**Шалак В.И. «О понятии доказательства» //
Логические исследования. Вып.14. М.: Наука, 2007**

Шалак В.И.

О понятии доказательства

Современная логика в своем развитии достигла таких заоблачных высей, что может возникнуть иллюзия, будто ее основные понятия изучены досконально, и ничего интересного обнаружить в них уже невозможно. Покажем, что это не так.

Пусть нам дана аксиоматическая формулировка классической логики высказываний со схемами аксиом и единственным правилом вывода – modus ponens.

Стандартное определение доказательства выглядит следующим образом:

Def.1 *Доказательством формулы A называется непустая конечная последовательность формул <A_1, ...,A_n>, каждая из которых есть либо аксиома, либо получена из предшествующих формул последовательности по правилу modus ponens, и последняя формула этой последовательности A_n есть A.*

Изучающим логику обычно сообщают, что мы получим тот же класс доказуемых формул, если слегка изменим определение доказательства:

Def.2 *Доказательством формулы A называется непустая конечная последовательность формул <A_1, ...,A_n>, каждая из которых есть либо аксиома, либо ранее доказанная теорема, либо получена из предшествующих формул последовательности по правилу modus ponens, и последняя формула этой последовательности A_n есть A.*

Очевидно, что всякое доказательство, удовлетворяющее Def.2, можно легко преобразовать в доказательство, удовлетворяющее Def.1. В то же время Def.1 является частным случаем Def.2. Удобство использования второго определения объясняется тем, что не нужно каждый раз заново доказывать ранее полученные теоремы, а можно просто включать их в новое доказательство, что позволяет значительно сократить его длину. Этим постоянно пользуются в своей практике не только профессиональные логики, но и многие другие люди, занимающиеся математикой и другими науками.

Можно сказать, что последовательность формул, удовлетворяющая определению Def.1, обладает вневременным существованием. Даже если мы захотим рассматривать пошаговый процесс ее построения, то время, производное от этого построения, будет внутренним временем последовательности. Следствием этого является то, что класс доказуемых формул обладает вневременным существованием, т.е. дан нам актуально. В этом случае естественным является определение теории по Тарскому как дедуктивно замкнутого множества формул.

Иначе обстоит дело с определением Def.2, в котором фигурирует выражение *ранее доказанная теорема*, являющееся ссылкой на содержимое памяти логического субъекта. Память всегда бывает о чем-то, что было в прошлом. Это означает, что в Def.2 неявным образом присутствует понятие времени. Всякое доказательство в соответствии с Def.2, в котором используется ссылка на ранее доказанные теоремы, является правильным лишь относительно результатов предыдущей деятельности, а не безотносительно ее, как это имеет место в случае Def.1. В этом случае класс теорем дан нам лишь потенциально.

Будем отождествлять состояния памяти со всевозможными подмножествами множества формул Frm.

Def.3 $\mathrm{Mem} = 2^{\mathrm{Frm}}$

Переформулируем Def.2, сделав неявное явным.

Def.4 *Доказательством формулы A при состоянии памяти $M \in Mem$ называется такая непустая конечная последовательность формул $<A_1, \ldots, A_n>$, что для всякого $1 \leq i \leq n$ либо A_i есть аксиома, либо $A_i \in M$, либо A_i получена из предшествующих формул последовательности по правилу modus ponens, последняя формула этой последовательности A_n есть A и новым состоянием памяти является $M' = M \cup \{A_n\}$.*

Поскольку понятие доказательства связано с переходом от одних состояний памяти к другим, оно задает бинарное отношение $\mathrm{Proof} \subseteq \mathrm{Mem} \times \mathrm{Mem}$, которое можно определить следующим образом:

Def.5 *$<M_1, M_2> \in Proof$, если и только если существует такое доказательство $<A_1, \ldots, A_n>$ при состоянии памяти M_1, что $M_2 = M_1 \cup \{A_n\}$.*

Отношение Proof представляет простую модель для дискретной временной логики. Возможными мирами в этой модели являются состояния памяти логического субъекта, который занимается построением доказательств. Естественным было бы принять дополнительное ограничение на эти состояния, допустив, что они конечны, и существовал такой начальный момент времени, когда память была пуста. В этом случае временной порядок конечен в прошлое и бесконечен в будущее. Начальный момент времени соответствует такому состоянию логического субъекта, когда им еще не была доказана ни одна теорема.

Таким образом, в случае Def.4 используемый нами метаязык базируется на временной логике. В этом метаязыке определение теории по Тарскому уже не выглядит естественным. Лишь Богу доступны все возможные следствия аксиом, но не конкретному логическому субъекту, для которого они существуют лишь потенциально. Поэтому при соответствующем расширении Def.4 теорию можно определить как множество нелогических аксиом и правил вывода, а состояния знания логического субъекта отождествлять с состояниями памяти. Такое понимание теории лучше согласуется с научной практикой и в то же время доступно для анализа строгими логическими методами.

Полезным следствием нового понимания теории является то, что возможная противоречивость аксиом уже не несет такой угрозы, как в случае теории по Тарскому. Появление противоречий в реальной научной практике является не столь уж и редким событием, но пока что ни разу не приводило к краху нашей системы знания. Когда они обнаруживались, это приводило к пересмотру теорий при сохранении их позитивного содержания. В качестве примера можно привести обнаружение противоречий в наивной теории множеств Кантора, и их разрешение в теории множеств Цермело-Френкеля за счет принятия ограничений на образование множеств. Т.е. в реальной научной практике выработаны механизмы поддержания непротиворечивости знания. Такие механизмы можно включить в определение понятия доказательства.

Def.6 *Доказательством формулы A при состоянии памяти $M \in Mem$ называется такая непустая конечная последовательность формул $<A_1, \ldots, A_n>$ что для всякого $1 \leq i \leq n$ либо A_i есть аксиома, либо $A_i \in M$, либо A_i получена из предшествующих формул последовательности по правилу modus ponens. Если $A_n = B \& \neg B$, то новым состоянием памяти является $M' = (M \setminus \{A_{j1}, .., A_{jk}\}) \cup \{\neg A_{j1} \vee \ldots \vee \neg A_{jk}\}$, где $A_{j1}, .., A_{jk}$ список всех входящих в последовательность формул памяти M, и $A = \neg A_{j1} \vee \ldots \vee \neg A_{jk}$; в противном случае $A = A_n$ и новое состояние памяти есть $M' = M \cup \{A_n\}$.*

Смысл данного определения очевиден. Всякий раз, когда мы получаем противоречие, мы удаляем из памяти те формулы, которые были использованы в доказательстве, и вместо этого добавляем в память дизъюнкцию их отрицаний. Принятие определения Def.6 означает переход к использованию метаязыка на основе динамической логики, операторы которой могут быть представлены конечными последовательностями формул. Мы не станем подробно развивать эту тему, а лишь укажем на ее очевидную связь с адаптивными логиками Д. Батенса [1-6].

Осознанное использование метаязыка на базе временной или динамической логики позволяет по-новому подойти к решению многих известных задач, среди которых - парадоксы всеведения в эпистемической логике, методы построения паранепротиворечивых и немонотонных логик, построение логики индукции.

Литература

1. Batens D. ‘Dynamic Semantics Applied to Inconsistency-Adaptive Logics’ // Логические исследования. Вып.5. – М.: Наука, 1998.
2. Batens D. ‘A Universally Abnormality-Adaptive Logic’ // Логические исследования. Вып.8. – М.: Наука, 2001.
3. Batens D. ‘Towards the Unification of Inconsistency Handling Mechanisms’. Logic and Logical Philosophy, 2000. Appeared 2003.
4. Batens D. ‘A General Characterisation of Adaptive Logics’, Logique et Analyse, 2001. Appeared 2003.
5. Batens D. ‘The Need for Adaptive Logics in Epistemology’, *in* D. Gabbay, S. Raham, J. Symons & J.P.V. Bendegem, eds, ‘Logic, Epistemology and the Unity of Science’. Dordreht, Kluwer, 2004.
6. Batens D., Haesaert L. ‘On Classical Adaptive Logics of Induction’, Logique et Analyse, 2001. Appeared 2003.

26.06.2007