В.И.Шалак

ДИНАМИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

В классической логике высказываний принимается допущение, что в языке имеются так называемые элементарные высказывания. Они являются высказываниями об элементарных фактах, которые либо имеют место, либо - нет. В зависимости от этого соответствующее элементарное высказывание либо истинно, либо ложно. Одним из существенных свойств элементарных фактов является то, что они независимы. Наличие либо отсутствие того или иного элементарного факта никак не влияет на другие элементарные факты.

Допустим, что среди действий, которые может выполнять некий субъект, также можно выделить элементарные действия. Их элементарность заключается в том, что после выполнения таких действий соответствующий им отдельный элементарный факт начинает иметь место. На остальные же элементарные факты такие действия не оказывают никакого влияния. Другими словами, мы принимаем допущение, что между элементарными действиями и элементарными фактами имеется взаимнооднозначное соответствие. Отсюда следует, что будет иметь место также взаимнооднозначное соответствие между элементарными действиями и элементарными высказываниями. Из элементарных высказываний можно строить сложные высказывания, множество которых в конечном счете является булевой структурой. Естественно попробовать сопоставить не только элементарным, но и сложным высказываниям некоторые действия и выяснить их свойства.

Рассмотрим следующую модель. Пусть у нас на столе разложены игральные карты. Ни одна из них не лежит на другой. Ими мы будем представлять элементарные факты. Если карта лежит вверх рубашкой, то имеет место элементарный факт. Если же карта лежит рубашкой вниз, то элементарный факт не имеет места. Каждому элементарному факту сопоставим элементарное высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда имеет место соответствующий элементарный факт. Сопоставим также каждому элементарному факту элементарное действие, которое будет заключаться в переворачивании соответствующей карты, если данный элементарный факт не имеет места. Из-за имеющегося взаимнооднозначного соответствия между элементарными высказываниями и элементарными действиями можно принять, что мы имеем дело просто с двумя видами интерпретации высказываний - статической и динамической. В случае динамической интерпретации высказываниям сопоставляются действия, направленные на такое изменение возможного мира, в результате которого данное высказывание становится истинным. Если мы теперь рекурсивно разумным образом определим, какие действия соответствуют сложным высказываниям, то эти высказывания приобретут две ипостаси. С одной стороны, их можно рассматривать как описания возможных миров, с другой стороны, их можно рассматривать как программы, в результате выполнения которых можно прийти к возможному миру удовлетворяющему этому описанию. Нет необходимости говорить, что такая двойственная трактовка высказываний весьма привлекательна. Перейдем теперь к систематическому изучению возможных динамических интерпретаций высказываний.

Если в нашем языке формула A представляет некоторое высказывание, то соответствующее ему действие будем представлять посредством [A]. Его можно понимать следующим образом "сделать так, чтобы A было истинным".

Свойства действий и различных способов их композиции изучают в динамических логиках. Предлагаемые системы также можно рассматривать как некоторые варианты динамических логик.

Прежде всего зададим язык, который обозначим посредством $\mathcal{L}1$. Он состоит из:

1. p,q,r,s,...$\in Var$ — множество пропозициональных переменных.
2. &, ∨, →, ¬ — - логические связки.
3. [,],(,) — - скобки.

Определим множество **BF** булевых формул.

1. $Var \subseteq$ **BF**.
2. Если A,B $\in$ **BF**, то и ¬A, (A&B), (A∨B) $\in$ **BF**.
3. Ничто другое булевой формулой не является.

Определим множество **FM** формул.

1. **BF** $\subseteq$ **FM**.
2. Если A $\in$ **BF**, B $\in$ **FM**, то [A]B $\in$ **FM**.
3. Если A,B $\in$ **FM**, то и ¬A, (A&B), (A∨B), (A→B) $\in$ **FM**.
4. Ничто другое формулой не является.

Формулы вида [A]B можно читать следующим образом "всякий раз, когда мир изменен таким образом, что в нем имеет место A, в нем имеет место также и B".

Для заданного нами языка построим реляционную семантику. В качестве множества возможных миров возьмем множество всех приписываний истинностных значений пропозициональным переменным $Val=\{0,1\}^{Var}$. Обычным образом распространим эти приписывания на множество всех булевых формул.

Теперь нам нужно сопоставить каждой булевой формуле некоторое отношение достижимости на множестве *Val*. Это отношение достижимости как раз и будет семантическим представлением действия, соответствующего данной булевой формуле. Соответствие будет осуществлять функция $[]:BF \to 2^{Val \times Val}$, которую мы сейчас определим. Пусть $s[A]t$ служит у нас сокращением для $<s,t> \in [](A)$, где $s,t \in Val$. Посредством $s \simeq_p t$ будем обозначать тот факт, что приписывания s и t отличаются возможно лишь значением, сопоставляемым переменной p.

Что значит выполнить в мире s некоторое элементарное действие [p]? Это значит, что если в мире s уже имеет место p, то выполнение соответствующего действия ничего в нем не изменит. Если же p ложно в мире s, то он должен быть изменен в мир t, который отличается от s лишь тем, что в нем истинно p. Все другие элементарные высказывания имеют в t то же самое значение, что и в s. Аналогично предлагается рассматривать и действие, которое соответствует отрицанию элементарного высказывания. Отличие лишь в том, что в мире t элементарное высказывание p ложно. Такое понимание действий и отражается первым пунктом определения:

1. $s[P]t \Leftrightarrow t(P)=1, s\simeq_p t. \quad s,t \in Val,\ P \in \{\neg p,p\}$

Пункт определения отношения достижимости в случае дизъюнктивных высказываний почти не нуждается в комментариях.

2. $s[A \vee B]t \Leftrightarrow s[A]t$ или $s[B]t$.

Следует, однако, обратить внимание на то, что в соответствии с пунктом 2, если даже высказывание $A \vee B$ истинно в s, выполнение действия $[A \vee B]$ может привести к миру t, который отличен от s. Можно было бы заменить пункт 2 на 2':

2'. $s[A \vee B]t \Leftrightarrow (s(A \vee B)=1, s=t)$ или $(s(A \vee B)=0, s[A]t)$ или $(s(A \vee B)=0, s[B]t)$.

Тем не менее я считаю первый вариант более естественным и в настоящей работе останавливаюсь на нем.

Случай конъюнкции требует более детальных объяснений. Дело в том, что действие, соответствующее конъюнктивному высказыванию A&B, должно нести черты параллелизма. Ведь оно заключается в том, чтобы одновременно сделать истинными A и B. Как это записать? Мне неизвестны удобные способы это сделать. Вместо этого предлагается имитировать параллелизм последовательностью действий, характерной особенностью которой является то, что результаты действий в этой последовательности не отменяют друг друга, а наоборот накапливаются к концу. Это мы отразим в следующем ~~пункте~~ определения:

3. $s[A\&B]t \Leftrightarrow (s[A]\circ[B]t, t(A)=1)$ или $(s[B]\circ[A]t, t(B)=1)$.

Здесь $[A]\circ[B]$ - обычная композиция бинарных отношений.

Следующие три пункта определения объяснений не требуют.

4. $s[\neg\neg A]t \Leftrightarrow s[A]t$.
5. $s[\neg(A \vee B)]t \Leftrightarrow s[(\neg A \& \neg B)]t$.
6. $s[\neg(A \& B)]t \Leftrightarrow s[(\neg A \vee \neg B)]t$.

Определим отношение $s \models A$ - "при приписывании s истинна формула A":

$s \models p \Leftrightarrow s(p)=1$

....

....

....

$s \models [A]B \Leftrightarrow \forall t(s[A]t \Rightarrow t \models B)$.

Формула A общезначима е. и т. е. $\forall s(s \models A)$.

Класс общезначимых формул аксиоматизируем посредством аксиом и правил вывода классической логики высказываний плюс следующих аксиом и одного правила вывода:

Ax.1 $[A](B \to C) \to ([A]B \to [A]C)$

Ax.2 $[\neg\neg A]B \leftrightarrow [A]B$

Ax.3 $[A \vee B]C \leftrightarrow ([A]C \& [B]C)$

Ax.4 $[\neg(A \vee B)]C \leftrightarrow [(\neg A \& \neg B)]C$

Ax.5 $[A\&B]C \leftrightarrow ([A][B](A \to C) \& [B][A](B \to C))$

Ax.6 $[\neg(A\&B)]C \leftrightarrow [(\neg A \vee \neg B)]C$

Ax.7 $([A]B \& [A]C) \to [A](B\&C)$

Ax.8 $[P]A \leftrightarrow \neg[P]\neg A$

Ax.9 $[P](A \vee B) \to ([P]A \vee [P]B)$

Ax.10 $[P]q \leftrightarrow q \qquad p \neq q$

$$\frac{\vdash A \to B}{\vdash [A]B}$$

Интересным и на первый взгляд неожиданным является то, что для всякой формулы $A \in FM$ существует эквивалентная ей булева формула $B \in BF$. Это наводит на мысль, что скобки [] представляют просто одну из шестнадцати связок классической логики. Тем не менее это не так. Можно показать, что [] не является истинностно-функциональной связкой. Пусть $s(p)=0$ и $s(q)=0$. Тогда $s \models [p]p$, но $s \not\models [p]q$.

В построенной логике имеет место правило замены эквивалентных формул в виде:

$$\frac{\vdash A \leftrightarrow B}{\vdash [C]A \leftrightarrow [C]B}$$

С другой стороны, правило замены эквивалентных формул в виде:

$$\frac{\vdash A \leftrightarrow B}{\vdash [C]A \leftrightarrow [C]B} \qquad \frac{\vdash A \leftrightarrow B}{\vdash [A]C \leftrightarrow [B]C}$$

не имеет места. Не является доказуемой также формула:

$[A \vee \neg A]C \leftrightarrow [B \vee \neg B]C$

Из интересных формул в построенной логике доказуема:

$[A]A$

Более того, если булева формула A выполнима, то доказуема формула:

$\neg[A]\neg A$

К языку $\mathcal{L}1$ можно было бы добавить стандартные связки различных способов композиции действий. При желании это легко сделать.

Более интересным является, конечно, же случай логики предикатов. Как теперь сопоставить формулам языка некоторые действия? На чем определять отношение достижимости? Возможны два основных подхода. В первом подходе отношение достижимости задается на множестве приписываний значений индивидным переменным языка. Во втором подходе отношение достижимости задается на множестве моделей языка. В этом втором подходе интересным является случай, когда отношение достижимости задано на множестве моделей с фиксированным универсумом индивидов, т.е. фактически оно задано на множестве интерпретаций языка в фиксированной области. Возможны и смешанные подходы.

Для начала рассмотрим первый подход.

В большинстве языков программирования имеется так называемый оператор присваивания $:=$. С его помощью может быть представлено действие по присваиванию некоторой переменной x значения терма t следующим образом:

$x := t$

Всякий раз после выполнения такого действия истинно равенство $x = t$ (при условии, что x не входит в t). Равносильным образом

операцию присваивания можно было бы представить действием $[x = t]$, которое могло бы читаться как - "найти такое значение переменной x, при котором истинно равенство $x = t$". Этот пример довольно хорошо иллюстрирует суть первого подхода.

Зададим язык $\mathcal{L}2$. Он состоит из:

1. *Var* - множество индивидных переменных.
2. *Func* - множество функциональных символов.
3. *Pred* - множество предикатных символов.
4. $\&, \vee, \neg, \rightarrow$ - логические связки.
5. $\exists, \forall$ - кванторы.
6. [,],(,) - скобки.

Определим множество *Term* термов.

1. $Var \subseteq Term$.
2. Если $t_1,..,t_n \in Term$ и $f^n \in Func$, то $f^n(t_1,..,t_n) \in Term$.
3. Ничто другое термом не является.

Определим множество *BF* булевых формул.

1. Если $P^n \in Pred$ и $t_1,..,t_n \in Term$, то $P^n(t_1,..,t_n) \in BF$.
2. Если $A,B \in BF$, то и $\neg A$, $(A \& B)$, $(A \vee B) \in BF$.
3. Если $y \in Var$ и $A \in BF$, то $\exists y A$, $\forall y A \in BF$.
4. Ничто другое булевой формулой не является.

Определим множество *FM* формул.

1. $BF \subseteq FM$.
2. Если $A \in BF$, $B \in FM$, $x \Leftrightarrow Var$, то $[A]_x B \in FM$.
3. Если $A,B \in FM$, то и $\neg A$, $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B) \in FM$.
4. Если $y \in Var$ и $A \in FM$, то $\exists y A$, $\forall y A \in FM$.
5. Ничто другое формулой не является.

Моделью нашего языка будем называть тройку $M = \langle M, I, Val \rangle$, где M - непустое множество индивидов, $Val = M^{Var}$ - множество всех приписываний значений индивидным переменным, а I - функция интерпретации функциональных и предикатных символов, такая, что:

1. Если fn ∈ Func, то I(fn) ∈ MMxn.
2. Если $P^n \in Pred$, то $I(P^n) \in \{0,1\}^{Mxn}$.

Определим $|t|_v$ - значение терма t в модели M при приписывании $v \in Val$:

1. Если $t \in Var$, то $|t|_v = v(t)$.
2. Если $t = f^n(t_1,\dots,t_n)$, то $|f^n(t_1,\dots,t_n)|_v =$
   $= I(f^n)(|t_1|_v,\dots,|t_n|_v)$.

Определим $|A|_v$ - значение булевой формулы А в модели M при приписывании $v \in Val$:

1. $|P^n(t_1,\dots,t_n)|_v = I(P^n)(|t_1|_v,\dots,|t_n|_v)$.
2. $|\neg A|_v = 1 - |A|_v$.
3. $|A \& B|_v = min(|A|_v, |B|_v)$.
4. $|A \vee B|_v = max(|A|_v, |B|_v)$.
5. $|\forall y A|_v = \begin{cases} 1, \text{ если } \forall u \simeq_y v \ |A|_u = 1 \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases}$
6. $|\exists y A|_v = \begin{cases} 1, \text{ если } \exists u \simeq_y v \ |A|_u = 1 \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases}$

Определим функцию []: $BFxFin(2^{Var}) \to 2^{Val \times Val}$, которая сопоставляет паре, состоящей из булевой формулы и конечного множества индивидных переменных, отношение достижимости на множестве Val. $v[A]_x u$ будет служить сокращением для $<v,u> \in [](A,x)$. Посредством $v \simeq x u$ будем обозначать тот факт, что приписывания v и u отличаются возможно лишь значениями, сопоставляемыми переменным из множества x.

1. $v[P^n(t_1,\dots t_n)]_x u \Leftrightarrow v \simeq_x u, |P^n(t_1,\dots,t_n)|_u = 1,$
   $v,u \in Val, P \in \{P, \neg P\}$
2. $v[A \vee B]_x u \Leftrightarrow v[A]_x u$ или $v[B]_x u$.
3. $v[A \& B]_x u \Leftrightarrow (v[A]_x \circ [B]_x u, |A| u = 1)$ или
   $(v[B]_x \circ [A]_x u, |B| u = 1)$.
4. $v[\forall y A]_x u \Leftrightarrow v[A]_x u, |\forall y A| u = 1.$ $v[A]_{x,y} w$, $|\forall y A| u = 1$
5. $v[\exists y A]_x u \Leftrightarrow v[A]_{x,y} w,$ для некоторого $w \simeq_y u$.
6. $v[\neg\neg A]_x u \Leftrightarrow v[A]_x u$.
7. $v[\neg(A \& B)]_x u \Leftrightarrow v[\neg A \vee \neg B]_x u$.
8. $v[\neg(A \vee B)]_x u \Leftrightarrow v[\neg A \& \neg B]_x u$.

9. $v[\neg\forall y A]_x u \Leftrightarrow v[\exists y \neg A]_x u$.
10. $v[\neg\exists y A]_x u \Leftrightarrow v[\forall y \neg A]_x u$.

Определим отношение $M,v \models$ А - "в модели M при приписывании v истинна формула А".

$M,v \models P^n(t_1,\dots,t_n) \quad \Leftrightarrow \quad |P^n(t_1,\dots,t_n)| v = 1$

....

....

....

$M,v \models [A]_x B \quad \Leftrightarrow \quad \forall u \in Val(v[A]_x u \Rightarrow M, u \models B)$.

Формула А общезначима е. и т.е. $\forall M \forall v(M,v \models A)$.

В формуле $[A]_x B$ все индивидные переменные из списка x связаны в А и в В. Класс общезначимых формул аксиоматизируем посредством аксиом и правил вывода классической логики г.редикатов плюс следующих аксиом и правил вывода:

Ax.1 $[A]_x(B \to C) \to ([A]_x B \to [A]_x C)$

Ax.2 $[\neg\neg A]_x B \leftrightarrow [A]_x B$

Ax.3 $[A \vee B]_x C \leftrightarrow ([A]_x C \& [B]_x C)$

Ax.4 $[A \& B]_x C \leftrightarrow ([A]_x [B]_x (A \to C) \& [B]_x [A]_x (B \to C))$

Ax.5 $[\neg(A \vee B)]_x C \leftrightarrow [\neg A \& \neg B]_x C$

Ax.6 $[\neg(A \& B)]_x C \leftrightarrow [\neg A \vee \neg B]_x C$

Ax.7 $[\forall y A]_x B \leftrightarrow [A]_x(\forall y A \to B)$

Ax.8 $[\exists y A]_x B \leftrightarrow [A]_{x,y} B$ $\qquad$ y не встречается в В

Ax.9 $[\neg\forall y A]_x B \leftrightarrow [\exists y \neg A]_x B$

Ax.10 $[\neg\exists y A]_x B \leftrightarrow [\forall y \neg A]_x B$

Ax.11 $[P^n(t_1,\dots,t_n)]_x A \leftrightarrow \forall \mathbf{x}(P^n(t_1,\dots,t_n) \to A)$

$$\frac{\vdash A \to B}{\vdash [A]_x B}$$

Оказывается, что в этой логике имеет место эквивалентность $[A]_x B \leftrightarrow \forall x(A \to B)$. Поэтому все аксиомы и правило вывода можно заменить на эту единственную формулу.

Этот результат является несколько неожиданным. Означает ли он то, что в случае логики предикатов мы потерпели неудачу? Отнюдь. Нашей задачей было проинтерпретировать формулы логики предикатов как бинарные отношения на множестве приписываний значений индивидным переменным. И мы это сделали. То же, что имеется такой естетственный перевод формул нашей логики в классическую логику предикатов, говорит о внутренней согласованности наших определений.

Сопоставление формулам логики предикатов отношения достижимости на множестве приписываний значений индивидным переменным позволяет рассматривать логику как особый язык программирования. Этот язык отличен от PROLOG'а, в котором вычисление значений переменных получается как побочный результат дедукции целевого утверждения из некоторого множества формул, описывающих предметную область. Отличен он и от систем синтеза программ по логическим выводам в интуиционистской логике.

В этом языке имеется набор некоторых базисных предикатов и функций над определенной областью, которая либо уже имеется, как, например, арифметика, либо может быть описана с помощью некоторой булевой формулы $A(x_1,...,x_n)$. Затем посредством формулы $B(x_1,...,x_n)$ описывается целевое состояние. Интерпретатор по правилам нашего определения отношения достижимости ищет новые значения переменных. При этом ему указывается, значения каких переменных могут быть изменены в процессе вычисления.

Такой язык весьма напоминает язык запросов к базам данных. Например, если имеется база данных на сотрудников некоторого предприятия, то реализация запроса:

БОЛЬШЕ(Возраст(x),40)

будет заключаться в поиске тех сотрудников, возраст которых больше 40 лет.

Покажем, что в построенном языке могут быть вычислены все примитивно рекурсивные функции. При этом мы будем понимать вычислимость в смысле определенного нами отношения достижимости.

Пусть в нашем языке имеются: функциональная константа 0, одноместный функтор N и бинарный предикат равенства =. Покажем, что в этом языке мы можем вычислить любую примитивно рекурсивную функцию при интерпретации на области натуральных чисел 0 как 0 и N как функции следования.

Для этого нужно показать, что мы можем вычислить следующие базисные функции:

(a) Нуль-функцию $Z(x)=0$;

(b) Функцию следования $S(x)=x+1$;

(c) Функцию проекции $U^n_i(x_1,...,x_n)=x_i$, $n\geq 1$, $1\leq i\leq n$.

Для вычисления нуль-функции определим бинарный предикат **Zero** следующим образом:

$$\mathbf{Zero}(x,y)_{def}\equiv y=0$$

Для вычисления функции следования определим бинарный предикат **Next** следующим образом:

$$\mathbf{Next}(x,y)_{def}\equiv y=N(x)$$

Для вычисления функции проекции определим $n+1$-местный предикат **Pr** следующим образом:

$$\mathbf{Pr}^n_i(x_1,...,x_n,y)_{def}\equiv x_1=x_1\&...\&x_n=x_n\ \&y=x_i$$

Теперь базисные функции могут быть вычислены с помощью соответствующих программ-запросов:

$$[\mathbf{Zero}(x,y)]_y$$

$$[\mathbf{Next}(x,y)]_y$$

$$[\mathbf{Pr}^n_i(x_1,...,x_n,y)]_y$$

После выполнения программы переменная y хранит значение функции.

Теперь нам нужно показать, что функции, определяемые через подстановку и рекурсию, также вычислимы в нашем языке.

Пусть функции:

$f(y_1,...,y_k)$

$g_1(x_1,...,x_n)$

....

....

....

$g_k(x_1,...,x_n)$

вычислимы с помощью формул:

$F(y_1,...,y_k,z)$

$G_1(x_1,...,x_n,w_1)$

....

....

....

$G_k(x_1,...,x_n,w_k)$

Покажем, что в нашем языке вычислима и функция

$f(g_1(x_1,...,x_n),...,g_k(x_1,...,x_n))$

Для этого определим $k+1$-местный предикат H следующим образом:

$$H(x_1,...,x_k,y)_{def}\equiv \exists w_1...w_k(G_1(x_1,...,x_n,w_1)\&...$$
$$...\&G_k(x_1,...,x_n,w_k)\ \&\ F(w_1,...,w_k,y))$$

Результат подстановки будет вычислим с помощью программы-запроса:

$[H(x_1,...,x_n,y)]$

После выполнения программы переменная y хранит значение функции.

Схема определения через рекурсию выглядит следующим образом:

$h(x_1,...,x_n,0)=f(x_1,...,x_n)$,

$h(x_1,...,x_n,y+1)=g(x_1,...,x_n,y,h(x_1,...,x_n,y))$.

Пусть в нашем языке функции:

$f(x_1,...,x_n)$,

$g(x_1,...,x_n,y,z)$

вычислимы с помощью формул:

$F(x_1,...,x_n,w)$

$G(x_1,...,x_n,y,z,v)$

Определим n+2-местный предикат H следующим образом:

$H(x_1,...,x_n,y,u)_{def}\equiv ((y=0)\&F(x_1,...,x_n,u))\vee(\neg(y=0)\&$

$\& \exists ts(Next(t,y) \ \& \ H(x_1,...,x_n,t,s) \ \& \ G(x_1,...,x_n,t,s,u)))$

Значение функции $h(x_1,...,x_n,y)$ вычисляется с помощью программы-запроса:

$[H(x_1,...,x_n,y,u)]_u$

После выполнения программы переменная u хранит значение функции.

Покажем теперь, что в нашем языке вычислимы не только примитивно рекурсивные, но и все рекурсивные функции. Для этого достаточно показать, что функции, определимые посредством оператора минимизации, вычислимы. Определение посредством оператора минимизации выглядит следующим образом:

Для каждой функции f(x1,...,xn,y)

$$\mu y(f(x,y)) = \begin{cases} \text{наименьший } y\text{, такой, что} \\ (i)\ f(x,z) \text{ определено для всех } z\le y \text{ и} \\ (ii)\ f(x,y)=0\text{, если такой } y \text{ существует,} \\ \text{не определено в противном случае} \end{cases}$$

Пусть в нашем языке функция f(x,y) вычислима посредством формулы: F(x,y,u). Определим бинарный предикат M:

$M(x,y)_{def}\equiv F(x,y,0)\&\ \forall z((z\ge y)\vee\neg F(x,z,0))$

Значение функции $\mu y(f(x,y))$ вычисляется с помощью программы-запроса:

$[M(x,y)]y$

После выполнения программы переменная y хранит значение функции.

Если бы мы захотели реализовать этот язык в виде языка программирования, нам пришлось бы наложить некоторые ограничения на вид программ-запросов. Так, нам пришлось бы запретить положительные вхождения кванторов всеобщности и отрицательные вхождения кванторов существования. С другой стороны, мы могли бы расширить язык ограниченными кванторами, которые могут иметь произвольные вхождения, если область их квантификации конечна. В результате такой модификации языка мы получили бы в точности язык семантического программирования ($\sum$-программирования), концепция которго была выдвинута и изучается в работах новосибирских логиков.

Перейдем теперь ко второму подходу, когда отношение достижимости определяется на множестве интерпретаций языка в фиксированной области. При этом мы сперва рассмотрим случай бескванторного исчисления предикатов.

Язык $\mathcal{L}3$ состоит из:

1. *Var* - множество индивидных переменных.
2. *Func* - множество функциональных символов.
3. *Pred*$\cup\{=\}$ - множество предикатных символов.
4. $\&,\vee,\rightarrow,\neg$ - логические связки.
5. [,],(,) - скобки.

Определим множество *Term* термов.

1. $Var \subseteq Term$.
2. Если $t_1,\ldots,t_n \in Term$ и $f^n \in Func$, то $f^n(t_1,\ldots,t_n)\in Term$.
3. Ничто другое термом не является.

Определим множество *BF* булевых формул.

1. Если $P^n \in Pred$ и $t_1,...,t_n \in Term$, то $P^n(t_1,\ldots,t_n) \in BF$.
2. Если $A,B \in BF$, то и $\neg A$, $(A\&B)$, $(A\vee B) \in BF$.
3. Ничто другое булевой формулой не является.

Определим множество *FM* формул.

1. $BF \subseteq FM$.
2. Если $t_1,t_2 \in Term$, то $t_1=t_2 \in FM$.
3. Если $A \in FM$, $B \in FM$, то $[A]B \in FM$.
4. Если $A,B \in FM$, то и $\neg A$, $(A\&B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B) \in FM$.

5. Ничто другое формулой не является.

Интерпретацией термов и булевых формул нашего языка в непустом множестве M будем называть всякую функцию i, которая определена на множестве $Func \cup Pred \cup Term \cup BF$ и удовлетворяет следующим условиям:

1. Если $x \in Var$, то $i(x) \in$ M.
2. Если $f^n \in Func$, то $i(f^n) \in \mathrm{M}^{\mathrm{M} \times n}$.
3. Если $P^n \in Pred$, то $i(P^n) \in \{0,1\}^{\mathrm{M} \times n}$.
4. Если $t_1,..,t_n \in Term$ и $f^n \in Func$, то $i(f^n(t_1,...,t_n)) = i(f^n)(i(t_1),...,i(t_n))$.
5. Если $t_1,...,t_n \in Term$ и $P^n \in Pred$, то $i(P^n(t_1,...,t_n)) = i(P^n)(i(t_1),...,i(t_n))$.
6. $i(\neg A) = 1 - i(A)$
7. $i(A\&B) = min(i(A), i(B))$.
8. $i(A \vee B) = max(i(A), i(B))$.

Моделью для нашего языка будем называть пару $\mathrm{M} = \langle \mathrm{M}, \mathbf{I} \rangle$, где M - непустое множество индивидов, а $\mathbf{I}$ - множество всех интерпретаций термов и булевых формул нашего языка в множестве M. Посредством $i \simeq_{P(t)} j$ мы будем обозначать тот факт, что интерпретации i и j отличаются возможно лишь интерпретацией предикатного символа P. Причем для любого индивида $a \in$ M отличного от $j(t)$ $i(P)(a) = j(P)(a)$.

Определим функцию $[\,] : BF \to 2^{1 \times 1}$, которая сопоставляет булевым формулам отношение достижимости на множестве $\mathbf{I}$.

1. $i[P^n(t_1,...t_n)]j \Leftrightarrow \quad i \underset{P(t_1,\dots,t_n)}{\underline{\quad\sim\quad}} j, \ i(P^n(t_1,...,t_n)) = 1, \quad i,j \in \mathbf{I}$
2. $i[A \vee B]j \Leftrightarrow i[A]j$ или $i[B]j$.
3. $i[A\&B]j \Leftrightarrow (i[A]\circ[B]j, j(A)=1)$ или $(i[B]\circ[A]j, j(B)=1)$.
4. $i[\neg\neg A]j \Leftrightarrow i[A]j$.
5. $i[\neg(A\&B)]j \Leftrightarrow i[\neg A \vee \neg B]j$.
6. $i[\neg(A \vee B)]j \Leftrightarrow i[\neg A \& \neg B]j$.

Определим отношение $M,i \models$ A - "в модели M при интерпретации i истинна формула A".

$$M,i \models P^n(t_1,\dots,t_n) \Leftrightarrow i(P^n(t_1,\dots,t_n)) = 1$$

....

$$M,i \models [A]B \Leftrightarrow \forall j \in \mathbf{I}(i[A]j \Rightarrow M,j \models B).$$

Формула A общезначима е. и т.е. $\forall M \forall i(M,i \models A)$.

Класс общезначимых формул аксиоматизируем посредством аксиом и правил вывода классической логики высказываний плюс следующих аксиом и правила вывода:

Ax.1 $[A](B \to C) \to ([A]B \to [A]C)$

Ax.2 $[\neg\neg A]B \leftrightarrow [A]B$

Ax.3 $[A \vee B]C \leftrightarrow ([A]C \& [B]C)$

Ax.4 $[A\&B]C \leftrightarrow ([A][B](A \to C) \& [B][A](B \to C))$

Ax.5 $[\neg(A \vee B)]C \leftrightarrow [\neg A \& \neg B]C$

Ax.6 $[\neg(A\&B)]C \leftrightarrow [\neg A \vee \neg B]C$

Ax.7 $([A]B \& [A]C) \to [A](B\&C)$

Ax.8 $[P^n(t_1,\dots,t_n)]A \leftrightarrow \neg[P^n(t_1,\dots,t_n)]\neg A$

Ax.9 $[P^n(t_1,\dots,t_n)](A \vee B) \to [P^n(t_1,\dots,t_n)]A \vee [P^n(t_1,\dots,t_n)]B$

Ax.10 $[P^n(t_1,\dots,t_n)]Q^m(t'_1,\dots,t'_m) \leftrightarrow Q^m(t'_1,\dots,t'_m) \quad P \neq Q$

Ax.11 $[P^n(t_1,\dots,t_n)]P^n(t'_1,\dots,t'_n) \leftrightarrow (\&^n_{k=1}\, t_k = t'_k) \vee$
$\vee P^n(t'1,\dots,t'n)$

Ax.12 $[\neg P^n(t_1,\dots,t_n)]P^n(t'_1,\dots,t'_n) \leftrightarrow (\vee^n_{k=1}\, t_k \neq t_k) \&$
$\& P^n(t'_1,\dots t'_n)$

$$\frac{\vdash A \to B}{\vdash [A]B}$$

В какой области может найти применение построенная нами логика? В качестве примера можно привести проблему планирования и выполнения действий. Допустим, что речь идет о выполнении действий в мире кубиков. Пусть в языке имеется бинарный предикатный символ ЛЕЖИТ_НА.

Предложение ЛЕЖИТ_НА(кубик1,кубик2) истинно е. и т.е. кубик1 лежит на кубике2. Допустим, что в настоящий момент это предложение истинно. Если мы теперь снимем кубик1 с кубика2, то наше предложение станет ложным. Это произойдет вследствие того, что изменится интерпретация предикатного символа ЛЕЖИТ_НА. При новой интерпретации пара <кубик1,кубик2> уже не будет принадлежать области истинности предиката.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Агафонов В.Н.,Борщев В.Б.,Воронков А.А.* Логическое программирование в широком смысле// Логическое программирование. М., 1988.