Shalack V.I. On First-order Theories Which Can Be Represented by Definitions. // Logical Investigations. 2016. № 22 (1). С. 125–135.

(Расширенный русский перевод. В отличие от англоязычной версии в переводе приведено более подробное доказательство ключевых пунктов теоремы о вложении)

О теориях первого порядка, которые могут быть представлены посредством определений

Шалак Владимир Иванович
109240 Россия, Москва, ул.Гончарная 12/1
Институт философии РАН, сектор логики
E-mail: shalack@gmail.com

Абстракт: В статье мы рассматриваем проблему классического логицизма, ограниченную логикой первого порядка. Основным результатом является теорема о необходимых и достаточных условиях редукции математических теорий к логике. Те и только те теории, которые не налагают никаких ограничений на мощность предметной области, могут быть редуцированы к чистой логике. К числу таких теорий принадлежат элементарная теория групп, теорий комбинаторов (комбинаторная логика), элементарная теория топосов и многие другие. Интересно отметить, что начальная постановка проблемы редукции математики к логике принципиально неразрешима. Как мы знаем, теоремы логики истинны во всех моделях с любым числом элементов предметной области. В то же время многие математические теории налагают ограничения на размер универсума. Например, все модели арифметики содержат бесконечное число элементов. Если бы арифметика могла быть редуцирована к логике, среди ее моделей были бы и одноэлементные. Но это невозможно в силу аксиомы $0 \neq x'$.

Ключевые слова: определение, вложение исчисление предикатов, теория, логицизм

1. **Логицизм**

Основная идея логицизма заключалась в том, что математика является расширением логики и может быть редуцирована к ней посредством определений. Одно из уточнений задачи программы логицизма может выглядеть следующим образом.

> *Если дана некоторая математическая теория T, которая задается множеством постулатов Ax, требуется найти такое множество логических определений DF дескриптивных терминов теории T, чтобы для всякой формулы $B \in L_T$ имело место:*

$$Ax \mid\!- B \Leftrightarrow DF \mid\!- B.$$

Как мы знаем, попытка реализовать программу логицизма успехом не увенчалась. Потребовалась логика высших порядков и принятие далеких от интуитивной очевидности аксиом *сводимости, мультипликативности (выбора) и бесконечности*, которые трудно назвать логическими. Это и было основным упреком в адрес логицизма. Интересно попытаться найти ответ на следующий вопрос:

До каких пределов программа логицизма реализуема в логике предикатов первого порядка?

2. Определение новых предикатных символов

Будем считать, что язык логики предикатов первого порядка задан стандартным образом как множество термов и формул над сигнатурой Σ, которая состоит из функциональных и предикатных символов. Мы будем использовать запись $L(\Sigma)$ для языка первого порядка над сигнатурой Σ. Моделями будем называть пары $M = \langle D,I \rangle$, где D – непустое множество индивидов, а I – функция интерпретации функциональных и предикатных символов в D. Отношение "*формула A истинна в модели M для приписывания значений индивидным переменным g*" and "*формула A истинна в водели M*" определяются обычным образом и обозначаются как $M,g \models A$ и $M \models A$.

Теория первого порядка в языке $L(\Sigma)$ – это множество логических аксиом и нелогических постулатов, замкнутое относительно выводимости. *Логика (исчисление) предикатов* первого порядка – это теория первого порядка с пустым множеством нелогических постулатов.

Аксиомы равенства мы будем рассматривать как нелогические постулаты. Язык первого порядка может быть расширен с помощью определений новых предикатных символов, которые имеют следующий вид:

$$\forall x_1..x_n(P(x_1,..,x_n) \equiv A)$$

Определения должны удовлетворять условиям:

1. $P \notin \Sigma$.
2. $A \in L(\Sigma)$.
3. Если $i \neq j$, то $x_i \neq x_j$.
4. Множество свободных переменных формулы A включено в $\{x_1,..,x_n\}$.

После введения нового предикатного символа P он добавляется к сигнатуре Σ и происходит соответствующее расширение языка, т.е. происходит переход от сигнатуры Σ к сигнатуре $\Sigma \cup \{P\}$ и от языка $L(\Sigma)$ к языку $L(\Sigma \cup \{P\})$.

В логике предикатов первого порядка мы можем взять произвольный одноместный предикатный символ *P* и следующим образом определить универсальный n-местный предикат U^n:

(DU) $$\forall x_1..x_n(U^n x_1,..,x_n \equiv Px_1 \vee \neg Px_1)$$

Приняв это определение, можно доказать, что DU $\vdash \forall x_1..x_n U x_1,..,x_n$

В качестве другого примера можно привести определение симметричного отношения. Пусть B – произвольный двухместный предикатный символ сигнатуры логики предикатов первого порядка.

Примем следующее определение:

(DS_1) $$\forall xy(S_1xy \equiv \forall uv(Buv \supset Bvu) \supset Bxy)$$

Покажем, что $DS_1 \vdash \forall xy(S_1xy \supset S_1yx)$.

1. S_1xy - hyp

2. $\forall uv(Buv \supset Bvu) \supset Bxy$ - из 1 по теореме о замене DS_1
3. $\forall uv(Buv \supset Bvu)$ - hyp
4. Bxy - из 2, 3 по m.p.
5. $Bxy \supset Byx$ - из 3 по $\forall_{el}$
6. Byx - из 4, 5 по m.p.
7. $\forall uv(Buv \supset Bvu) \supset Byx$ - из 3-6 по $\supset_{in}$
8. S_1yx - из 7 по теореме о замене DS_1
9. $S_1xy \supset S_1yx$ - из 1-8 по $\supset_{in}$

Есть другой способ определить симметричное отношение.

(DS$_2$) $$\forall xy(S_2xy \equiv \forall uv(Buv \supset Bvu) \,\&\, Bxy)$$

Покажем, что DS_2 |- $\forall xy(S_2xy \supset S_2yx)$.

1. S_2xy - hyp
2. $\forall uv(Buv \supset Bvu) \,\&\, Bxy$ - из 1 по теореме о замене DS_2
3. $\forall uv(Buv \supset Bvu)$ - из 2 по $\&_{el}$
4. Bxy - из 2 по $\&_{el}$
5. $Bxy \supset Byx$ - из 3 по $\forall_{el}$
6. Byx - из 4, 5 по m.p.
7. $\forall uv(Buv \supset Bvu) \,\&\, Byx$ - из 3, 6 по $\&_{in}$
8. S_2yx - из 7 по теореме о замене DS_2
9. $S_2xy \supset S_2yx$ - из 1-8 по $\supset_{in}$

Эти примеры подталкивают к поиску общих критериев определимости отношений в логике предикатов первого порядка.

Определение 1. Теория первого порядка T в языке L(Σ) с конечным множеством нелогических аксиом Ax *дефинициально вложима* в логику предикатов, если и только если существует такая сигнатура Σ' и такое множество определений DT символов $\Sigma \backslash \Sigma$' посредством формул L(Σ'), что выполняется следующее условие:

Если $B \in L(\Sigma)$, то Ax |- B $\Leftrightarrow$ DT |- B.

Это определение является некоторым вариантом понятия дефинициальной вложимости теорий, предложенного В.А.Смирновым в [2], [3, p. 65].

3. Дополнительные леммы

Для формулировки основной теоремы нам понадобится функция π, которая переводит формулы языка логики предикатов в формулы логики высказываний, пропозициональными переменными которой являются предикатные символы сигнатуры Σ без учета их местности.

Определение 2.

1. $\pi(P(t_1,..,t_n)) = P$;
2. $\pi(\neg A) = \neg\pi(A)$;
3. $\pi(A \nabla B) = \pi(A)\nabla\pi(B)$, где $\nabla \in \{\&, \vee, \supset, \equiv\}$;

4. $\pi(\Sigma x A) = \pi(A)$, где $\Sigma \in \{\forall, \exists\}$.

Лемма 1. Пусть ν – некоторое приписывание значений пропозициональным переменным, которое стандартным образом распространяется на все формулы логики высказываний.

> Если для каждой атомарной подформулы $P_i(\mathbf{t})$ формулы A имеет место $\underline{\forall} g[M, g \models P_i(\mathbf{t}) \Leftrightarrow \nu(\pi(P_i(\mathbf{t})))=True]$, то имеет место $M \models A \Leftrightarrow \nu(\pi(A))=True$, где $\underline{\forall}$ является метаязыковым обозначением универсального квантора

Доказательство.

Так как из $\underline{\forall} g[M, g \models A \Leftrightarrow \nu(\pi(A))=True]$ логически следует $M \models A \Leftrightarrow \nu(\pi(A))=True$, то нам достаточно доказать, что если для каждой атомарной подформулы $P_i(\mathbf{t})$ формулы A имеет место $\underline{\forall} g[M, g \models P_i(\mathbf{t}) \Leftrightarrow \nu(\pi(P_i(\mathbf{t})))=True]$, то имеет место $\underline{\forall} g[M, g \models A \Leftrightarrow \nu(\pi(A))=True]$. Доказательство проводим индукцией по структуре формулы A.

Базис индукции

Если A – атомарная формула $P_i(\mathbf{t})$, то по условию леммы имеет место $\underline{\forall} g[M, g \models P_i(\mathbf{t}) \Leftrightarrow \nu(\pi(P_i(\mathbf{t})))=True]$.

Индукционный шаг

I. $A = \neg B$

+1. $\underline{\forall} h[M, h \models B \Leftrightarrow \nu(\pi(B))=True]$	- инд. доп.
+2. $M, g \models \neg B$	- доп.
3. $M, g \not\models B$	- из 2
4. $M, g \models B \Leftrightarrow \nu(\pi(B))=True$	- из 1
5. $\nu(\pi(B)) = False$	- из 3, 4 и определения ν
6. $\nu(\neg\pi(B))=True$	- из 5 по определению ν
7. $\nu(\pi(\neg B))=True$	- из 6 по определению π
8. $M, g \models \neg B \Rightarrow \nu(\pi(\neg B))=True$	- из 2-7

+1. $\underline{\forall} h[M, h \models B \Leftrightarrow \nu(\pi(B))=True]$	- инд. доп.
+2. $\nu(\pi(\neg B))=True$	- доп.
3. $\nu(\neg\pi(B))=True$	- из 2 по определению π
4. $\nu(\pi(B))=False$	- из 3 по определению ν
5. $M, g \models B \Leftrightarrow \nu(\pi(B))=True$	- из 1
6. $M, g \not\models B$	- из 4, 5
7. $M, g \models \neg B$	- из 6
8. $\nu(\pi(\neg B))=True \Rightarrow M, g \models \neg B$	- из 2-7

II. $A = B\&C$

+1. $\underline{\forall} h[M, h \models B \Leftrightarrow \nu(\pi(B))=True]$	- инд. доп.
+2. $\underline{\forall} h[M, h \models C \Leftrightarrow \nu(\pi(C))=True]$	- инд. доп.
+3. $M, g \models B\&C$	- доп.
4. $M, g \models B$	- из 3

│ 5. $M, g \models C$ - из 3
│ 6. $M, g \models B \Leftrightarrow \nu(\pi(B))=True$ - из 1
│ 7. $M, g \models C \Leftrightarrow \nu(\pi(C))=True$ - из 2
│ 8. $\nu(\pi(B))=True$ - из 4, 6
│ 9. $\nu(\pi(C))=True$ - из 5, 7
│ 10. $\nu(\pi(B)\&\pi(C))=True$ - из 8, 9 по определению ν
⌊11. $\nu(\pi(B\&C))=True$ - из 10 по определению π
12. $M, g \models B\&C \Rightarrow \nu(\pi(B\&C))=True$ - из 3-11

+1. $\underline{\forall} h[M, h \models B \Leftrightarrow \nu(\pi(B))=True]$ - инд. доп.
+2. $\underline{\forall} h[M, h \models C \Leftrightarrow \nu(\pi(C))=True]$ - инд. доп.
⌈+3. $\nu(\pi(B\&C))=True$ - доп.
│ 4. $\nu(\pi(B)\&\pi(C))=True$ - из 3 по определению π
│ 5. $\nu(\pi(B))=True$ - из 4 по определению ν
│ 6. $\nu(\pi(C))=True$ - из 4 по определению ν
│ 7. $M, g \models B \Leftrightarrow \nu(\pi(B))=True$ - из 1
│ 8. $M, g \models C \Leftrightarrow \nu(\pi(C))=True$ - из 2
│ 9. $M, g \models B$ - из 5, 7
│ 10. $M, g \models C$ - из 6, 8
⌊11. $M, g \models B\&C$ - из 9, 10
12. $\nu(\pi(B\&C))=True \Rightarrow M, g \models B\&C$ - из 3-11

III. $A = \forall xB$

+1. $\underline{\forall} h[M, h \models B \Leftrightarrow \nu(\pi(B))=True]$ - инд. доп.
⌈+2. $M, g \models \forall xB$ - доп.
│ 3. $M, g' \models B$ - из 2 для произвольного $g' \approx_x g$
│ 4. $M, g' \models B \Leftrightarrow \nu(\pi(B))=True$ - из 1
│ 5. $\nu(\pi(B))=True$ - из 3, 4
⌊6. $\nu(\pi(\forall xB))=True$ - из 5 по определению π
7. $M, g \models \forall xB \Rightarrow \nu(\pi(\forall xB))=True$ - из 2-6

+1. $\underline{\forall} h[M, h \models B \Leftrightarrow \nu(\pi(B))=True]$ - инд. доп.
⌈+2. $\nu(\pi(\forall xB))=True$ - доп.
│ 3. $\nu(\pi(B))=True$ - из 1 по определению π
│⌈+4. $M, g \not\models \forall xB$
││ 5. $M, g' \not\models B$ - из 4 для некоторого $g' \approx_x g$
││ 6. $M, g' \models B \Leftrightarrow \nu(\pi(B))=True$ - из 2
││ 7. $M, g' \models B$ - из 3, 6
│⌊8. противоречие - 5, 7
⌊9. $M, g \models \forall xB$ - из 4, 8
10. $\nu(\pi(\forall xB))=True \Rightarrow M, g \models \forall xB$ - из 2-8

Остальные логические связки и квантор существования выразимы через $\{\neg, \&, \forall\}$.

Лемма доказана.

Если Ax – множество формул, то посредством $\pi(Ax)$ мы будем обозначать множество формул $\{\pi(A)| A\in Ax\}$.

Лемма 2. Пусть T – теория в языке $L(\Sigma)$ с множеством аксиом Ax.

Множество формул $\pi(Ax)$ непротиворечиво, если и только если для всякого множества D существует такая функция интерпретации I, что M=<D, I> и M |= Ax.

Доказательство

($\Leftarrow$) Доказательство тривиально в силу определения непротиворечивости.

($\Rightarrow$) Допустим, $\pi(Ax)$ - непротиворечиво. Отсюда следует, что существует такое приписывание ν истинностных значений пропозициональным переменным, при котором все формулы $\pi(Ax)$ истинны.

Пусть D – произвольно непустое множество. Определим функцию интерпретации I дескриптивных терминов сигнатуры Σ в множестве D. Выберем в множестве D некоторый элемент e.

Если c – индивидная константа, то I(c)=e.

Если f – n-местный функциональный символ, то $I(f):D\times...^{n}\times D\rightarrow\{e\}$.

Если P_i – n-местный предикатный символ, то

$$I(P_i) = \begin{cases} D\times..^{n}\times D, \text{ если } \nu(\pi(P_i))=True \\ \varnothing, \text{ если } \nu(\pi(P_i))=False. \end{cases}$$

Пусть M=<D, I>. Покажем, что M |= Ax.

Согласно построенной модели, $\forall g[M, g \models P_i(\mathbf{t}) \Leftrightarrow \nu(\pi(P_i))]$. Из Леммы 1 получаем $M \models A \Leftrightarrow \nu(\pi(A))$. Поскольку для всех $A\in Ax$ имеет место $\nu(\pi(A))=True$, то M |= Ax.

Лемма доказана

4. Основная теорема

Следующая теорема является усилением теоремы, опубликованной в [1].

Теорема о дефинициальном вложении. Пусть T – конечно аксиоматизируемая теория первого порядка в языке $L(\Sigma)$ с множеством замкнутых нелогических аксиом $Ax = \{A_1,..,A_k\}$.

A. Теория T дефинициально вложима в логику предикатов первого порядка, если и только если множество формул $\{\pi(A_1),..,\pi(A_k)\}$ логически непротиворечиво.

B. Теория T дефинициально вложима в логику предикатов первого порядка, если и только если она не налагает никаких ограничений на мощность ее моделей.

Доказательство

A. ($\Leftarrow$) Докажем, что если множество формул $\{\pi(A_1),..,\pi(A_k)\}$ логически непротиворечиво, то теория T дефинициально вложима в логику предикатов первого порядка.

Пусть $\{P_1,..,P_m\}$ – множество всех предикатных символов сигнатуры Σ, входящих в нелогические аксиомы $\{A_1,..,A_k\}$.

Логическая непротиворечивость множества формул $\{\pi(A_1),..,\pi(A_k)\}$ означает, что существует хотя бы одно приписывание v истинностных значений пропозициональным переменным $\{\pi(P_1),..,\pi(P_m)\}$, при котором все формулы $\{\pi(A_1),..,\pi(A_k)\}$ истинны. Зафиксируем такое приписывание v.

Возьмем сигнатуру Σ', удовлетворяющую условиям:

- $\Sigma\backslash\Sigma' = \{P_1,..,P_m\}$.
- Для каждого r-местного предикатного символа $P_i\in\{P_1,..,P_m\}$ существует отличный от других r-местный предикатный символ $R_i\in\Sigma'$.

Пусть A – конъюнкция всех нелогических аксиом $A_1,..,A_k$, а $A[R/P]$ - результат переименования в формуле A всех вхождений предикатных символов $P_1,..,P_m$ в $R_1,..,R_m$.

Каждому предикатному символу $P_i\in\{P_1,..,P_m\}$ сопоставим определение по следующему правилу:

1) Если $v(\pi(P_i(\mathbf{t}))) = v(P_i) = True$, то

$$\forall\mathbf{x}(P_i(\mathbf{x}) \equiv A[R/P] \supset R_i(\mathbf{x})).$$

2) Если $v(\pi(P_i(\mathbf{t}))) = v(P_i) = False$, то

$$\forall\mathbf{x}(P_i(\mathbf{x}) \equiv A[R/P]\&R_i(\mathbf{x})).$$

Пусть $DF = \{D_1,..,D_m\}$ – множество всех принятых нами определений.

A.1. Покажем, что если $B\in L(\Sigma)$ и $Ax \mid\!- B$, то $DF \mid\!- B$. В силу свойств отношения выводимости нам достаточно показать, что имеет место $DF \mid\!- A$, где A – конъюнкция всех аксиом. Воспользуемся теоремой о полноте логики предикатов первого порядка и покажем, что $DF \models A$.

Пусть $M = \langle D, I\rangle$ – произвольная модель, в которой истинны все формулы DF, а g – произвольное приписывание значений индивидным переменным.

Поскольку формула $A[R/P]$ замкнута, то имеет место либо $M \models A[R/P]$, либо $M \models \neg A[R/P]$.

Случай 1. $M \models A[R/P]$.

+1. $M \models A[R/P]$
⌈+2. $v(\pi(P_i(\mathbf{t}))) = True$ - $P_i\in\{P_1,..,P_m\}$
| 3. $M \models \forall\mathbf{x}(P_i(\mathbf{x}) \equiv A[R/P] \supset R_i(\mathbf{x}))$ - из 2, определение P_i
|⌈+4. $M, g \models P_i(\mathbf{t})$
|| 5. $M, g \models A[R/P] \supset R_i(\mathbf{t})$ - из 3, 4
|⌊6. $M, g \models R_i(\mathbf{t})$ - из 1, 5
| 7. $M, g \models P_i(\mathbf{t}) \Rightarrow M, g \models R_i(\mathbf{t})$ - из 4-6
|⌈+8. $M, g \models R_i(\mathbf{t})$
|| 9. $M, g \models A[R/P] \supset R_i(\mathbf{t})$ - из 8
|⌊10. $M, g \models P_i(\mathbf{t})$ - из 3, 9
| 11. $M, g \models R_i(\mathbf{t}) \Rightarrow M, g \models P_i(\mathbf{t})$ - из 8-10
⌊12. $M, g \models P_i(\mathbf{t}) \Leftrightarrow M, g \models R_i(\mathbf{t})$ - из 7, 11
⌈+13. $v(\pi(P_i(\mathbf{t}))) = False$ - $P_i\in\{P_1,..,P_m\}$
| 14. $M \models \forall\mathbf{x}(P_i(\mathbf{x}) \equiv A[R/P]\&R_i(\mathbf{x}))$ - из 13, определение P_i

+15. $M, g \models P_i(\mathbf{t})$	
16. $M, g \models A[R/P]\&R_i(\mathbf{t})$	- из 14, 15
17. $M, g \models R_i(\mathbf{t})$	- из 16
18. $M, g \models P_i(\mathbf{t}) \Rightarrow M, g \models R_i(\mathbf{t})$	- из 15-17
+19. $M, g \models R_i(\mathbf{t})$	
20. $M, g \models A[R/P]\&R_i(\mathbf{t})$	- из 1, 19
21. $M, g \models P_i(\mathbf{t})$	- из 14, 20
22. $M, g \models R_i(\mathbf{t}) \Rightarrow M, g \models P_i(\mathbf{t})$	- из 19-21
23. $M, g \models P_i(\mathbf{t}) \Leftrightarrow M, g \models R_i(\mathbf{t})$	- из 18, 22
24. $M, g \models P_i(\mathbf{t}) \Leftrightarrow M, g \models R_i(\mathbf{t})$	- из 2-12, 13-23
25. $\underline{\forall} g[M, g \models P_i(\mathbf{t}) \Leftrightarrow M, g \models R_i(\mathbf{t})]$	- из 24
26. $M \models A$	- из 1, 25

Случай 2. $M \models \neg A[R/P]$.

+1. $M \models \neg A[R/P]$	
+2. $v(\pi(P_i(\mathbf{t}))) = True$	- $P_i \in \{P_1,..,P_m\}$
3. $M \models \forall \mathbf{x}(P_i(\mathbf{x}) \equiv A[R/P] \supset R_i(\mathbf{x}))$	- из 2, определение P_i
4. $M, g \models A[R/P]\&R_i(\mathbf{t}) \vee \neg A[R/P]$	- из 1
5. $M, g \models A[R/P] \supset A[R/P]\&R_i(\mathbf{t})$	- из 4
6. $M, g \models A[R/P] \supset R_i(\mathbf{t})$	- из 5
7. $M, g \models P_i(\mathbf{t})$	- из 3, 6
8. $v(\pi(P_i(\mathbf{t}))) = True \Rightarrow M, g \models P_i(\mathbf{t})$	- из 2-7
+9. $v(\pi(P_i(\mathbf{t}))) = False$	- $P_i \in \{P_1,..,P_m\}$
10. $M \models \forall \mathbf{x}(P_i(\mathbf{x}) \equiv A[R/P]\&R_i(\mathbf{x}))$	- 9, определение P_i
11. $M, g \models \neg A[R/P] \vee \neg R_i(\mathbf{t})$	- из 1
12. $M, g \models \neg(A[R/P]\&R_i(\mathbf{t}))$	- из 11
13. $M, g \not\models P_i(\mathbf{t})$	- из 10, 12
14. $v(\pi(P_i(\mathbf{t}))) = False \Rightarrow M, g \not\models P_i(\mathbf{t})$	- из 9-13
15. $M, g \models P_i(\mathbf{t}) \Rightarrow v(\pi(P_i(\mathbf{t}))) = True$	- из 14
16. $M, g \models P_i(\mathbf{t}) \Leftrightarrow v(\pi(P_i(\mathbf{t}))) = True$	- из 8, 15
17. $\underline{\forall} g[M, g \models P_i(\mathbf{t}) \Leftrightarrow v(\pi(P_i(\mathbf{t})))=True]$	- из 16
18. $M \models A \Leftrightarrow v(\pi(A))=True$	- из 17 по Лемме 1
19. A есть сокращение для $A_1\&..\&A_n$	- по условию
20. $v(\pi(A_1)) = True,.., v(\pi(A_k)) = True$	- по выбору v
21. $v(\pi(A)) = True$	- из 19, 20
22. $M \models A$	- из 18, 21

В каждом из двух возможных случаев мы получили $M \models A$. Следовательно, $M \models A$. Так как M – произвольная модель, то $\underline{\forall} M(M \models DF \Rightarrow M \models A)$ и, следовательно, $DF \models A$. Отсюда на основании теоремы о полноте логики предикатов получаем $DF \vdash A$.

A.2. Покажем, что если $B \in L(\Sigma)$ и $DF \vdash B$, то $Ax \vdash B$. По теореме о полноте логики предикатов первого порядка это эквивалентно утверждению, что если $DF \models B$, то $Ax \models B$.

Допустим, $DF \models B$, но неверно, что $Ax \models B$. Тогда существует такая модель $M = \langle D, I\rangle$ теории T, что $M \models A$ и $M \not\models B$.

Расширим модель $M = <D, I>$ до модели $M' = <D, I'>$, в которой будут истинны все формулы DF. Для этого достаточно расширить область определения функции I таким образом, чтобы новая функция I' сопоставляла предикатному символу R_i значение $I'(R_i) = I(P_i)$, а для всех остальных дескриптивных символов сохраняла те же значения, что и I.

Поскольку $M \models A$, то в модели $M' = <D, I'>$ по определению I' будет иметь место $M' \models A[R/P]$ и, следовательно, $M' \models P_i(\boldsymbol{x}) \equiv A[R/P] \& R_i(\boldsymbol{x})$ для каждого R_i. Отсюда следует, что все формулы DF будут истинны в модели M'. Поэтому по исходному допущению $DF \models B$ будет иметь место и $M' \models B$. Но формула B не содержит символов $R_1,..,R_m$, а все другие дескриптивные символы интерпретируются так же, как в модели M, и, согласно другому нашему допущению, должно быть $M' \not\models B$. Мы получили противоречие. Поэтому допущение о том, что следование $Ax \models B$ не имеет места, неверно.

A. ($\Rightarrow$) Докажем, что если теория T дефинициально вложима в логике предикатов первого порядка, то множество формул $\{\pi(A_1),..,\pi(A_k)\}$ логически непротиворечиво.

Допустим, что для некоторого множества определений DT, т.е. имеет место $Ax \vdash B \Leftrightarrow DT \vdash B$.

Возьмем произвольную одноэлементную модель $M = <\{a\}, I>$ сигнатуры Σ' логики предикатов. Расширим сигнатуру Σ' предикатными символами $\Sigma \backslash \Sigma'$ и следующим образом расширим область определения функции интерпретации I.

Для каждого предикатного символа $P_i \in \Sigma \backslash \Sigma'$, если он был введен посредством определения $P_i(x_1,\ldots,x_n) \equiv B$, то расширим область определения функции интерпретации I следующим образом:

$$I'(P_i) = \{<g(x_1),\ldots,g(x_n)>: M,g \models B\}$$

Заметим, что поскольку область индивидов состоит всего из одного элемента, то и функция g приписывания значений индивидным переменным тоже всего одна, и, следовательно, предикатный символ P_i будет интерпретироваться либо пустым множеством $\varnothing$, либо одноэлементным множеством $\{<a,\ldots,a>\}$.

Проделав эту операцию со всеми новыми предикатными символами, мы получим модель $M'=<\{a\}, I'>$ сигнатуры $\Sigma \cup \Sigma'$, в которой будут истинны все определения множества DT.

Поскольку мы допустили, что $Ax \vdash B \Leftrightarrow DT \vdash B$, то всякая аксиома $A_i \in \{A_1,..,A_k\}$ выводима из DT. По теореме о полноте логики предикатов получаем $DT \models A_i$. Это означает, что существует хотя бы одна одноэлементная модель теории T, и, следовательно, множество $\{\pi(A_1),..,\pi(A_k)\}$ логически непротиворечиво.

B. Вторая часть теоремы следует из первой части и Леммы 2.

Конец доказательства

5 Заключение

Основная теорема данной статьи может рассматриваться как решение проблемы классического логицизма для теорий первого порядка. Лишь те теории, которые не налагают никаких ограничений на мощность универсума, могут быть редуцированы к логике. К таким теориям относятся элементарная теория групп, теория комбинаторов (комбинаторная логика), элементарная теория топосов и многие другие.

Литература

[1] Shalack, V.I. "On Some Applied First-Order Theories which Can be Represented by Definitions", Bulletin of the Section of Logic, 44(1-2) (2015). pp. 19–24.

[2] Smirnov, V.A. "Logical Relations between Theories", Synthese, 1986, 66(1), pp. 71–87.

[3] Смирнов В.А. Логические методы анализа научного знания. Москва: Наука, 1987. 256 с.