A)))\cup(\mathbf{T}(B)\bullet\mathbf{T}(A)\bullet Id(\mathbf{T}(B))))$ - из 15 по *Def 6*
17. $<s,s>\notin\mathbf{T}(A)\bullet\mathbf{T}(B)\bullet Id(\mathbf{T}(A)$ - из 16
18. $<s,s>\in\mathbf{T}(A)\bullet\mathbf{T}(B)\bullet Id(\mathbf{T}(A)$ - из 6, 13, 7
19. противоречие 17,18
20. $<s,s>\in\mathbf{T}(A\to(B\to A\&B))$ - из 1, 19

A6. $A\to A\vee B$
+1. $<s,s>\notin\mathbf{T}(A\to A\vee B)$
2. $\mathbf{T}(A\to A\vee B)=(Id(\mathbf{T}(A))\bullet\mathbf{T}(A\vee B))\cup Id(\mathbf{F}(A))=$
$(Id(\mathbf{T}(A))\bullet(\mathbf{T}(A)\cup T(B))\cup Id(\mathbf{F}(A))=$
$(Id(\mathbf{T}(A))\bullet\mathbf{T}(A))\cup(Id(\mathbf{T}(A))\bullet T(B))\cup Id(\mathbf{F}(A))$
3. $<s,s>\notin Id(\mathbf{F}(A))$ - из 1, 2
4. $<s,s>\notin\mathbf{F}(A)$ - из 3 по *Def 5*
5. $<s,s>\in\mathbf{T}(A)$ - из 4 по теореме 3
6. $<s,s>\in Id(\mathbf{T}(A))$ - из 5 по *Def 5*
7. $<s,s>\in Id(\mathbf{T}(A))\bullet\mathbf{T}(A)$ - из 5, 6
8. $<s,s>\notin Id(\mathbf{T}(A))\bullet\mathbf{T}(A)$ - из 1, 2
9. противоречие 7, 8
10. $<s,s>\in\mathbf{T}(A\to A\vee B)$ - из 1, 9

A7. $B \to A \vee B$

Доказательство аналогично предыдущему.

A8. $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$

+1. $<s,s> \notin \mathbf{T}((A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C)))$

2. $\mathbf{T}((A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C)))=$
$(Id(\mathbf{T}(A \to C)) \bullet \mathbf{T}((B \to C) \to (A \vee B \to C))) \cup Id(\mathbf{F}(A \to C))$

3. $<s,s> \notin Id(\mathbf{F}(A \to C))$ - из 1,2

4. $<s,s> \notin \mathbf{F}(A \to C)$ - из 3 по *Def 5*

5. $<s,s> \in \mathbf{T}(A \to C)$ - из 4 по теореме 3

6. $<s,s> \in Id(\mathbf{T}(A \to C))$ - из 5 по *Def 5*

7. $<s,s> \notin Id(\mathbf{T}(A \to C)) \bullet \mathbf{T}((B \to C) \to (A \vee B \to C))$ - из 1, 2

8. $<s,s> \notin \mathbf{T}((B \to C) \to (A \vee B \to C))$ - из 6, 7

9. $\mathbf{T}((B \to C) \to (A \vee B \to C))=$
$(Id(\mathbf{T}(B \to C)) \bullet \mathbf{T}(A \vee B \to C)) \cup Id(\mathbf{F}(B \to C))$

10. $<s,s> \notin Id(\mathbf{F}(B \to C))$ - из 8, 9

11. $<s,s> \notin \mathbf{F}(B \to C)$ - из 10 по *Def 5*

12. $<s,s> \in \mathbf{T}(B \to C)$ - из 11 по теореме 3

13. $<s,s> \in Id(\mathbf{T}(B \to C))$ - из 12 по *Def 5*

14. $<s,s> \notin Id(\mathbf{T}(B \to C)) \bullet \mathbf{T}(A \vee B \to C)$ - из 8, 9

15. $<s,s> \notin \mathbf{T}(A \vee B \to C)$ - из 13, 14

16. $\mathbf{T}(A \vee B \to C)=(Id(\mathbf{T}(A \vee B)) \bullet \mathbf{T}(C)) \cup Id(\mathbf{F}(A \vee B))=$
$(Id(\mathbf{T}(A) \cup T(B)) \bullet \mathbf{T}(C)) \cup Id(\mathbf{F}(A \vee B))=$
$(Id(\mathbf{T}(A)) \bullet \mathbf{T}(C)) \cup (Id(\mathbf{T}(B)) \bullet \mathbf{T}(C)) \cup Id(\mathbf{F}(A \vee B))$

17. $<s,s> \notin Id(\mathbf{F}(A \vee B))$ - из 15, 16

18. $<s,s> \notin \mathbf{F}(A \vee B)$ - из 17 по *Def 5*

19. $<s,s> \in \mathbf{T}(A \vee B)$ - из 18 по теореме 3

20. $<s,s> \in \mathbf{T}(A) \cup \mathbf{T}(B)$ - из 19 по *Def 6*

21. $<s,s> \in Id(\mathbf{T}(A)) \cup Id(\mathbf{T}(B))$ - из 20 по *Def 5*

22. $<s,s> \notin Id(\mathbf{T}(A)) \bullet \mathbf{T}(C)$ - из 15, 16

23. $<s,s> \notin Id(\mathbf{T}(B)) \bullet \mathbf{T}(C)$ - из 15, 16

24. $<s,s> \notin \mathbf{T}(C)$ - из 21, 22, 23

25. $<s,s> \in (Id\ (\mathbf{T}(A)) \bullet \mathbf{T}(C)) \cup Id(\mathbf{F}(A))$ - из 5

26. $<s,s> \in Id(\mathbf{F}(A))$ - из 24, 25

27. $<s,s> \in \mathbf{F}(A)$ - из 26 по *Def 5*

28. $<s,s> \notin \mathbf{T}(A)$ - из 27 по теореме 3

29. $<s,s> \in (Id\ (\mathbf{T}(B)) \bullet \mathbf{T}(C)) \cup Id(\mathbf{F}(B))$ - из 12

30. $<s,s> \in Id(\mathbf{F}(B))$ - из 24, 29

31. $<s,s> \in \mathbf{F}(B)$ - из 30 по *Def 5*

32. $<s,s> \notin \mathbf{T}(B)$ - из 31 по теореме 3

33. $<s,s> \notin \mathbf{T}(A) \cup \mathbf{T}(B)$ - из 28, 32

34. противоречие 20, 33

35. $<s,s> \in \mathbf{T}((A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C)))$ - из 1, 34

A9. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$

+1. $<s,s> \notin \mathbf{T}((A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A))$

2. $\mathbf{T}((A\to B) \to((A\to \neg B) \to \neg A))=$
$(Id(\mathbf{T}(A\to B))\bullet\mathbf{T}((A\to \neg B) \to \neg A)) \cup Id(\mathbf{F}(A\to B))$
3. $<s,s>\notin Id(\mathbf{F}(A\to B))$ - из 1, 2
4. $<s,s>\notin\mathbf{F}(A\to B)$ - из 3 по *Def 5*
5. $<s,s>\in\mathbf{T}(A\to B)$ - из 4 по теореме 3
6. $<s,s>\in Id(\mathbf{T}(A\to B))$ - из 5 по *Def 5*
7. $<s,s>\notin\mathbf{T}((A\to \neg B) \to \neg A)$ - из 1, 2, 6
8. $\mathbf{T}((A\to \neg B) \to \neg A)=$
$(Id(\mathbf{T}(A\to \neg B))\bullet\mathbf{T}(\neg A))\cup Id(\mathbf{F}(A\to \neg B))$
9. $<s,s>\notin Id(\mathbf{F}(A\to \neg B))$ - из 7, 8
10. $<s,s>\notin\mathbf{F}(A\to \neg B)$ - из 9 по *Def 5*
11. $<s,s>\in\mathbf{T}(A\to \neg B)$ - из 10 по теореме 3
12. $<s,s>\in Id(\mathbf{T}(A\to \neg B))$ - из 11 по *Def 5*
13. $<s,s>\notin\mathbf{T}(\neg A)$ - из 7, 8, 12
14. $<s,s>\notin\mathbf{F}(A)$ - из 13 по *Def 6*
15. $<s,s>\in\mathbf{T}(A)$ - из 14 по теореме 3
16. $<s,s>\in Id(\mathbf{T}(A))$ - из 15 по *Def 5*
17. $<s,s>\in(Id\ (\mathbf{T}(A))\bullet\mathbf{T}(B)) \cup Id(\mathbf{F}(A))$ - из 5
18. $<s,s>\in(Id\ (\mathbf{T}(A))\bullet\mathbf{T}(\neg B)) \cup Id(\mathbf{F}(A))$ - из 11
19. $<s,s>\notin Id(\mathbf{F}(A))$ - из 14 по *Def 5*
20. $<s,s>\in Id\ (\mathbf{T}(A))\bullet\mathbf{T}(B)$ - из 17, 19
21. $<s,s>\in Id\ (\mathbf{T}(A))\bullet\mathbf{T}(\neg B)$ - из 18, 19
22. $<s,s>\in\mathbf{T}(B)$ - из 16, 20
23. $<s,s>\in\mathbf{T}(\neg B)$ - из 16, 21
24. $<s,s>\in\mathbf{F}(B)$ - из 23 по *Def 6*
25. противоречие 22, 24, теорема 3
26. $<s,s>\in\mathbf{T}((A\to B) \to((A\to \neg B) \to \neg A))$ - из 1, 25

A10. $\neg\neg A\to A$
+1. $<s,s>\notin\mathbf{T}(\neg\neg A\to A)$
2. $\mathbf{T}(\neg\neg A\to A)=(Id(\mathbf{T}(\neg\neg A))\ \bullet\mathbf{T}(A)) \cup Id(\mathbf{F}(\neg\neg A))=$
$(Id(\mathbf{F}(\neg A))\ \bullet\mathbf{T}(A)) \cup Id(\mathbf{T}(\neg A))=\ (Id(\mathbf{T}(A))\ \bullet\mathbf{T}(A)) \cup Id(\mathbf{F}(A))=$
$(Id(\mathbf{T}(A))\ \bullet\mathbf{T}(A)) \cup Id(\mathbf{F}(A))$
3. $<s,s>\notin Id(\mathbf{F}(A))$ - из 1, 2
4. $<s,s>\notin\mathbf{F}(A)$ - из 3 по *Def 5*
5. $<s,s>\in\mathbf{T}(A)$ - из 4 по теореме3
6. $<s,s>\in\ Id(\mathbf{T}(A))$ - из 5 по *Def 5*
7. $<s,s>\in\ Id(\mathbf{T}(A))\ \bullet\mathbf{T}(A)$ - из 5, 6
8. $<s,s>\notin Id(\mathbf{T}(A))\ \bullet\mathbf{T}(A)$ - из 1, 2
9. противоречие 7, 8
10. $<s,s>\in\mathbf{T}(\neg\neg A\to A)$ - из 1, 9

Теорема доказана.

Теорема 5. Всякая формула, общезначимая в построенной семантике, доказуема в классической логике высказываний.

Подробного доказательства мы приводить не будем, дадим лишь набросок. Допустим, что формула A общезначима в построенной семантике, но недоказуема в классической логике. Добавим ее в качестве схемы аксиом к аксиомам классической логики. Известно, что в этом случае мы можем вывести в классической логике противоречие B&¬B. По теореме 4 и допущению об общезначимости формулы A все аксиомы общезначимы, а единственное правило вывода сохраняет общезначимость. Тогда должна быть общезначимой и формула B&¬B. Это противоречит теореме 3. Следовательно, всякая формула, общезначимая в построенной семантике, доказуема в классической логике.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шалак В.И.* Динамическая интерпретация высказываний. // Тезисы X Всесоюзной конференции по логике, методологии и философии науки. Минск, 1990b. С. 129-130.

2. *Шалак В.И.* Динамическая интерпретация высказываний. // Логические исследования. Вып.2. М., 1993 С. 68-81.

3. *Шалак В.И.* Теория пропозициональных программ. // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН, 1998 С. 41-47.

4. *Шалак В.И.* Теория пропозициональных программ II. // Логические исследования. Вып.5. М., 1998 С. 163-172.