УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

ИНСТИТУТ ФИЛОСОФИИ РАН

На правах рукописи

Шалак Владимир Иванович

ПРОТОЛОГИКА: НОВЫЙ ВЗГЛЯД НА ПРИРОДУ ЛОГИЧЕСКОГО

09.00.07 – логика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора философских наук

Москва - 2010 г.

Работа выполнена в секторе логики Института философии РАН

Официальные оппоненты:

Доктор философских наук, профессор
Бахтияров Камиль Ибрагимович

Доктор философских наук
Герасимова Ирина Алексеевна

Доктор физико-математических наук, профессор
Непейвода Николай Николаевич

Ведущая организация:

Кафедра логики Философского факультета
Московского Государственного
Университета им. М.В. Ломоносова

Защита состоится 10 июня 2010 г. в 15-00 часов на заседании Диссертационного совета Д.002.015.03 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора философских наук при Институте философии РАН по адресу: 119992, Москва, ул. Волхонка, д. 14.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института философии РАН

Автореферат разослан «____»____________2010 г.

И.о. ученого секретаря диссертационного совета
Доктор философских наук /Киященко Л.П./

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Логика интересует философов не сама по себе, а с точки зрения тех познавательных функций, которые она помогает реализовывать. Более ста лет назад был поставлен вопрос о необходимости перехода к новой логике, которая позволила бы решить ряд проблем, накопившихся в математике и точном естествознании. Выразительных возможностей предшествующей традиционной логики, началами которой мы обязаны Аристотелю, было явно недостаточно для представления назревших научных идей. Основания современной символической логики были заложены в трудах Дж. Пеано, Ч. Пирса, Г. Фреге, Б. Рассела. Казалось, развитию логики был дан новый мощный импульс, но парадоксальным образом именно с тех пор тема ее оснований не перестает обсуждаться в специальной литературе, и все последующее развитие логики так или иначе связано с их методической критикой. Результатом этого стал системный кризис, который переживает логика в настоящее время. Как иначе объяснить то, что через две с половиной тысячи лет после возникновения логики и через сто лет после ее реформирования ученые все чаще задаются вопросом, что же это все-таки за наука?[1] Предлагаемое диссертационное исследование как раз и посвящено поиску ответа на вопрос о глубинной природе логики.

Следует отметить, что по времени нарастание кризисных явлений в логике совпало с переходом от классической науки к неклассической. Если основания традиционной логики в целом достаточно хорошо соответствовали идеалам классической науки, то неклассическая наука естественным образом потребовала пересмотра и переосмысления многих исконно логических понятий. Это, в конце концов, привело к тому, что не осталось ни одного логического принципа, которого не коснулась бы тень сомнения. Существуют ли логические законы? Имеет ли логика право налагать какие-либо ограничения на свойства предметной области еще до того, как они будут обнаружены и исследованы? Понятие истины и понятие следования перестали быть связующей основой логики, превратившись в технические средства задания логических систем. Спектр возможных истинностных значений протянулся от двух значений классической логики до континуума многозначной логики и расплывчатых значений нечеткой логики. Новые методы логико-математического анализа привели к дальнейшему размножению логических систем. Логика потеряла свой нормативный характер, без которого это уже совсем другая наука, и для нее можно было бы придумать другое название, а не использовать старое, привнося в него чуждый смысл.

Логика в ее современном виде перестала быть универсальным инструментом интеллектуального познания, превратившись всего лишь в набор методов, используемых в различных науках.[2] Это говорит о том, что реформа логики на рубеже XIX-XX в. так и не была завершена, и те конструкции, которые все еще считаются лежащими в ее основании, на самом деле таковыми не являются. Без ответа на главный вопрос о природе логического эта наука рискует и вовсе прекратить свое существование.

Степень разработанности проблемы. На протяжении XX в. обращение к теме оснований логики принимало разные формы. Если сначала это была критика существующих основоположений логики[3] и выяснение границ ее применимости[4], на смену этому пришли поиски альтернатив в лице релевантных, паранепротиворечивых,

[1]Béziau J.-Y. What is "formal logic"?, Revista Brasileira de Filosofia, 232 (2009); Gabbay, D. M. What is a Logical System?, Clarendon, Oxford, 1994.- P.454; Wang Hao What is logic? // The Monist. Vol. 77. N 3. 1994. - P. 261-277; Hacking I. What is logic? // The Journal of Philosophy. Vol. 76. N 6. 1979. – P.285-319; Feferman S. Logic, logics, and logicism // Notre Dame Journal of Formal Logic, V.40, №1, 1999.- P.31-54; Карпенко А.С. Логика на рубеже тысячелетий // Логические исследования. Вып.7 – М.: Наука, 2000. – с. 7-60.
[2] Вригт Г.Х. фон «Логика и философия в XX веке» // Вопросы философии. №8. 1992. – с. 80-91.

диаграммных и пр. логик, которые не столько помогали приблизиться к решению проблемы, сколько усугубляли кризис, умножая и без того большое число различных логических систем. Ответ на вопрос об основаниях логики следовало искать на более высоком, выходящем за привычные рамки уровне абстракции. В последние десятилетия такие исследования стали появляться.[5] Весьма интересны работы, проводимые Ж.И. Безьё под лозунгами универсальной логики.

Как известно, Бурбаки предложил представлять математику как науку о трех фундаментальных видах структур: алгебраических, топологических и порядковых. Логике при этом отводилась роль частного представителя алгебраических структур. Ж.И. Безьё выразил намерение оспорить такое отношение к логике и показать, что ей соответствует особый четвертый вид структур – логических.

Универсальная логика – это не очередная логическая система. Она находится в таком же отношении к конкретным логикам, как универсальная алгебра к конкретным алгебрам. Если универсальная алгебра – это некоторое множество с некоторыми никак не специфицированными функциями над ним, то универсальная логика – это абстрактное множество формул со столь же абстрактным отношением выводимости, на которое не налагаются никакие конкретные ограничения. Ж.И. Безьё показал, что фундаментальное с математической точки зрения понятие изоморфизма структур не решает задачи выделения эквивалентных универсальных логик. Но это как раз и означает, что логика не сводима к обычным математическим структурам.

Исследования в рамках универсальной логики не исключают возможности существования и других подходов к проблеме. Ж.И. Безьё идет по пути прямого обобщения уже известных логических структур. Такой подход вполне правомерен, но не дает ответа на очень простой вопрос, почему мы изначально относим эти структуры к логическим? Без ответа на него результат обобщения может оказаться ошибочным.

Цель и задачи исследования. Общий план исследования выглядит следующим образом. Мы начнем с определения того, что будем понимать под логикой. После этого в подтверждение кризисного состояния современной логики рассмотрим основные трансформации, которые претерпели основоположения логики на протяжении последних двух с половиной тысяч лет. Это касается понятия логического закона, понятия истины, понятия логического следования. Поскольку на рубеже XIX-XX в. произошел переход от традиционной логики к символической, что было связано с появлением новых методов логического анализа, им также должна быть дана оценка.

Считается, что логика лежит в основании других наук. Но в этом случае мы должны дать хоть какое-то объяснение известному несоответствию между слабыми выразительными возможностями языка традиционной логики и богатейшими достижениями точных наук, полученными без всякой видимой опоры на нее. Чтобы не прибегать к помощи понятия интуиции, мы попытаемся дать ответ в терминах особых *протологических* структур как носителей логического.

---

[3] Васильев Н.А. Воображаемая логика. Избранные труды. – М.: Наука, 1989. – 264 с.; Łukasiewicz, J. O logice tr´owarto´sciowej // Ruch Filozoficzny 1920, 6: P.170–171; Brouwer L.E.J. Intuitionism and Formalism // Bulletin of the American Mathematical Society, V.20, 1908. - p.81-96; Бочвар Д.А. Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления // Математический сборник. Т. 4. № 2. 1938. - с. 287-308.

[4] Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. – М.: Наука, 1982. – 560 с.; Tarski A. Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938. – Oxford, 1956. – 472 p.; Gödel K. On Undecidable Propositions of Formal Mathematical Systems (Princeton. Lectures, 1934) // Davis M., ed. The Undecidable. - New York: Raven Press, 1965. - p. 41-71.

[5] Gabbay, D. M. Labelled Deductive Systems, vol. 1, Clarendon, Oxford, 1996. – P. 497.; Béziau J.-Y. 13 Questions about universal logic", Bull. of the Section of Logic, 35 (2006), pp.133-150.

Если логика понимается нами как *интеллектуальная познавательная деятельность, осуществляемая с помощью языка*, то основания протологики мы попытаемся обнаружить на более высоком уровне абстракции *языка как знаковой системы*. Это и станет отправной точкой в исследовании протологики.

Следующая задача, которую необходимо решить, – выделение элементов, из которых складывается протологика. Центральным понятием, вокруг которого будет строиться протологика, должно стать понятие протологического следования.

Для достижения поставленных целей были решены следующие задачи:

1. Доказана теорема о том, что язык логики первого порядка с функциональными символами и единственным предикатом равенства не уступает по своим выразительным возможностям полному языку логики предикатов первого порядка с равенством.
2. Доказана теорема о том, что язык логики первого порядка с функциональными символами и одноместными предикатными символами не уступает по своим выразительным возможностям полному языку логики предикатов первого порядка с равенством.
3. Показано, что расширение языка традиционной логики функциональными символами приводит к значительному увеличению ее выразительных возможностей.
4. Дано определение понятия протологического следования в применении к языку как знаковой системе.
5. Введено понятие лингвистического априоризма.
6. Определено понятие дефинициальной логики, задаваемой единственным правилом устранения определений.
7. Доказан ряд теорем об отношении дефинициальной и комбинаторной логики.
8. Доказана теорема об определимости в дефинициальной логике рекурсивных функций.
9. Введено понятие определения через неподвижные точки.
10. Определено понятие протологики.
11. Доказан ряд теорем об отношении протологики и комбинаторной логики.
12. Определено понятие логико-лингвистической вычислимости.
13. Проанализировано соотношение дефинициальной логики, λ-исчисления и комбинаторной логики.
14. В качестве примеров теорий на основе протологики построена протобулева логика и теория квантитативных рассуждений.

Научная новизна работы. Основные результаты, выносимые на защиту. Новизна подхода заключается в том, что решение поставленных логических задач предлагается искать на уровне абстрактной теории знаков. Для этого понадобилось сформулировать ключевое понятие протологического следования и исследовать его свойства.

Были получены следующие новые результаты, выносимые на защиту:

1. Выразительные возможности языка логики предикатов первого порядка практически не отличаются от выразительных возможностей языка первого порядка с единственным предикатом равенства и функциональными символами.
2. Выразительные возможности языка логики предикатов первого порядка практически не отличаются от выразительных возможностей языка функциональных символов и одноместных предикатов.
3. На уровне абстрактной теории знаков существуют богатые по своим выразительным возможностям структуры, которые могут быть отнесены к логике.

4. Детерминационные связи, существующие между выражениями языка в силу одной лишь их знаковой природы, налагают ограничения на возможные способы оперирования ими. Будучи независимыми от возможных интерпретаций языка, они могут рассматриваться как основа протологических рассуждений.
5. Первый вид связей между выражениями языка имеет место в силу их иерархической композициональной структуры.
6. Второй вид связей обусловлен существованием традиционно относимой к логике операции определения-сокращения, побочным эффектом которой является введение новых абстрактных объектов мысли.
7. Идеальная знаковая деятельность логического субъекта, осуществляемая на уровне протологических связей между выражениями языка, уже содержит в себе все необходимые элементы эффективной вычислимости.

Теоретическое и практическое значение диссертации. Теоретическая значимость работы заключается в новом взгляде на основания логики, более тесной их связи с теорией знаков. Это может послужить отправным пунктом для дальнейших исследований в данной области.

Отдельным и в определенном смысле независимым результатом является переоценка отношения между традиционной и современной логикой, и роли в науке понятия функциональной связи.

Результаты работы могут найти применение в учебном процессе при подготовке спецкурсов по логике и ее основаниям, предназначенных для студентов и аспирантов высших учебных заведений.

Логико-лингвистическое уточнение понятия вычислимости может быть использовано не только в теоретических целях, но и при проектировании языков для систем искусственного интеллекта.

Апробация работы. Проблематика диссертационного исследования неоднократно обсуждалась на научно-исследовательском семинаре сектора логики Института философии РАН, на научном семинаре кафедры логики философского факультета МГУ, на научно-исследовательском семинаре кафедры алгебры и математической логики ТвГУ, на заседании научного семинара МГУ по основаниям математики, на заседании научного семинара для аспирантов мехмата МГУ.

Ряд результатов исследования был доложен на международных конференциях «Смирновские чтения» (Москва, 1999, 2003, 2007, 2009) и на международных конференциях по современной логике (С-Петербург, 2000, 2006, 2008).

Основные результаты диссертационного исследования отражены в научных публикациях автора, в том числе в двух монографиях «Логический анализ сети Интернет» и «О понятии логического следования».

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **ВВЕДЕНИИ** обосновывается актуальность темы исследования, характеризуется степень ее разработанности, формулируются цели и задачи работы, ее методологические основы, перечисляются положения диссертации, выносимые на защиту, указывается научная новизна полученных результатов, их теоретическая и практическая значимость, апробация полученных результатов.

ПЕРВАЯ ГЛАВА - «О логике и ее основаниях» - посвящена рассмотрению основных симптомов кризисного состояния современной логики.

Для подавляющего большинства тех, кому знаком этот термин, логика ассоциируется со строгостью и правильностью мышления. К такому пониманию близок смысл многих ее определений. Коль скоро мы обнаруживаем у себя способность к абстрактному мышлению, мы заинтересованы и в существовании «*нормативной науки о формах и приемах интеллектуальной познавательной деятельности, осуществляемой с помощью языка*»[6]. Эта наука нужна нам для того, чтобы всякий раз, когда приходится вторгаться в сферу непознанного, она служила нашим интеллектуальным проводником, уберегая от ненужных ошибок.

Косвенные свидетельства существования регулярных *форм и приемов интеллектуальной деятельности* мы обнаруживаем практически во всех очагах человеческой культуры - Древнем Египте, Вавилоне, Китае, Индии, а возникновение логики как науки связываем с относительно коротким периодом в истории Древней Греции. В трудах Аристотеля впервые было изложено целостное логическое учение, включавшее в себя теорию понятий, теорию определений, теорию суждений, теорию доказательств и теорию правдоподобных рассуждений. Несколько позже в него были включены достижения других философских школ, и уже в средние века оно преподносилось как вполне законченный канон научной аргументации.

Отсутствие на протяжении длительного времени видимого прогресса в логике вовсе не означало, что не было получено никаких результатов. Это было время «*вызревания отдельных идей*»[7]. Дальнейшее развитие получили теория модальностей, теория логического следования, теория семантических парадоксов и др. Прогресс логики, как и прогресс математики, в значительной степени тормозился из-за отсутствия удобной символики. Скачок в развитии логики произошел на рубеже XIX-XX вв. благодаря трудам таких ученых как Дж. Пеано, Ч. Пирс, Г. Фреге, Б. Рассел, когда на смену традиционной пришла современная символическая логика. Парадоксальным образом, но ее дальнейшее бурное развитие происходило одновременно с коренной ревизией собственных оснований, и к концу XX века все настойчивее стал звучать вопрос, что есть логика?

Параграф первый - «Законы логики». Идея законов логики неразрывно связана с высказанной две с половиной тысячи лет назад идеей объяснения всего многообразия окружающего нас мира исходя из небольшого набора принципов. Лишь умопостигаемое бытие, а не данные органов чувств, обладает действительной реальностью.

Умопостижение окружающего мира представлялось возможным при условии, если мысли следовали законам бытия. Законы логики суть наиболее общие законы бытия. С учением Парменида о едином, неизменном, вечном и неподвижном бытии связывают логический закон тождества в его метафизическом истолковании, с которым, в свою очередь, «*связано метафизическое истолкование закона противоречия как невозможности для вещи в одно и то же время в одном и том же отношении обладать*

[6] Бочаров В.А., Маркин В.И. Основы логики. Учебник. М.: Космополис, 1994. С.9.

[7] Стяжкин Н.И. Формирование математической логики. М.: Наука, 1967. С.112.

противоречащими друг другу определениями»[8]. Нельзя познать бытие, если мыслить с нарушением его законов.

У высказанной в таком виде идеи законов логики были и слабые стороны. Достаточно иметь другой взгляд на начала бытия, и законы логики рушатся. В числе тех, кто выступал против Парменида, был Гераклит из Эфеса. Он отрицал неподвижность бытия, утверждая, что мир изменчив. Этого было достаточно, чтобы отрицать закон тождества и закон противоречия в их онтологической интерпретации.

Потребовалось пройти более чем двум тысячелетиям, чтобы законы логики были поставлены под сомнение. В том же городе и в том же университете, где впервые увидела свет «Воображаемая геометрия» Н.И. Лобачевского, была предпринята попытка пересмотра законов логики. Создателем неаристотелевой логики в 1910 г. стал приват-доцент кафедры философии Казанского университета Н.А. Васильев. Уже в первой своей логической работе, проводя различие между суждениями о фактах и суждениями о понятиях, он приходит к выводу, что для суждений о понятиях «*закон исключенного третьего вовсе не есть логический закон, равноправный с логическими законами тождества, противоречия и достаточного основания, обнимающими всю сферу логики и мышления*»[9]. Основанием для отрицания логического статуса закона исключенного третьего явилось его невыполнение для суждений о понятиях, поскольку логические законы, по мнению Н.А. Васильева, должны обнимать *всю сферу логики и мышления*. В следующих его работах речь идет уже напрямую о воображаемой логике, построенной по примеру воображаемой геометрии Н.И. Лобачевского.

Прошло совсем немного времени, и появилась квантовая механика - описание физического мира, в котором нарушаются законы классической логики. Два истинных порознь высказывания могут оказаться несовместимыми в мире, подчиняющемся законам квантовой механики. С точки зрения классической логики, это нонсенс. Вместе с несовместимостью некоторых истинных высказываний в квантовомеханическом мире нарушаются и другие казавшиеся ранее незыблемыми законы логики.

Первый серьезный шаг в разрушении устоявшихся взглядов на незыблемость оснований логики и ее законов был сделан. За ним последовали другие. Хотя термин «законы логики» все еще продолжают употреблять, но смысл его зачастую трудноуловим. Количество *возможных логических систем* сравнялось с континуумом. Одновременно с этим удивительным образом стал ускользать и смысл того, что такое логика?

Параграф второй - «Понятие истины». Вторым столпом логики является понятие истины. Его роль в логике не сводится к одному лишь известному классическому определению истинности, а имеет глубокие философские корни. Истина – это не просто соответствие содержания мысли и реальности, но и ценностный идеал знания. Мы переняли и сохранили это ценностное отношение к идее Истины. Нет ничего удивительного в том, что именно эта идея была положена в основание логики и стала ее связующей основой.

Простота классического определения истинности настолько подкупает, что кажется, будто и логика, построенная на нем, должна быть идеальной. Однако не все так просто.

Признавая существование изменяющегося мира явлений, Аристотель, по причине неприменимости к нему понятия истины, ограничивает предмет познания, а тем самым и сферу применимости логики, одним лишь неизменным.

Если законом противоречия в рассуждениях пользовались задолго до Аристотеля, то ясную формулировку закона исключенного третьего мы находим именно у него.

[8] Ахманов А.С. Логическое учение Аристотеля. М.: Едиториал УРСС, 2002. С.20.

[9] Васильев Н.А. О частных суждениях, о треугольнике противоположностей, о законе исключенного четвертого // Воображаемая логика. Избранные труды. М.: Наука, 1989. С. 49.

Аристотель не только сформулировал этот закон, но и сам же обнаружил его неприменимость к высказываниям о будущих событиях, поскольку в противном случае из него вытекало бы нежелательное следствие - логический детерминизм. Как и в случае изменяющегося мира явлений, Аристотель не находит лучшего выхода, чем просто ограничить сферу применимости этого закона. Последующие попытки каким-либо образом разрешить эту проблему и сделать закон исключенного третьего универсальным успехом не увенчались[10].

Еще одним шагом в разрушении оснований логики стало увеличение числа истинностных значений, которые могут иметь предложения языка. Этот шаг был сделан Я. Лукасевичем[11]. Поводом для столь радикального изменения взглядов на понятие истинности послужили не умозрительные предположения, а анализ проблемы, связанной с высказываниями о будущих событиях. Допуская, что высказывание «*Завтра произойдет морское сражение, или не верно, что завтра произойдет морское сражение*» истинно, поскольку имеет форму закона исключенного третьего, но в то же время ни высказыванию «*Завтра произойдет морское сражение*», ни высказыванию «*Не верно, что завтра произойдет морское сражение*» сегодня не может быть приписана ни истина, ни ложь, так как это означало бы логический детерминизм, Аристотель нарушает им же самим провозглашенный принцип двузначности. Согласно Я. Лукасевичу, проблема логического детерминизма в рассматриваемом случае могла быть решена, если допустить, что помимо истины и лжи существуют и другие значения, которые могут принимать предложения. Так возникла первая трехзначная логика.

Всего лишь через 9 лет после появления трехзначной, Я. Лукасевичем была построена бесконечнозначная логика. Возможность строгого построения многозначных логик и их применение для решения конкретных познавательных задач сразу привлекли к себе внимание. Кроме Я. Лукасевича, у истоков нового направления исследований стояли такие ученые как Э. Пост и Д. Бочвар.

Появление все новых и новых многозначных логик помимо кажущегося расширения творческого горизонта имело и обратную сторону. Стал теряться смысл истинностных значений и того, что мы называем логическими связками.

Размывание понятия истины в логике происходило не только по пути увеличения истинностных значений. Претерпел изменения первоначально простой смысл аристотелевского «*говорить о том, что сущее есть и не-сущее не есть, - значит говорить истинное*». Истину стали различать в зависимости от способа ее установления, стали допускать как отсутствие истинностного значения у предложений, так и одновременное приписывание нескольких значений. Рядом с корреспондентской теорией истины появились когерентная, прагматическая, дефляционная и другие теории. Понятие истины стало играть в логике все более и более техническую роль, далеко не всегда допускающую содержательное истолкование.

Параграф третий - «Логическое следование». Ассоциируя логику с правильным мышлением, под этим чаще всего подразумевают умение правильно рассуждать. Но что есть правильное рассуждение? Чем отличается правильное рассуждение от неправильного?

Внутренняя структура простых суждений получает у Аристотеля онтологическое обоснование. Мир состоит из вещей, которым присущи или не присущи те или иные свойства. Посредством простых суждений на уровне языка и его употребления мы всего лишь воспроизводим это строение. Лишь истинные суждения отражают действительное строение мира. Следующий шаг – это переход от одних суждений к другим. Доказательство состоит из посылок и цепочки умозаключений. Посылки могут быть как

[10] Карпенко А.С. Фатализм и случайность будущего: Логический анализ. М.: Наука, 1990. 214 с.

[11] Łukasiewicz, J. O logice tr´owarto´sciowej // Ruch Filozoficzny 1920, 6. P.170–171.

истинными, так и ложными. Из ложных посылок могут следовать как истинные, так и ложные заключения. Но вот из истинных посылок должны следовать лишь истинные заключения, и лишь такое доказательство является научным.

Мало у кого возникали сомнения в том, что обоснованием логически правильных рассуждений является переход от истинных посылок к истинным заключениям. За этим стояли глубокие философские системы древности. Для Платона целью познания является мир вечных и неизменных идей, который один лишь обладает действительным бытием. Рассуждения, которые происходят с нарушением законов мира идей, с нарушением законов Истины, уводят нас в мир изменчивых явлений и потому недопустимы.

Для Аристотеля целью познания является познание вечных форм. Лишь относительно вечных форм могут быть высказаны истинные суждения. Научный силлогизм понимался им как переход от *безусловно истинных посылок* к истинным заключениям. Такой переход гарантировал, что знание, получаемое путем дедукции из исходных посылок, будет знанием о вечном.

Такое понимание следования не подвергалось сомнению. Это продолжалось вплоть до середины XIX в., когда стали появляться математические теории, говорить об истинности которых в прежнем смысле стало затруднительно. Обоснование логического следования в терминах сохранения истинности от посылок к заключениям начало терять смысл. Каким может быть обоснование рассуждений в геометрии Евклида в сравнении с геометрией Н.Лобачевского?

Понятие истинности в отношении математических теорий начало терять свой первоначальный смысл: *«"математическая истина" пребывает исключительно в логической дедукции из посылок, произвольно установленных аксиом»*[12]. В 1936 г. А. Тарский предложил строгое уточнение отношения логического следования, как семантического обоснования правильных рассуждений. Он вполне осознавал трудность поставленной задачи, но вместо того, чтобы предложить свое философское обоснования предлагаемого определения, всего лишь ссылается на согласованность с определением, которое ранее дал Р. Карнап, на «*определенные рассуждения интуитивного свойства*» и на складывающееся у него «*впечатление*», что все правильно. В результате предложенное А. Тарским определение логического следования явилось всего лишь механическим переносом старого аристотелевского определения в новый философский контекст. Если для Аристотеля доказательство исходит из безусловно истинных посылок и потому является познавательной процедурой, то для А. Тарского следование всего лишь способ связывания предложений в одну цепочку. Но в этом случае понятие истины при обосновании логического следования теряет свою исключительность, и вместо него могут быть использованы другие понятия.

Параграф четвертый - «Метод формализации». Первый шаг на пути к формализации логики сделал Аристотель, когда при изложении теории силлогистического вывода для обозначения общих имен стал использовать переменные. С тех пор одной из плодотворных тенденций развития логики была разработка и введение в нее специальной символики. Достаточно открыть любой том «Principia Mathematica», чтобы убедиться, какая большая работа в этом направлении была проделана.

В знаменитом выступлении на Международном математическом конгрессе 1900 г. Д. Гильберт сформулировал список из 23 наиболее важных проблем. На втором месте в этом списке стояла задача прямого доказательства непротиворечивости анализа.

В поисках способов решения данной задачи Д. Гильберт пришел к идее метаматематики - науки, объектами изучения которой должны были стать сами математические доказательства. Метод формализации требует выявления используемых понятий и представления их в строго заданном языке. Метод аксиоматизации требует

---

[12] Бурбаки Н. Очерки по истории математики. М.: Издательство иностранной литературы, 1963. С.28.

представления исходных положений теории в виде набора аксиом. Если задан язык, заданы аксиомы и заданы правила вывода, то появляется возможность отождествить теорию с множеством ее теорем. Это в свою очередь позволяет поставить на прочную математическую основу изучение отношений между различными логиками и теориями.

Варьируя множество исходных аксиом и правил вывода, мы получаем различные теории. В 1932 г. К. Гёдель показал, что между интуиционистской и классической логикой, понимаемых как множества теорем, существует еще, по крайней мере, счетное множество промежуточных логик, получивших название суперинтуиционистских. Позже было доказано, что таких логик даже не счетное множество, а континуум. Сначала этот результат поразил воображение, но прошло немного времени, и сегодня метатеоремами о континуальности расширений или о континуумах промежуточных логик никого уже не удивишь. Здравый смысл подсказывает, что на самом деле это не логики в старом добром смысле, а просто дедуктивно замкнутые множества формул. Но где критерий, чтобы отличить одно от другого? Если логика понимается как наука о должном, и мы хотели бы сохранить такое понимание, то не может быть даже двух различных логик.

К логике предъявляется естественное требование быть свободной от произвольно принятых допущений. Стремление удовлетворить этому требованию очень часто принимает форму перебора всех возможных вариантов. Так появляются многочисленные приспособленные на все случаи жизни логики, между которыми трудно осуществить осмысленный выбор.

Параграф пятый - «Классическая логика». Среди множества логик существует одна, которая занимает выделенное место. Речь идет о классической логике предикатов первого порядка. Основанием для особого отношения к ней является простота языка, простота интерпретации логических связок, простота стандартной реляционной семантики, а также ряд полезных свойств, которыми она обладает.

Однако язык логики предикатов налагает жесткие ограничения на способы выражения мысли. Мир, который можно описать с помощью этого языка, принципиально статичен. Чтобы рассуждать о пространстве, мы должны мыслить его в виде совокупности точек, находящихся друг с другом в тех или иных отношениях, но никак внутренне не связанных между собой. Время и движение на языке логики предикатов можно представить лишь кинематографически, как последовательность кадров, последовательность мгновенных состояний. Никакой внутренней связи между этими кадрами нет, она постулируется лишь внешним образом как некоторое отношение *раньше-позже*. Иллюзии течения времени и движения возникают лишь за счет частоты смены кадров.

Для классической логики предикатов построено несколько типов семантики, но наиболее прозрачной является реляционная. В ней индивидные переменные пробегают по элементам универсума рассуждения, предикатным символам сопоставлены отношения на элементах универсума рассуждения, функциональным символам сопоставлены функциональные отношения.

Канторовский рай в математике, культивируемые навыки мыслить в рамках теоретико-множественной парадигмы могут служить тормозом развитию науки. В подтверждение сказанному приведем пример из недавней истории математики, который хорошо известен, но недостаточно оценен логиками и методологами науки.

Одним из крупных достижений математики XX в. было создание комбинаторной логики Шейнфинкеля-Карри[13,14] и λ-исчисления А. Чёрча[15]. Произошло это в конце 20-х –

[13] Schönfinkel M. Über die Bausteine der mathematischen Logik // Mathematische Annalen, 92 (1924), S.305-316.

[14] Curry H.B. Grundlagen der kombinatorischen Logik // American Journal of Mathematics. V.52, P.509-536, P.789-834.

[15] Church A. The Calculi of Lambda-Conversion // Annals of Mathematical Studies. 1941, №6. 82 p.

начале 30-х гг., а осознание их огромного значения для науки стало приходить лишь сейчас. Одной из целей построения этих исчислений был поиск новых функциональных оснований математики.

Если теоретико-множественное представление функций является экстенсиональным, то в λ-исчислении они трактуются интенсионально, как некоторые предписания. Привычное со школьной скамьи представление функций в виде формул является примером вычислительного предписания, а λ-исчисление – это формализованная теория оперирования такими предписаниями. В 1936 году А. Чёрч средствами чистого λ–исчисления получил результат, который принес ему широкую известность. Он доказал существование неразрешимых проблем, откуда следовала неразрешимость арифметики и неразрешимость исчисления предикатов первого порядка. Результат о λ–определимости арифметических функций позволил А. Чёрчу сформулировать знаменитый тезис о том, что класс всех функций, которые вычислимы с интуитивной точки зрения, совпадает с классом функций, определимых в λ–исчислении. В 1937 году А. Тьюринг доказал, что класс λ–определимых функций совпадает с классом функций, определимых в его собственном формализме[16].

Предложенное А. Тьюрингом строгое уточнение понятия механического вычисления не вызывало никаких претензий. Можно было сомневаться лишь в том, действительно ли любое механическое вычисление может быть промоделировано с помощью *машин Тьюринга*, но сомнений в том, что это действительно вычисления, не было. Результат А. Тьюринга 1937 года по своей сути является доказательством полноты λ-исчисления относительно его собственного формализма. Таким образом, λ-исчисление получило очень хорошую вычислительную семантику, сомнений в надежности которой просто не существовало. Результаты о неразрешимости арифметики и исчисления предикатов первого порядка сразу стали широко известны и должны были бы привлечь к λ-исчислению особое внимание математиков и логиков. Но этого удивительным образом не произошло. Подавляющее большинство математической общественности просто игнорировало λ-исчисление и связанную с ним комбинаторную логику. Причина оказалась на удивление простой.

К тому времени теория множеств уже начала свое победное шествие как универсальный язык математики. Теоретико-множественная парадигма гласила, что все математические понятия могут и должны быть записаны на языке теории множеств, а то, что нельзя представить в этом языке, к математике имеет лишь весьма опосредованное отношение. Оказалось, что для λ-исчисления нельзя построить стандартную теоретико-множественную семантику, в которой λ-термы интерпретировались бы теоретико-множественными функциями. Еще раз подчеркнем, что λ-термы уже имели прекрасную функциональную интерпретацию в терминах машин Тьюринга, но не имели таковой в терминах теории множеств. Развитие λ-исчисления тормозилось лишь по той причине, что оно не имело удовлетворительной интерпретации в теории множеств. И это несмотря на то, что с его помощью был получен целый ряд важнейших математических результатов.

Та интерпретация функциональных символов, которая принята в реляционной семантике логики предикатов, не позволяла построить модель для λ-исчисления. Лишь в 1969 г., занимаясь построением теории вычислений высших порядков, Д. Скотт обнаружил, что может построить модель для безтипового λ-исчисления, которая в каком-то смысле может пониматься как функциональная. Элементами этой модели являются не функции в обычном смысле, ибо это как было, так и остается невозможным в рамках ZF, а бесконечные последовательности специально построенных функций. Затем были

[16] Turing, A.M. On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem // Proceedings of the London Mathematical Society, series 2, 42 (1936-37), P. 230-265.

построены и другие, более простые, модели. Сразу после того, как математики получили хоть и сложную, но все-таки теоретико-множественную модель λ-исчисления, количество работ по данной тематике резко увеличилось.

Урок, который следовало бы извлечь из этой истории, заключается в том, что претензии теории множеств на гибкость и универсальность являются не более чем претензиями. Ограничения, принимаемые в теории множеств, могут вступать в конфликт с запросами познавательной практики. История с λ-исчислением в каком-то смысле разрешилась, но никто не может дать гарантии, что другие ценные идеи не были или не будут отброшены лишь потому, что они невыразимы в стандартных теоретико-множественных терминах, и по одной этой причине кажутся ошибочными. Вывод, который необходимо сделать, очевиден. Логика не должна налагать никаких ограничений ни на язык, ни на модели изучаемой реальности.

Параграф шестой - «Наука без логики». В работах, связанных с историей науки, часто можно встретить утверждения о том, что появление во времена Древней Греции понятий доказательства и дедуктивного метода привело к ускорению развития науки и в первую очередь математики. В подтверждение этому приводят математические достижения, связанные с именами Пифагора, Теэтета, Евдокса, Евклида, Архимеда, Аполлония, Диофанта и др. Однако эти примеры сами по себе ничего не доказывают. Совершенно не понятно, о каком понятии доказательства идет речь? Мы прекрасно знаем, что выразительных возможностей языка аристотелевской логики совершенно не достаточно для того, чтобы в нем могли быть представлены действительно замечательные результаты, полученные математиками Древней Греции, Александрии, арабскими алгебраистами и др. Не столь велико и различие между методами получения нового математического знания учеными Древнего Востока и Древней Греции.

Известный алгебраист и историк математики Ван дер Варден пишет о Диофанте, что *«его методы имеют гораздо больше общего с вавилонской алгеброй, чем с характером мышления классических греческих ученых»*[17]. Бурбаки также признает, что влияние логики Аристотеля на развитие математики вовсе не столь значительно, как нам кажется.

Такое положение дел сохранялось вплоть до недавнего времени. Наука развивалась быстрыми темпами, но совершенно не понятно, как с логической точки зрения это было возможно. Можно не интересоваться формальной логикой, но в любом случае приходится придерживаться каких-то общепринятых способов аргументации, чтобы убеждать коллег в своей правоте, передавать знания в учебных классах и т.д. Невозможно для решения каждой новой задачи одновременно изобретать еще и новые способы рассуждений.

К попытке дать объяснение в терминах интуиции прибегает Х. Карри. Но ссылка на интуицию – это всего лишь уход от ответа, отговорка, которая сама по себе ничего не объясняет. Если до некоторых пор еще можно было полагаться на интуицию, то наступил момент, когда и этому пришел конец. В обиход стали входить новые математические структуры, которые явным образом противоречили интуиции. С другой стороны, аксиомы геометрии, истинность которых И. Канту представлялась очевидной, были поставлены под сомнение.

Параграф седьмой - «Итоги и перспективы». В 1991 году, выступая на IX Международном конгрессе по логике, методологии и философии науки, неутешительный итог развитию логики подвел Г.Х. фон Вригт. Он пришел к выводу, что логика в XXI в. уже не будет принадлежать к ведущим философским направлениям.

Действительно, логика сегодня уже не представляет единого целого и выглядит как совокупность методов, которые находят применение в других направлениях научных

[17] Варден Б.Л. ван дер Пробуждающаяся наука: Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции. М.: КомКнига, 2007. С.89.

исследований. Эти методы доказали свою эффективность, и строгость их такова, что они допускают реализацию даже в компьютерных системах, функционирующих по четко определенным алгоритмам.

С другой стороны, современная логика так и не выполнила своего глобального предназначения стать интеллектуальным проводником. Поскольку эта задача осталась нерешенной, не стоит торопиться с исключением логики из числа философских дисциплин. В конце XX – начале XXI вв. стала набирать силу встречная интеграционная тенденция поиска новых оснований логики[18], требующая деятельного участия философов.

ВТОРАЯ ГЛАВА - «**Функции vs отношения**» - посвящена вопросу сравнительной оценки выразительных возможностей языка логики предикатов первого порядка с равенством и субъектно-предикатных языков, расширенных за счет включения функциональных символов.

Довольно распространенной является точка зрения, что переход к современной логике, совершенный на рубеже XIX-XX вв., был связан с увеличением выразительных возможностей ее языка за счет включения в него, среди прочего, суждений об отношениях. Считается, что переход к языку и логике отношений был закономерным шагом, поскольку с его помощью появилась возможность дать более полное описание окружающего нас мира. Он благотворно сказался не только на самой логике, но и на общем развитии науки.

Вопреки устоявшемуся мнению язык свойств (одноместных отношений) и функций вполне достаточен для выражения тех же математических и физических идей, которые находят оформление в терминах многоместных отношений. С логической точки зрения, не было никакой необходимости для отказа от субъектно-предикатного языка и имевшей богатую историю субстантивной метафизики.

Параграф первый - «Логика функций» - посвящен доказательству того, что язык функций по выразительным возможностям не уступает языку отношений.

Пусть нам дана **теория $\mathbf{T_1}$** в языке исчисления предикатов первого порядка с равенством, одной из аксиом которой является формула $\neg(a = b)$, где a и b – замкнутые термы. Имеет место следующая лемма.

Лемма 1. Если P – n-местный предикатный символ языка теории T_1, то в ней доказуемы следующие формулы:

1) $\exists y((P(\boldsymbol{x})\ \&\ y=a) \vee (\neg P(\boldsymbol{x})\ \&\ y=b))$
2) $((P(\boldsymbol{x})\ \&\ y=a) \vee (\neg P(\boldsymbol{x})\ \&\ y=b))\ \&\ ((P(\boldsymbol{x})\ \&\ z=a) \vee (\neg P(\boldsymbol{x})\ \&\ z=b)) \supset y=z$

где $\boldsymbol{x}$ – кортеж из n попарно отличных переменных.

Это позволяет нам перейти к **теории $\mathbf{T_2}$**, полученной путем расширения языка теории T_1 за счет добавления для каждого n-местного предикатного символа P нового функционального символа f_P и принятия для каждого из них новой аксиомы $(P(\boldsymbol{x})\ \&\ f_P(\boldsymbol{x}) = a) \vee (\neg P(\boldsymbol{x})\ \&\ f_P(\boldsymbol{x}) = b)$, где $\boldsymbol{x}$ – кортеж из n попарно отличных переменных. Основанием для этого служит предложение 2.29 о введении новых функциональных символов из учебника Э. Мендельсона[19].

Лемма 2. В теории T_2 доказуемы следующие формулы:

1) $f_P(\boldsymbol{x}) = a \vee f_P(\boldsymbol{x}) = b$
2) $P(\boldsymbol{x}) \equiv f_P(\boldsymbol{x}) = a$

Лемма 3. Теории T_1 и T_2 взаимопогружаемы.

[18] Béziau J.-Y. 13 Questions about universal logic", Bulletin of the Section of Logic, 35 (2006), P.133-150.
[19] Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1976. 320 с.

Определим функцию α из языка теории T_2 в ее подъязык, содержащий лишь функциональные символы и единственный двухместный предикатный символ равенства.

- $\alpha(t_1 = t_2) \quad = \quad (t_1 = t_2)$
- $\alpha(P(t_1,\ldots,t_n)) = \quad f_P(t_1,\ldots,t_n) = a$
- $\alpha(\neg A) \quad = \quad \neg\alpha(A)$
- $\alpha(A\nabla B) \quad = \quad \alpha(A)\nabla\alpha(B) \qquad \nabla\in\{\&, \vee, \supset, \equiv\}$
- $\alpha(QxB) \quad = \quad Qx\alpha(B) \qquad Q\in\{\forall, \exists\}$

Определим **теорию T_3**. Пусть формула A является аксиомой теории T_3, если и только если $A = \alpha(B)$, где B собственная аксиома теории T_2.

Лемма 4. Теории T_2 и T_3 взаимопогружаемы.

Теорема 1. Для всякой первопорядковой теории в языке логики предикатов с равенством, в которой для некоторых двух замкнутых термов a и b доказуема формула $\neg(a = b)$, существует взаимопогрузимая с ней первопорядковая теория в языке с одними лишь функциональными символами и единственным предикатом равенства.

Оказывается, что мы можем пойти дальше и устранить равенство, заменив его единственным одноместным предикатным символом. Пусть **теория T_4** получена путем расширения языка теории T_3 новым одноместным предикатным символом H и добавлением новой аксиомы $H(x) \equiv x = a$.

Лемма 5. Теории T_3 и T_4 взаимопогружаемы.

Определим функцию β из языка теории T_4 в ее подъязык, содержащий лишь функциональные символы и единственный одноместный предикатный символ H.

- $\beta(H(t)) \quad = \quad H(t)$
- $\beta(t_1 = t_2) \quad = \quad H(f_=(t_1,t_2))$
- $\beta(\neg A) \quad = \quad \neg\beta(A)$
- $\beta(A\nabla B) \quad = \quad \beta(A)\nabla\beta(B) \qquad \nabla\in\{\&, \vee, \supset, \equiv\}$
- $\beta(QxB) \quad = \quad Qx\beta(B) \qquad Q\in\{\forall, \exists\}$

Определим **теорию T_5**. Формула A является аксиомой **теории T_5**, если и только если $A = \beta(B)$, где B либо аксиома равенства, либо собственная аксиома теории T_4.

Лемма 6. Теории T_4 и T_5 взаимопогружаемы.

Следующая теорема является простым следствие теоремы 1 и лемм 5 и 6.

Теорема 2. Для всякой первопорядковой теории в языке логики предикатов с равенством, в которой для некоторых двух замкнутых термов a и b доказуема формула $\neg(a = b)$, существует взаимопогрузимая с ней теория, язык которой содержит лишь функциональные символы и единственный одноместный предикат.

Параграф второй - «Функциональные расширения традиционных языков». Понятие функции в связи с механическими и геометрическими представлениями начало входить в регулярный научный обиход благодаря таким ученым как Ф. Виет, Р. Декарт, Г. Лейбниц, И. Ньютон, но обращение к функциональным зависимостям имеет более глубокие исторические корни. Примером функциональных зависимостей, которые широко использовались в математической практике, были геометрические построения. Сложные геометрические объекты мыслились не сами по себе, а как результат порождающих их операций. Первые же три постулата геометрии Евклида можно рассматривать как утверждения о конкретных функциональных связях между точками, линиями и окружностями.

1. Что от всякой точки до всякой точки <можно> провести линию.
2. И что ограниченную прямую <можно> непрерывно продолжать до прямой.
3. И что из всякого центра и всяким раствором <может быть> описан круг.[20]

Постулаты и теоремы Евклида нельзя записать не только на языке силлогистики Аристотеля, но и на его расширении, полученном за счет добавления логических связок. Причина не в том, что доказательства Евклида опираются на наглядные геометрические построения, а в языке силлогистики и логики высказываний ничего подобного нет. Диаграммы – это лишь вспомогательное средство для наглядной фиксации используемых функциональных связей. Требовалось время, чтобы ввести в логический язык понятие функции. Произошло это в XIX в. практически одновременно с возникновением современной символической логики, представители которой, впрочем, поспешили заявить об избыточности понятия функции и замене его функциональными отношениями.

Попробуем представить, какой могла бы стать логика, если бы понятие функции было введено в язык на несколько веков раньше. Могла бы расширенная таким образом традиционная логика послужить основанием других наук и в первую очередь математики? Насколько необходим был переход от субъектно-предикатной структуры атомарных предложений к реляционной? В том, что он не был необходим с теоретической точки зрения, мы уже убедились в предыдущем параграфе. Теперь же речь пойдет о конкретных языках логики и возможных, но нереализованных тенденциях их развития.

Начнем с расширения функциональными символами языка силлогистики. Мы сделаем это на примере первых трех постулатов геометрии Евклида.

Исходные символы:

1. *Точка*, *Линия*, *Ограниченная_линия*, *Круг* - общие имена;
2. *соединить(_,_)*, *продолжить(_)*, *описать(_,_)* - функциональные символы для представления элементарных геометрических построений;
3. **A, E, I, O** – силлогистические константы.

Общие термы:

1. Если *P* – общее имя, то *P* – общий терм;
2. Если *S* и *P* – общие термы, то *соединить(S,P)*, *продолжить(S)*, *описать(S,P)* – общие термы;
3. Ничто другое общим термом не является.

Формулы:

1. Если S и P – общие термы, то *(***A** *S P), (***E** *S P), (***I** *S P), (***O** *S P)* – формулы;
2. Ничто другое формулой не является.

Интерпретация выражений этого языка достаточно очевидна. Модель – это пара $M = <W, \psi>$, где ψ - функция интерпретации, обладающая следующими свойствами:

1. Если *P* – общее имя, то $\psi(P) \subseteq W$;
2. Если f – n-местный функциональный символ, то $\psi(f): W\times\ldots^{n}\times W \to W$.

Интерес представляет определение [t,M] - значения терма t в модели M.

1. Если P – общее имя, то $[P,M] = \psi(P)$
2. $[f(s_1,..,s_n),M] = \{\psi(f)(a_1,\ldots,a_n) \mid a_1 \in [s_1,M],\ldots, a_n \in [s_n,M]\}$

[20] Начала Евклида. Книги I-VI. ОГИЗ, Москва-Ленинград, 1948. С.14.

Истинность формулы в модели определим так же, как и в фундаментальной силлогистике.

1. $M \models (\mathbf{A}\ S\ P) \Leftrightarrow [S,M] \subseteq [P,M]$
2. $M \models (\mathbf{I}\ S\ P) \Leftrightarrow [S,M] \cap [P,M] \neq \varnothing$
3. . . . .

Приведенные выше три постулата геометрии Евклида могут быть записаны на этом языке следующим образом.

1. *(**A** соединить(Точка,Точка) Линия)*
2. *(**A** продолжить(Ограниченная_линия) Линия)*
3. *(**A** описать(Точка,Точка) Круг)*

Таким образом, язык силлогистики, расширенный функциональными символами, пригоден для представления достаточно сложных геометрических объектов и построений.

Интерес представляют языки сингулярной позитивной силлогистики, в элементарных формулах которых на месте субъекта могут стоять лишь единичные термы.

Исходные символы:

1. *a, b, c,...* – единичные имена;
2. *Точка*, *Линия*, *Ограниченная_линия*, *Круг* - общие имена;
3. *соединить(_,_)*, *продолжить(_)*, *описать(_,_)* - функциональные символы для представления элементарных геометрических построений;
4. *суть* - двухместная силлогистическая константа;
5. $\neg$, $\&$, $\supset$ - логические связки «не…», «…и…», «если…, то…».

Единичные термы:

1. Если *a* – единичное имя, то *a* – единичный терм;
2. Если *s, t* – единичные термы, то *соединить(s,t)*, *продолжить(s)*, *описать(s,t)* – единичные термы;
3. Ничто другое единичным термом не является.

Формулы:

1. Если *t* – единичный терм, а *P* – общее имя, то *(t суть P)* – формула;
2. Если *A* и *B* – формулы, то $\neg A$, $(A\&B)$, $(A\supset B)$ – формулы;
3. Ничто другое формулой не является.

Моделью языка будем называть пару $M = \langle W, \varphi\rangle$, где φ - функция интерпретации, обладающая следующими свойствами:

1. Если *a* – единичное имя, то $\varphi(a) \in W$;
2. Если *P* – общее имя, то $\varphi(P) \subseteq W$;
3. Если f – n-местный функциональный символ, то $\varphi(f){:}W\times\ldots^{n}\times W \to W$.

Определение значения терма в модели и значения формулы - очевидны, как и перевод на этот язык постулатов геометрии.

1. *(a суть Точка) & (b суть Точка)* $\supset$ *(соединить(a,b) суть Линия)*
2. *(a суть Ограниченная_линия)* $\supset$ *(продолжить(a) суть Линия)*
3. *(a суть Точка) & (b суть Точка)* $\supset$ *(описать(a,b) суть Круг)*

Очевидно, что предложенный язык совместим с языком предыдущего примера и является еще одним вариантом силлогистического подхода к построению геометрии.

Если внимательно посмотреть на первые три постулата геометрии Евклида, то можно заметить, что их вовсе не обязательно трактовать именно как постулаты.

Например, утверждение, что «*от всякой точки до всякой точки <можно> провести линию*», можно рассматривать, как определение типа функции *провести_линию(_,_)*.

Иначе говоря, первый постулат - это то же самое, что и определение правильно построенного терма:

- если t_1 и t_2 - термы с типом значений *Точка*, то *провести_линию*(t_1,t_2) - терм с типом значений *Линия*.

Аналогично остальные два постулата также можно считать определениями типов функций:

- если t - терм с типом значение *Ограниченная_линия*, то *продолжить*(t) - терм с типом значений *Линия*.
- если t_1 и t_2 - термы с типом значений *Точка*, то *описать*(t_1,t_2) - терм с типом значений *Круг*.

При таком истолковании первые три постулата Евклида относятся к определению языка. Они говорят о том, какого типа элементарные действия можно совершать с геометрическими объектами. Первое предложение «Начал» Евклида гласит:

«На данной ограниченной прямой построить равносторонний треугольник»[21]

В терминах типов функций это означает, что требуется найти функцию:

Предложение-1: Ограниченная_линия $\rightarrow$ *Равносторонний_треугольник*

Именно так и выглядят доказательства многих теорем. В первой части доказательства показывается, как из исходных или уже ранее построенных функций построить новую функцию. Во второй части доказательства демонстрируется, что тип значения новой функции соответствует тому, который требуется по условию задачи.

Выше мы ограничились примерами из геометрии, но могли бы обратиться и к арифметике. Возьмем в качестве исследуемой структуры натуральный ряд чисел в формулировке Пеано.

Аксиомы Пеано для натурального ряда чисел:

1. 0 есть натуральное число
2. Для любого натурального числа n существует другое натуральное число S(n)
3. $0 \neq S(n)$ для любого натурального числа n
4. Если $S(n) = S(m)$, то $n = m$
5. Если число 0 обладает свойством Q и для всякого числа n из того, что n обладает свойством Q, следует, что и S(n) обладает свойством Q, то свойством Q обладают все натуральные числа.

Исходные символы:

1. *P, S, M, Zero, Number* - общие имена;
2. *next(_)* – одноместный функциональный символ;
3. **A, E, I, O** – силлогистические константы;
4. $\neg$, $\&$, $\supset$ - логические связки «не…», «…и…», «если…, то…».

Термы:

1. Если *P* – общее имя, то *P* – терм;
2. Если *S* – терм, то *next(S)* - терм;
3. Ничто другое термом не является.

[21] Начала Евклида. Книги I-VI. ОГИЗ, Москва-Ленинград, 1948. С.15.

Формулы:

1. Если G и H – термы, то $(\mathbf{A}\ G\ H)$, $(\mathbf{E}\ G\ H)$, $(\mathbf{I}\ G\ H)$, $(\mathbf{O}\ G\ H)$ – формулы;
2. Если A и B – формулы, то $\neg A$, $(A\&B)$, $(A\supset B)$ – формулы;
3. Ничто другое формулой не является.

Модель – это пара $M = \langle W, \phi\rangle$, где W – некоторое множество, а ϕ - функция интерпретации, обладающая следующими свойствами:

1. Если P – общее имя, то $\phi(P) \subseteq W$;
2. $\phi(next)$: $W \to W$.

Значение терма в модели определим следующим образом.

1. Если P – общее имя, то $[P,M] = \phi(P)$
2. $[next(G),M] = \{\phi(next)(a)|\ a\in [G,M]\}$

Истинность атомарных формул в модели определим так же, как и в фундаментальной силлогистике:

1. $M \models (\mathbf{A}\ S\ P) \Leftrightarrow [S,M] \subseteq [P,M]$
2. $M \models (\mathbf{I}\ S\ P) \Leftrightarrow [S,M] \cap [P,M] \neq \varnothing$
3. . . . .

Определим отношение равенства между общими именами:

$(\mathbf{Eq}\ S\ P) =_{\text{def}} (\mathbf{A}\ S\ P)\ \&\ (\mathbf{A}\ P\ S)$

Следующие шесть формул и правило индукции можно рассматривать как аксиоматическое определение натурального ряда. В каждой модели, в которой истинны все эти формулы, общему имени *Number* сопоставлено бесконечное множество, замкнутое относительно операции $\phi(next)$.

1. $(\mathbf{I}\ Zero\ Zero)$
2. $(\mathbf{A}\ Zero\ Number)$
3. $(\mathbf{A}\ G\ Number) \supset (\mathbf{A}\ next(G)\ Number)$
4. $(\mathbf{E}\ Zero\ next(G))$
5. $(\mathbf{Eq}\ G\ H) \supset (\mathbf{Eq}\ next(G)\ next(H))$
6. $(\mathbf{Eq}\ next(G)\ next(H)) \supset (\mathbf{Eq}\ G\ H)$

$$(\text{Ind})\ \frac{(\mathbf{A}\ Zero\ H),\ (\mathbf{A}\ G\ H) \supset (\mathbf{A}\ next(G)\ H)}{(\mathbf{A}\ Number\ H)}$$

Следует обратить внимание на то, что натуральное число ноль в этом языке представлено общим именем *Zero*. Вместо аксиомы, выражающей принцип индукции, мы включили правило индукции. Связано это с тем, что в языке нет кванторов, и потому записать аксиому индукции в виде одной формулы не представляется возможным.

Стандартная модель этих аксиом имеет вид $M = \langle \boldsymbol{N}, \nu\rangle$, где $\boldsymbol{N}$ – натуральный ряд $\{0,1,\ldots\}$, а ν - функция интерпретации, обладающая следующими свойствами:

1. $\nu(Zero) = \{0\}$;
2. $\nu(Number) = \boldsymbol{N}$;
3. Если P – общее имя, то $\nu(P) \subseteq W$;
4. $\nu(next)(n) = n+1$.

В стандартной модели натуральным числам соответствуют одноэлементные подмножества основного множества $\boldsymbol{N}$.

Таким образом, арсенал логико-математических структур, которыми на протяжении многих веков располагали ученые, был достаточно внушительным для того, чтобы с его помощью могли развиваться точные науки. Недоставало лишь удобной и единообразной логической символики для представления сложных математических конструкций. Эта задача была решена Дж. Пеано.

Параграф третий - «К вопросу о генетических способах рассуждений». Время от времени в логической литературе можно встретить упоминания о генетическом стиле мышления, генетических способах рассуждений, генетической дедукции и о генетическом методе построения теорий в его противопоставлении аксиоматическому[22]. При этом авторы обычно ограничиваются примерами, но не формулируют сути генетического подхода столь же строго, как это было сделано в отношении аксиоматического. Вопрос, что такое генетические способы рассуждений, и что такое генетический метод построения теорий, остается без ответа.

Д. Гильберт считает, что генетический метод лежит в основе построения арифметики. Отличительной чертой его является то, каким образом вводятся объекты исследования. По его мнению, геометрия, в отличие от арифметики, строится аксиоматически.

С. Клини, говоря о генетическом методе, также обращает внимание на способы задания исходных объектов теории. Он прямо связывает этот метод с интуиционизмом Л. Брауэра, но отказывает в этом геометрии Евклида. Говоря о Л. Брауэре, С. Клини косвенным образом признает также существование особых способов рассуждений об объектах, которые введены генетически. Именно в одновременном использовании генетического метода задания объектов теории и конструктивных (генетических) способов рассуждений он видит одну из заслуг Л. Брауэра.

В том, что Д. Гильберт считал метод построения геометрии Евклида аксиоматическим, а арифметики - генетическим, проявилась неопределенность критериев. Многие, наоборот, относят геометрию Евклида к генетическим, а не аксиоматическим теориям, обращая в первую очередь внимание не на метод задания исходных объектов теории, а на используемые способы рассуждений.

На существование особых способов рассуждений, примеры которых можно обнаружить не только в Древней Греции, но и в странах Древнего Востока, обратила свое внимание и С.А. Яновская. В основе этих способов рассуждений, по ее мнению, лежат алгоритмические построения.

Подробный анализ генетического метода осуществил В.А. Смирнов[23]. Именно у него мы встречаем ясное указание на два основных отличия этого метода от аксиоматического *«…во-первых, в способе введения объектов теории и, во-вторых, в логической технике этих теорий»*[24]. В.А. Смирнов не только констатировал факт существования генетического стиля мышления, но и поставил задачу его формализации. Возможное решение он видел в том, что при генетическом стиле мышления элементами цепочки рассуждения не обязательно являются высказывания, а доказуемыми выражениями - законы логики. Иным должен быть и способ обоснования правильности рассуждений. В основе перехода от одних элементов к другим лежат алгоритмические

---

[22] Бирюков Б.В. О научных результатах Германа и Роберта Грассманов в свете последующих исследований логики мышления // Грассман Г., Грассман Р. Логика и философия математики. Избранное. М.: Наука, 2008. С. 347-457.; Гильберт Д. Основания геометрии. ОГИЗ, Москва-Ленинград , 1948. С. 315-321.; Клини С.К. Введение в метаматематику. М.: Иностранная литература, 1957. 526 с.; Смирнов В.А. Генетический метод построения научной теории // Логико-философские труды В.А. Смирнова. М.: Эдиториал УРСС, 2001. С. 417-437.; Степин В.С. Теоретическое знание. М.: Прогресс-Традиция, 2003. 744 с.

[23] Смирнов В.А. Генетический метод построения научной теории // Логико-философские труды В.А. Смирнова. М.: Эдиториал УРСС, 2001. С. 417-437.

[24] Там же. С.422.

процессы, а не свойство сохранение истинности высказываний. Это требует изменения устоявшихся взглядов на природу логики.

Из работ последнего времени следует выделить статью Б.В. Бирюкова, в которой он подробно анализирует вклад в логику и философию математики Германа и Роберта Грассманов. Именно они стоят у истоков современной теории рекурсии, связь которой с генетическим стилем мышления не вызывает сомнения.

Генетический подход к построению теорий привлекает внимание не только математиков и логиков, но и исследователей, занимающихся вопросами эпистемологии. В.С. Степин обращает внимание на то, что «*генетический метод предполагает оперирование непосредственно с абстрактными объектами теории, зафиксированными в соответствующих знаках*»[25]. При выведении основных следствий физических теорий «*большую роль играют мысленные эксперименты с абстрактными объектами теоретических схем*»[26]. Многочисленные конкретные примеры из физической научной практики более адекватно описываются именно в терминах генетического, а не аксиоматического стиля мышления.

Так что же такое генетический метод построения теорий и генетический стиль мышления? Прежде всего, отметим, что метод введения объектов теории не увязан жестко с используемыми способами рассуждений. Возможны разные их сочетания.

	Генетический метод задания исходных объектов	Конструктивные рассуждения
Интуиционизм Л. Брауэра	да	да
Геометрия Евклида	нет	да
Формализация арифметики Д. Гильбертом	да	нет
Аксиоматизация геометрии Д. Гильбертом	нет	нет

Общей чертой теорий, которые стоят в первых трех строчках таблицы, и которые разными авторами в разное время были отнесены к генетическим, является функциональность их языка. Это наводит на мысль, что *генетический* стиль мышления очень близок к *функциональному* стилю, а возможно и тождественен ему. Он возник, когда понятия функции еще не существовало, но функциональными связями в виде предписаний и алгоритмических построений уже начали пользоваться. В этом секрет конструктивных черт генетического метода, на которые часто обращают внимание.

Как уже было показано в первом параграфе настоящей главы, язык функций по своим выразительным возможностям не отличается от языка отношений. Функциональный стиль мышления и сегодня продолжает играть в науке важную роль. Если наша гипотеза верна, то выбор между *генетическим* и *не-генетическим* методом построения теории или стиля мышления связан лишь с выбором в интервале между чисто функциональными и чисто реляционными языками. Исторический приоритет принадлежит функциональным языкам.

ТРЕТЬЯ ГЛАВА исследования - **«Введение в протологику»** - является центральной.

Без ответа остается вопрос о том, как было возможно на протяжении веков развитие науки при достаточно выразительных возможностях языка, но явно недостаточном уровне логики? Как, получив интересный результат, один ученый мог сообщить его другому ученому? Как он мог убедить другого в правильности полученного

[25] Степин В.С. Теоретическое знание. М.: Прогресс-Традиция, 2003. С.128.
[26] Там же.

результата? Что могло убедить ученых в существовании математических объектов, которые противоречили всякой интуиции, и которые невозможно было обосновать логически? К каким способам аргументации они могли в этом случае прибегать?

Может быть, логика здесь ни при чем? Ведь и сегодня мало что изменилось. Логику, если и начинают изучать, то лишь в высших учебных заведениях, а до этого на протяжении долгих школьных лет огромные объемы знаний усваиваются без какого-либо обращения к ней. Тех, кто все-таки изучал логику и осознанно применяет ее в своей практике, единицы, и профессиональная деятельность подавляющего большинства этих единиц связана с самой логикой. При этом миллионы людей вовлечены в научную деятельность и еще больше занято в современном высокотехнологичном производстве, требующем развитых интеллектуальных способностей и умения ими пользоваться. Как им это удается? Может быть, "*…люди логично мыслят и без предварительного изучения логики»?*[27] Но в этом случае данную способность они должны приобретать каким-то иным естественным путем. Разгадка может заключаться в том, что язык вовсе не нейтрален по отношению к логике, и умение логично мыслить есть побочный результат овладения им. Одним из механизмов, объясняющих это, может быть существование особого *отношения детерминации* между выражениями языка.

Поскольку в дальнейшем изложении мы будем часто употреблять термины *знак* и *знаковая система*, внесем ясность в используемую терминологию. Ситуация, в которой некоторый объект выступает в роли знака, содержит три обязательных элемента: *знак*, *означаемое* и *интерпретатора*. Их взаимоотношение заключается в том, что *знак* представляет (репрезентирует, замещает) *означаемое* для *интерпретатора*. Такую ситуацию называют знаковой или *семиозисом*.

Знаковая система – это структурно организованная совокупность знаков, в которой можно выделить *синтаксическую*, *семантическую* и *прагматическую* составляющие. Синтаксис знаковой системы определяет, какие объекты считаются ее знаками, как они относятся друг к другу и каким преобразованиям подчиняются. Семантические свойства знаковой системы связаны с отношением знаков к означаемым ими объектам. Прагматическая составляющая – это отношение интерпретатора к знакам и тому, что они представляют.

Параграф первый - «Протологическое следование». Великая сила языка, как инструмента познания, заключается в том, что он дает нам возможность оперировать объектами внеязыковой реальности на уровне их знакового представления. Нет необходимости совершать физические действия и путем проб и ошибок приходить к желаемому результату. Вместо этого мы можем совершать необходимые манипуляции с выражениями языка и лишь в случае достижения успеха реализовывать то же самое, но уже на уровне реальных объектов. Требуется лишь не терять соответствия, которое существует между выражениями языка и объектами внеположной реальности. Это является одним из необходимых условий правильности нашей языковой деятельности. В этом случае архитектор, построив чертеж нового здания, может быть уверен в том, что его действительно можно будет воплотить в реальное строение.

Оперирование выражениями языка можно представить как цепочку переходов от одних выражений к другим. Одни переходы между выражениями обосновываются уже известными свойствами соотнесенных им объектов, т.е. семантически. Другие - получают обоснование благодаря структурным свойствам самого языка, т.е. синтаксически. Цепочки переходов между выражениями языка являются аналогом того, что мы называем рассуждениями, но они не обязательно связывают одни лишь предложения. Мы предпочитаем говорить о выражениях языка, или о термах, без привязки к типам их

[27] Сидоренко Е.А. Логика. Парадоксы. Возможные миры. (Размышления о мышлении в девяти очерках.) М.: Эдиториал УРСС, 2002. С.22.

значений. Семантическое обоснование переходов между выражениями/термами языка будем называть *протологическим следованием*, которое в первом приближении можно определить следующим образом.

Из B протологически следует A, если и только если значение выражения B детерминирует значение выражения A.

Понятие истинности не является необходимым для определения протологического следования. Истинность и ложность - это всего лишь конкретный тип значений для частного вида выражений, мы же хотим, чтобы наше определение было применимо к выражениям любой знаковой системы.

Чтобы данное определение стало пригодным для использования, мы должны уточнить термин «*детерминирует*». В качестве его синонима будем употреблять выражение «*существует правило»*. Правило же, в свою очередь, может пониматься как предписание по выполнению определенных действий для вычисления функции. Поэтому уточнением термина «*детерминирует*» может быть и выражение «*существует функция*». Заметим, что это всего лишь одно из возможных уточнений термина «*детерминирует*», которого мы будем придерживаться в настоящем исследовании, но допускаем и даже настаиваем на том, что могут быть и другие его уточнения.

В дальнейшем мы будем определять следование не между двумя выражениями языка, а между некоторым конечным, возможно пустым, множеством выражений $\Sigma = \{B_1, \dots, B_n\}$, где $n \geq 0$, именуемых посылками, и отдельным выражением A.

Из посылок $\Sigma = \{B_1, \dots, B_n\}$ протологически следует выражение A, если и только если существует правило, позволяющее на основании значений посылок Σ определить значение выражения A.

Это определение не нуждается в уточнении того, о каких конкретно языковых выражениях идет речь, какова природа соответствия между этими выражениями и внеязыковой реальностью, что из себя эта реальность представляет. Мы всего лишь принимаем предпосылку о существовании языка как знаковой системы.

Параграф второй - «Язык переменных». Пусть дана абстрактная знаковая система, о свойствах синтаксиса, семантики и прагматики которой нам ничего не известно. Языком, описывающим такую знаковую систему, будет язык переменных. Можно показать, что в этом случае отношение протологического следования обладает следующими свойствами:

1) Если $\Sigma \Vert\!= X$, то $\Sigma \cup \Delta \Vert\!= X$;
2) Если $\Sigma \Vert\!= Y$ и $\Delta \cup \{Y\} \Vert\!= X$, то $\Delta \cup \Sigma \Vert\!= X$;
3) Если $X \in \Sigma$, то $\Sigma \Vert\!= X$;
4) $\{X\} \Vert\!= X$.

Параграф третий - «Язык с константами». Рассмотрим язык, содержащий в дополнение к переменным еще и константы. Язык констант – это язык субъекта, который открыл для себя, что в окружающей его реальности существуют различные объекты, и сопоставил им знаки, но ничего другого о них не знает. Его язык пока не приспособлен для того, чтобы выражать какие-либо связи между объектами. Протологическое следование языка констант обладает дополнительным свойством:

5) Если $a \in \mathrm{Const}$, то $\Sigma \Vert\!= a$.

Параграф четвертый - «Язык сложных выражений». До сих пор рассмотренные нами знаковые системы лишь с большой натяжкой можно было называть языками, поскольку язык – это не просто набор некоторых атомарных знаков, а система, в которой можно выделить простые знаки низшего уровня и составленные из них сложные знаки.

В языке, состоящем из одних простых выражений, не может быть выражен никакой сложный опыт. Простые выражения могут лишь представлять отдельные объекты мысли. Чтобы выражать еще и связи, существующие между означаемыми объектами, необходим развитый синтаксис.

Развитый синтаксис приводит к появлению новых детерминаций между выражениями языка. Всякий переход по правилам синтаксиса языка от выражений $X_1, \ldots, X_n$ к составленному из них более сложному выражению $\langle X_1, \ldots, X_n \rangle$ является абстрактным примером детерминации и может быть отнесен к протологике. Осваивая синтаксис и семантику языка, мы научаемся правилам построения сложных выражений и умению их интерпретировать независимо от того, встречались они нам ранее или нет. Это и есть детерминация одних выражений другими, которая имеет нормативный характер для всех носителей данного языка. Именно благодаря существованию такого рода детерминаций мы получаем возможность усваивать и передавать новое знание, поскольку новое знание может быть выражено в языке лишь новой ранее не встречавшейся комбинацией его выражений.

Исходные символы языка:

1. $x, y, z, \ldots \in Var$ – переменные;
2. $a, b, c, \ldots \in Const$ – константы;
3. $\langle\rangle^{k,i}, \langle\rangle^{m,j}, \ldots \in Op$ – термообразующие операторы.

Термообразующие операторы представлены различными видами скобок. Сложное выражение – это заключенная в скобки последовательность более простых выражений.

Термы (Term):

1. Если $x \in Var$, то x – терм;
2. Если $a \in Const$, то a – терм;
3. Если $X_1, \ldots, X_n$ – термы, а $\langle\rangle^{n,i}$ – оператор, то $\langle X_1, \ldots, X_n \rangle^{n,i}$ - терм;
4. Ничто другое термом не является.

Моделью будем называть пару $M = \langle W, \varphi \rangle$, состоящую из непустого множества W, и функции интерпретации φ, сопоставляющей константам языка их значения, а операторам – функции на W.

1. $\varphi(a) \in W$ - $a \in Const$;
2. $\varphi(\langle\rangle^{n,i}) : W \times \ldots^{n} \times W \to W$ - $\langle\rangle^{n,i} \in Op$.

Множество всех функций приписывания обозначим посредством $Val = W^{Var}$.

Значение терма в модели:

1. $[x,M,v] = v(x)$ - $x \in Var$
2. $[a,M,v] = \varphi(a)$ - $a \in Const$
3. $[\langle X_1, \ldots, X_n \rangle^{n,i}, M, v] = \varphi(\langle\rangle^{n,i})([X_1,M,v], \ldots, [X_n,M,v])$

Обратим внимание на некоторые особенности определения значения терма в модели. Возьмем сложное арифметическое выражение $\langle x,+,y \rangle^3$. Его значением в модели M, согласно принятым определениям, будет $\varphi(\langle\rangle^3)(v(x),\varphi(+),v(y))$. В этой записи $\varphi(+)$ – не двухаргументная функция на W, а всего лишь соотнесенный знаку “+” элемент W, статус которого в этом смысле ничем не отличается от v(x) или v(y).

Определение следования выглядит следующим образом:

$$\Sigma \models X \Leftrightarrow \forall M\, \exists X_1, \ldots, X_n \in \Sigma\, \exists f\, \forall v \in Val([X,M,v] = f([X_1,M,v], \ldots, [X_n,M,v])),\ n \geq 0$$

Оно обладает еще одним дополнительным свойством:

6) Если $\Sigma \Vdash X_1, \ldots, \Sigma \Vdash X_n$, то $\Sigma \Vdash \langle X_1, \ldots, X_n \rangle^{n,j}$.

Доказана лемма, что если ограничиться языками, в которых множество термообразующих операторов Ор состоит из единственного двухместного оператора $\langle\rangle^2$, это не приведет к уменьшению их выразительных возможностей.

Параграф пятый - «Лингвистический априоризм». В свое время идея априоризма была призвана помочь дать ответ на вопрос, как возможно математическое знание и в чем причина его необычайной эффективности? Попытка объяснить с помощью спекулятивного предположения о существовании априорных форм чувственности и априорных созерцаний пространства и времени оказалась неудачной. Тем не менее, сама идея существования таких форм остается привлекательной и сегодня.

Если априорные формы существуют, то какова может быть их природа, и где их можно было бы обнаружить? Мы хотели бы эти формы именно обнаружить, понимая при этом априорность в буквальном смысле.

Естественным кандидатом на область поиска является языковая среда, поскольку всегда наш опыт и наши знания мы фиксируем с помощью того или иного языка. Мы знаем, что язык может подталкивать нас к принятию конкретных категориальных структур. На это, в частности, обратил внимание французский лингвист Эмиль Бенвенист, показав, что категории, выделенные в свое время Аристотелем, на понятийном уровне всего лишь отражали состояние древнегреческого языка.

Выбрав языковую среду, мы должны рассмотреть язык, который не привязан ни к какой конкретной категориальной структуре, опустошенный язык, язык логического субъекта, еще не приступившего к процессу познания. Если нам удастся обнаружить в нем устойчивые независимые от какого-либо опыта формы и правила оперирования ими, то они, по сути, и будут играть роль априорных. Всякий опыт, зафиксированный в языке, должен будет, так или иначе, согласовываться с ними.

Как уже отмечалось ранее, язык – это не просто набор некоторых знаков, а система, в которой можно выделить простые знаки низшего уровня и составленные из них сложные знаки. И именно в этом смысле *существование простых и сложных выражений языка является лингвистически априорным*, и не зависит ни от какой конкретной схемы категориального членения окружающей реальности.

Допустив существование априорных форм чувственности, Кант приходит к выводу о необходимости существования науки, которая исследовала бы происхождение знаний, единственным источником которых являются эти априорные формы. Возможны ли знания, единственным источником которых являются априорные формы языка? Для ответа на поставленный вопрос необходимо исследовать способы оперирования ими, которые также могли бы быть признаны независимыми от опыта.

Переход от выражения языка, которому соответствует один объект мысли, к другому выражению, которому соответствует объект мысли, отличный от первого, возможен лишь на основании опыта, т.е. в том случае, если мы уже что-то знаем об этих объектах и связях между ними. Лингвистически априорные операции могут допускать лишь семантически тождественные преобразования. Оказывается, что такие операции существуют и к тому же хорошо нам известны. Речь идет о введении номинальных определений и обратной операции замены языковых выражений согласно ранее принятым определениям. Номинальное определение можно понимать как внутриязыковое соглашение о сокращении сложных выражений, которое логический субъект (интерпретатор) заключает с самим собой. В этом смысле данная операция не зависит от возможных интерпретаций языка и потому является *лингвистически априорной*.

Если историю возникновения логики вести со времен Платона и Аристотеля, то окажется, что одновременно это была и история теории определений, которая традиционно считается одним из разделов логики. Для произвольного выражения *B* логический субъект может ввести в язык некоторое новое выражение *A*, которое отныне будет считаться сокращением для *B*. В будущем выражение *A* может участвовать в построении более сложных выражений, но при этом логический субъект всегда помнит, сокращением чего оно является, и оставляет за собой право в случае необходимости заменить одно на другое. Очевидно, что с точки зрения возможных интерпретаций этих выражений, такая замена подчиняется закону тождества, но с точки зрения их структуры она не является тождественной. Это первая особенность данной операции, на которую необходимо обратить внимание. Вторая особенность заключается в том, что принятие определения всегда связано с расширением языка, так как выражение *A* обязательно должно содержать некоторый новый ранее не встречавшийся символ. Если бы такого символа не было, то выражение *A* совпадало с одним из уже имеющихся выражений языка, и принятие определения было бы равнозначно принятию постулата, ограничивающего возможные интерпретации языка. Чтобы избежать этого, как раз и вводится новый символ. За ним закрепляется конкретный объект мысли, он становится абстрактным представителем структуры выражения *B*.

Параграф шестой - «Дефинициальный язык». Расширим понятие языка как знаковой системы, обогатив его правилом введения номинальных определений. Для этого мы должны определить язык, в котором могут быть представлены как операции принятия номинальных определений, так и операции замены согласно ранее принятым определениям.

Исходные символы языка:

1. x, y, z, … $\in$ Var – переменные;
2. Const – множество констант;
3.), (- скобки.

В начальном состоянии языка, когда логический субъект еще не приступил к познанию, множество констант пусто, но затем оно наполняется символами, которые становятся представителями внеязыковых объектов. Важная особенность дефинициального языка, который мы собираемся рассмотреть, заключается в том, что множество его правильно построенных выражений не является фиксированным, а определяется относительно текущего множества констант. Он динамичен по своей природе.

Термы:

1. Если x$\in$Var, то x – атомарный терм;
2. Если c$\in$Const, то c – атомарный терм;
3. Если X и Y – термы, то (XY) - терм;
4. Ничто другое термом не является.

Будем обозначать посредством Term(Const) множество правильно построенных термов, определенных относительно множества констант Const.

Поскольку при нашем определении терма он может содержать много скобок, будем опускать часть из них, предполагая ассоциацию влево при восстановлении. Например, терм (((XY)Z)U) после опускания скобок может быть записан просто как XYZU, а терм ((X(YZ))U) примет вид X(YZ)U.

Для обозначения графического тождества термов X и Y будем использовать запись X $\equiv$ Y. Тогда определение одновременной подстановки термов $Z_1,\dots,Z_n$ в терм T вместо всех вхождений переменных $x_1,\dots,x_n$. выглядит следующим образом:

1. $x_i[Z_1/x_1,\ldots,Z_n/x_n] \equiv Z_i$ - $1 \le i \le n$
2. $y[Z_1/x_1,\ldots,Z_n/x_n] \equiv y$ y - атомарный терм, отличный от x_i, $1 \le i \le n$
3. $(XY)[Z_1/x_1,\ldots,Z_n/x_n] \equiv (X[Z_1/x_1,\ldots,Z_n/x_n])(Y[Z_1/x_1,\ldots,Z_n/x_n])$.

FV(T) - множество всех переменных, входящих в терм T:

1. $FV(x) = \{x\}$, где $x \in Var$;
2. $FV(c) = \varnothing$, где $c \in Const$;
3. $FV(XY) = FV(X) \cup FV(Y)$.

Далее мы должны рассмотреть операцию принятия номинальных определений, влекущую за собой расширение языка. Нас будут интересовать явные определения следующего вида.

$$A =_{def} B$$

Левая часть этого выражения, обозначенная буквой *A*, называется *определяемым* (дефиниендумом), а правая часть, обозначенная буквой *B*, - *определяющим* (дефиниенсом). Символ "$=_{def}$" «*указывает, что принята конвенция считать, что выражение A означает то же самое, что и выражение B*»[28]. В левой части определения обязательно присутствует новый так называемый *определяемый термин*, который вводится в язык, расширяя его.

С формальной точки зрения, к явным определениям предъявляются два основных требования[29]. *Во-первых*, введение посредством определений в язык новых символов должно удовлетворять условию консервативности. Т.е. не приводить к тому, что ранее недоказуемые утверждения языка L становятся доказуемыми в расширенном языке L^+. *Во-вторых*, мы должны иметь возможность сводить выражения языка L^+ к выражениям языка L, заменяя *определяемое* на *определяющее*.

Пусть дан некоторый терм T, для которого логический субъект хочет ввести номинальное определение-сокращение. Для этого он должен расширить свой язык новой константой D, т.е. добавить ее к множеству констант Const и соответствующим образом изменить определение термов. Затем он должен выбрать один из новых термов языка, содержащий константу D, и запомнить его как сокращение для терма T. Отныне добавленной к языку новой константе D в результате принятия определения будет соотноситься конкретный объект мысли. Ее можно понимать либо как абстракцию структуры терма T, либо как код его построения.

При таком понимании определение является не термом, а именно операцией – соглашением о сокращении термов, которое логический субъект заключает с самим собой, и результат которого может быть представлен парой термов. Множество принятых определений мы будем представлять множеством пар термов, удовлетворяющих определенным ограничениям. Определения будут иметь вид пары $\langle Dx_1\ldots x_n, T\rangle$, где T – это *определяющее*, т.е. терм, для которого мы хотим принять определение-сокращение, а $Dx_1\ldots x_n$ – это *определяемое*, тоже терм, но в отличие от терма T принадлежащий языку, расширенному новой константой D.

Языковая структура – это пара $S = \langle Term(Const), \Delta\rangle$, состоящая из множества термов Term(Const) и множества пар термов $\Delta \subseteq Term(Const)\times Term(Const)$.

Множество пар Δ понимается как множество определений. Принятие нового определения приводит к расширению языковой структуры.

---

[28] Бочаров В.А., Маркин В.И. Основы логики. Учебник. М.: Космополис, 1994. С.201.

[29] Карпович В.Н. Термины в структуре теории. Новосибирск.: Наука, 1978. 128 с.; Gupta A. Definitions. The Stanford Encyclopedia of Philosophy, Edward N. Zalta (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/entries/definitions/>.; Suppes P. Introduction to Logic. Princeton, 1957. 312 p.

Если имеется множество определений Δ, терм T и константа D, удовлетворяющие ограничениям $T \in \mathrm{Term(Const)}$, $D \notin \mathrm{Const}$, и $FV(T) \subseteq \{x_1,\ldots,x_n\}$, то мы можем добавить к множеству Δ новое определение $<Dx_1\ldots x_n, T>$.

$$\text{(DI)} \quad \frac{<\mathrm{Term(Const)}, \Delta>}{<\mathrm{Term}(\mathrm{Const}\cup\{D\}), \Delta\cup\{<Dx_1\ldots x_n, T>\}>} \quad , \text{где } T \in \mathrm{Term(Const)},\ FV(T)\subseteq\{x_1,\ldots,x_n\}, \quad D\notin \mathrm{Const} \text{ – новая константа}$$

С помощью этого правила *введения определений* мы можем представить расширение языка новыми константами в виде некоторой дедукции языковых структур.

Дефинициальным языком будем называть языковую структуру, полученную путем последовательного расширения структуры $<\mathrm{Term}(\mathrm{Const}_0), \varnothing>$, где Const_0 – это начальное, возможно пустое, множество констант.

Если говорить более строго, то $L = <\mathrm{Term(Const)}, \Delta>$ называется *языком*, если и только если существует такая последовательность языковых структур $<S_0,\ldots, S_n>$, что $n\geq 0$, $S_0 = <\mathrm{Term}(\mathrm{Const}_0), \varnothing>$, $S_n = <\mathrm{Term(Const)}, \Delta>$ и для всякого $0\leq i<n$ языковая структура S_{i+1} является расширением языковой структуры S_i по правилу введения определений DI.

Примем следующие соглашения:

1. Если $L = <\mathrm{Term(Const)}, \Delta>$ - язык, то будем называть Δ *множеством определений*;
2. Элементы $<Dx_1\ldots x_n, T>$ множества Δ будем называть *определениями*, и для удобства записывать в виде $Dx_1\ldots x_n =_{def} T$;
3. Для обозначения констант, вводимых определениями, и составленных из них термов, будем использовать жирные заглавные буквы латинского алфавита;
4. Для языка $L = <\mathrm{Term(Const)}, \Delta>$, будем использовать сокращенное обозначение $L(\Delta)$ и вместо $X \in \mathrm{Term(Const)}$ писать $X \in L(\Delta)$.
5. Посредством $X\{T\}$ будем обозначать конкретное выделенное вхождение терма T в терм X.

Следующее *правило замены* позволяет осуществлять замену выражений языка согласно ранее принятым определениям.

Если $X\{\mathbf{D}Y_1\ldots Y_n\}$ – терм языка $L(\Delta)$, с выделенным вхождением терма $\mathbf{D}Y_1\ldots Y_n$, где $\mathbf{D}x_1\ldots x_n =_{def} T \in \Delta$, то $X\{T[Y_1/x_1,\ldots,Y_n/x_n]\}$ есть результат замены выделенного вхождения $\mathbf{D}Y_1\ldots Y_n$ на $T[Y_1/x_1,\ldots,Y_n/x_n]$.

$$\text{(DE)} \quad \frac{X\{\mathbf{D}Y_1\ldots Y_n\}}{X\{T[Y_1/x_1,\ldots,Y_n/x_n]\}} \quad , \quad \text{где } \mathbf{D}x_1\ldots x_n =_{def} T \in \Delta$$

Выводом в дефинициальном языке $L(\Delta)$ терма X из конечного множества термов Σ, называется такая непустая конечная последовательность термов $<X_0,\ldots, X_n>$, что $n\geq 0$, $X_n = X$ и для всякого $0\leq i\leq n$ терм X_i либо является элементом Σ, либо получен по правилу DE из предшествующих термов последовательности. В дальнейшем мы будем использовать запись $\Delta;\Sigma > X$ в качестве утверждения о существовании вывода в дефинициальном языке $L(\Delta)$ терма X из конечного множества посылок Σ.

Дефинициальный язык обладает рядом свойств, которые делают его не похожим на уже привычные для нас языки. В него неявным образом введен языковой субъект (интерпретатор). Сделано это посредством операции принятия определений, т.е. правила расширения языковых структур DI. Изначально языковому субъекту дан язык $L(\varnothing)$ с пустым множеством констант. Затем он расширяет его до языка $L(\Delta)$, где $\Delta \neq \varnothing$, и лишь после этого получает возможность проводить нетривиальные рассуждения с использованием правила замены DE. Различить языковых субъектов можно лишь с точностью до множества принятых ими определений Δ. Никакого единого множества определений нет. Языковые субъекты свободны в принятии любых определений.

Параграф седьмой - «Система протологики». Для построения рассуждений в языке протологики могут быть использованы следующие три правила перехода от одних выражений к другим.

Правило введения констант. Первое правило - безпосылочное. Оно позволяет включать в цепочку рассуждений любые уже имеющиеся константы языка. Семантическое обоснование этого правила было дано в третьем параграфе.

$$(CI)\quad \frac{\varnothing}{C}\ ,\quad \text{где } L = \langle Term(Const), \Delta\rangle,\ C \in Const$$

Правило построения термов. В основе второго правила лежит композициональный подход к пониманию выражений языка. Значение сложного выражения определяется значениями составляющих его частей. Обоснование этого правила было приведено в четвертом параграфе.

$$(TI)\quad \frac{X, Y}{(XY)}$$

Правило замены. Третье правило – это правило замены выражений языка согласно ранее принятым определениям.

Если $L(\Delta)$ – язык, $\mathbf{D}x_1\ldots x_n =_{def} T \in \Delta$ – определение, а $X\{\mathbf{D}Y_1\ldots Y_n\}$ – терм, с выделенным конкретным вхождением терма $\mathbf{D}Y_1\ldots Y_n$, то $X\{T[Y_1/x_1,\ldots,Y_n/x_n]\}$ есть результат замены $\mathbf{D}Y_1\ldots Y_n$ согласно определению на $T[Y_1/x_1,\ldots,Y_n/x_n]$.

$$(DE)\quad \frac{X\{\mathbf{D}Y_1\ldots Y_n\}}{X\{T[Y_1/x_1,\ldots,Y_n/x_n]\}}\ ,\qquad \text{где } \mathbf{D}x_1\ldots x_n =_{def} T \in \Delta$$

Протологическим выводом в языке $L(\Delta)$ терма X из конечного множества термов (посылок) Σ, называется такая непустая конечная последовательность $\langle X_0,\ldots, X_n\rangle$ термов, что $n\geq 0$, $X_n = X$ и и для всякого $0\leq i\leq n$ терм X_i либо является элементом Σ, либо получен из предшествующих термов последовательности по одному из правил вывода.

Запись $\Delta; \Sigma >> X$ будет означать, что в языке $L(\Delta)$ существует протологический вывод (>>-вывод) терма X из конечного множества термов Σ. В тех случаях, когда множество определений Δ фиксировано, и это не может вызвать недоразумений, мы будем использовать сокращенную запись $\Sigma >> X$.

ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА - «Логика дефинициальной дедукции». В ней исследуем свойства дефиницальной вводимости, определенной в шестом параграфе третьей главы.

Параграф первый - «Основные свойства». Доказан ряд общих лемм о свойствах дефиницальной выводимости.

Лемма 1. Вывод $\Delta; \Sigma > X$ имеет место, е. и т. е. для некоторого терма $Y \in \Sigma$ имеет место вывод $\Delta; \{Y\} > X$.

Благодаря этой лемме при доказательстве свойств дефинициальной логики достаточно рассматривать выводы лишь из одноэлементного множества термов Σ. В дальнейшем вместо $\Delta; \{Y\} > X$ мы будем использовать запись $\Delta; Y > X$.

В следующей теореме утверждается, что правило введения определений приводит лишь к консервативным расширениям дефинициальной логики.

Теорема 1. (о консервативности определений) Если для множества определений Δ и термов X, $Y\in L(\Delta)$ не верно, что имеет место вывод $\Delta; X > Y$, то для любого нового определения $\mathbf{D}x_1\ldots x_n =_{def} T$ вывод $\Delta\cup\{\mathbf{D}x_1\ldots x_n =_{def} T\}; X > Y$ также не будет иметь места.

Параграф второй - «Функциональность». Дефинициальная логика обладает очень важным свойством, которое позволяет использовать ее для представления разннобразных функций. В специальной литературе оно получило название *свойства ромба*.

Теорема 2. Дефинициальная логика обладает свойством ромба. Если имеют место выводы $\Delta; X > Y$ и $\Delta; X > Z$, то существует такой терм U, что имеют место выводы $\Delta; Y > U$ и $\Delta; Z > U$.

В метаязыке, говоря о термах дефинициальной логики, мы будем различать два вида равенства. Первый из них - это графическое тождество термов. Второй - равенство с точностью до принятых определений.

Дефинициальное равенство термов. Два терма $U, V \in L(\Delta)$ дефинициально равны ($U =_\Delta V$), если и только если существует такая последовательность термов $<X_0,\ldots,X_n>$, что $n>0$, $X_0 \equiv U$, $X_n \equiv V$, и для всякого $i<n$ либо $X_i \equiv X_{i+1}$, либо терм X_{i+1} получен по правилу DE из терма X_i, либо терм X_i получен по правилу DE из терма X_{i+1}.

Теорема 3. $U =_\Delta V$, если и только если существует такой терм W, что $\Delta; U > W$ и $\Delta; V > W$.

Редексы и свертки. Если $\mathbf{D}x_1\ldots x_n =_{def} T$ – определение, то терм вида $\mathbf{D}Y_1\ldots Y_n$ будем называть *редексом*, а терм вида $T[Y_1/x_1,\ldots,Y_n/x_n]$ - *сверткой* данного редекса.

Нормальные формы**.**

1. Терм X находится в Δ-*нормальной форме*, если и только если в него не имеет вхождения ни один редекс для определений Δ.
2. Терм Y является Δ-*нормальной формой терма* X, если Y находится в Δ-*нормальной форме*, и $\Delta; X > Y$.

Лемма 2.

1) Если $\Delta; X > Y$, $\Delta; X > Z$, и термы Y и Z находятся в Δ-нормальной форме, то $Y \equiv Z$.
2) Если терм X имеет Δ-нормальную форму, то она единственна.

Параграф третий - «Комбинаторная логика». Дефинициальная логика теснейшим образом связана с комбинаторной логикой Шейнфинкеля-Карри[30,31,32] и λ-исчислением Чёрча[33].

Исходные символы языка:

1. x, y, z, … - переменные;
2. **K**, **S** – константы;
3.), (- скобки.

Термы:

1. Всякая переменная есть терм;
2. **K** и **S** - термы;
3. Если X и Y - термы, то (XY) – терм;
4. Ничто другое термом не является.

Термы-переменные и термы-константы будем называть атомарными термами. Терм, составленный лишь из констант **K** и **S**, будем называть *комбинатором* и выделять в

[30] Барендрегт Х. Ламбда-исчисление. Его синтаксис и семантика. М.: Мир, 1985. 606 с.
[31] Шейнфинкель М.И. О кирпичах математической логики // Логические исследования. Вып.15. М.: Наука. С.
[32] Curry H.B., Feys R. Combinatory Logic. V.1. Amsterdam, 1958. 417 p.
[33] Church A. The Calculi of Lambda-Conversion // Annals of Mathematical Studies. 1941, №6. 82 p.

тексте жирным шрифтом. При опускании в термах скобок предполагается их ассоциация влево. В комбинаторной логике изучают не термы сами по себе, а отношение редукции между ними, которое мы будем представлять посредством «≥».

Редукции:
1. Если X и Y – термы, то $X \geq Y$ – редукция;
2. Ничто другое редукцией не является.

Аксиомы:
CA.1 $X \geq X$
CA.2 $\mathbf{K}XY \geq X$
CA.3 $\mathbf{S}XYZ \geq XZ(YZ)$

Правила вывода:
CR.1 $X \geq Y \Rightarrow XZ \geq YZ$
CR.2 $X \geq Y \Rightarrow ZX \geq ZY$
CR.3 $X \geq Y,\ Y \geq Z \Rightarrow X \geq Z$

Иногда комбинаторную логику формулируют в терминах отношения конверсии, используя для его обозначения символ равенства «=». Для этого достаточно везде заменить символ «≥» на «=» и добавить еще одно правило вывода:

CR.4 $X = Y \Rightarrow Y = X$

Последовательность редукций $\langle R_1,\ldots, R_n\rangle$ называется *доказательством*, если для любого $i \leq n$ редукция R_i либо является аксиомой, либо получена из предшествующих редукций последовательности по одному из правил вывода. В этом случае редукция R_n называется доказуемой. В качестве утверждения о существовании доказательства редукции R будем использовать запись CL |- R.

Функциональная абстракция. Пусть x – переменная, а T – терм. Обозначим посредством [x].T терм, полученный в результате применения следующего алгоритма:

1. $[x].x \equiv \mathbf{SKK}$
2. $[x].T \equiv \mathbf{K}T$ если T не содержит вхождений переменной x
3. $[x].Tx \equiv T$ если T не содержит вхождений переменной x
4. $[x].XY \equiv \mathbf{S}([x].X)([x].Y)$ если ни один из предшествующих пунктов не применим

Определим терм $[x_1,.., x_n].T$ с помощью рекурсии $[x_1,..,x_n].T = [x_1].([x_2,.., x_n].T)$. Будем говорить, что терм $[x_1,\ldots,x_n].T$ получен из терма T посредством функциональной абстракции относительно переменных $x_1,..., x_n$.

Лемма 3.

1). Если $FV(T) \subseteq \{x_1,\ldots,x_n\}$, то терм $[x_1,.., x_n].T$ не содержит переменных, т.е. является комбинатором.
2). CL |- $X \geq Y \Rightarrow$ CL |- $X[Z_1/x_1,\ldots,Z_n/x_n] \geq Y[Z_1/x_1,\ldots,Z_n/x_n]$
3). CL |- $([x_1,\ldots,x_n].T)x_1\ldots x_n \geq T$
4). CL |- $([x_1,\ldots,x_n].T)Y_1\ldots Y_n \geq T[Y_1/x_1,\ldots,Y_n/x_n]$.

Параграф четвертый - «О погружении комбинаторной логики в дефинициальную». Свойства отношения выводимости и дефинициального равенства изменяются в зависимости от того, какие определения и какой язык мы выбираем. Поэтому все теоремы о свойствах дефиницальной логики релятивизированы относительно множества принятых определений Δ.

Функция *перевода* $\boldsymbol{\varphi}$ термов дефинициальной логики в термы комбинаторной определяется следующим образом:

1) $\varphi(x) \equiv x$ — x - переменная

2) $\varphi(XY) \equiv \varphi(X)\varphi(Y)$

3) $\varphi(\mathbf{D}) \equiv [x_1,..,x_n].\varphi(T)$ — **D** – константа, введенная посредством определения $\mathbf{D}x_1\ldots x_n =_{def} T\in\Delta$

Лемма 4. Если в дефинициальной логике из терма X выводим терм Y, то в комбинаторной логике доказуема редукция $\varphi(X) \geq \varphi(Y)$.

Лемма 5. Если $\{\mathbf{K}xy =_{def} x, \mathbf{S}xyz =_{def} ((xz)(yz))\} \subseteq \Delta$, то $\varphi(\mathbf{K}) \equiv \mathbf{K}$ и $\varphi(\mathbf{S}) \equiv \mathbf{S}$.

Теорема 4. Комбинаторная логика *рекурсивно вложима* в дефинициальную при условии $\{\mathbf{K}xy =_{def} x, \mathbf{S}xyz =_{def} ((xz)(yz))\} \subseteq \Delta$.

Теорема 5. Комбинаторная логика рекурсивно эквивалентна дефинициальной логике в языке $L(\Delta)$, где $\Delta = \{\mathbf{K}xy =_{def} x, \mathbf{S}xyz =_{def} ((xz)(yz))\}$.

Параграф пятый - «Неподвижные точки». Одной их стандартных задач арифметики является решение уравнений вида $f(x) = 0$. Оно имеет в точности те же корни, что и уравнение $f(x) + x = x$. Обозначим $f(x)+x$ посредством $g(x)$. Задача решения исходного уравнения $f(x) = 0$ равносильна решению уравнения $g(x) = x$, т.е. нахождению таких x, при которых значение функции $g(x)$ совпадает со значением ее аргумента. Отсюда и появился термин *неподвижная точка*. Задачи, связанные с нахождением неподвижных точек, возникают не только в арифметике, но и во многих других разделах математики.

Логика дефинициальной дедукции вслед за λ-исчислением Чёрча и комбинаторной логикой обладает свойством, имеющим непосредственное отношение к существованию неподвижных точек, т.е. решению определенного вида уравнений.

Теорема 6. (о неподвижных точках). Пусть $\mathbf{A}xy =_{def} y(xxy) \in \Delta$. Тогда для всякого терма $F\in L(\Delta)$ существует такой терм $X\in L(\Delta)$, что имеет место вывод $\Delta;\ X > FX$.

Поскольку из выводимости $\Delta;\ X > Y$ следует дефинициальное равенство термов X и Y, то теорема 6 гласит, что если среди определений языка содержится $\mathbf{A}xy =_{def} y(xxy)$, то для всякого терма F существует такой терм X, что термы X и (FX) дефинициально равны, т.е. неразличимы с точностью до принятых определений. Так как, согласно теореме 1, никаких ограничений на добавление новых определений нет, при необходимости мы всегда можем расширить язык определением $\mathbf{A}xy =_{def} y(xxy)$.

Следствие. Пусть $\mathbf{A}xy =_{def} y(xxy) \in \Delta$. Тогда для всякого терма $C\in L(\Delta)$ существует такой терм $\mathbf{F}\in L(\Delta\cup\{\mathbf{G}yx_1\ldots x_n =_{def} C\})$, что для любых термов $T_1,\ldots,T_n\in L(\Delta\cup\{\mathbf{G}yx_1\ldots x_n =_{def} C\})$ имеет место вывод $\Delta\cup\{\mathbf{G}yx_1\ldots x_n =_{def} C\};\ \mathbf{F}T_1\ldots T_n > C[\mathbf{F}/y,T_1/x_1,\ldots,T_n/x_n]$.

Если в теореме 6 терм F, для которого строилась неподвижная точка X, играл роль некоторого “черного ящика”, то смысл следствия заключается в том, что свойства неподвижных точек могут зависеть, в том числе, и от внутренней структуры термов. Благодаря этому мы можем расширить дефинициальную логику новым видом определений, позволяющим вводить в язык новые константы путем сопоставления им контекста, в котором они же и встречаются. Это прямо нарушает обычные требования к правильным определениям в логике. Если определяемый термин встречается не только в дефиниендуме, но и в дефиниенсе, то это считается ошибкой *порочного круга*. Допускается лишь весьма ограниченный класс определений, в которых нарушается данный запрет. Они носят название *рекурсивных определений*. В нашем случае никаких ограничений нет, и определения через порочный круг являются столь же законными, как и обычные. Мы будем их называть *определениями через неподвижные точки*.

Определения через неподвижные точки. Если T – терм, $FV(T) \subseteq \{y,x_1,\ldots,x_n\}$, $n\geq 0$ и **D** - константа, то $\mathbf{D}x_1\ldots x_n =_{dfp} T[\mathbf{D}/y]$ – определение через неподвижную точку.

Правило введения определений через неподвижные точки. Если имеется множество определений Δ, терм T и константа **D**, удовлетворяющие ограничениям $T\in Term(Const)$, $\mathbf{D}\notin Const$, и $FV(T)\subseteq\{y,x_1,\ldots,x_n\}$, то мы можем добавить к множеству Δ новое определение $\mathbf{D}x_1\ldots x_n =_{dfp} T[\mathbf{D}/y]$.

$$(DFI)\quad \frac{\langle Term(Const), \Delta\rangle}{\langle Term(Const\cup\{\mathbf{D}\}), \Delta\cup\{\langle \mathbf{D}x_1\ldots x_n, T[\mathbf{D}/y]\rangle\}\rangle}$$, где $T\in Term(Const)$, $FV(T)\subseteq\{y,x_1,\ldots,x_n\}$, $\mathbf{D}\notin Const$ – новая константа

Очевидно, что если переменная y не имеет вхождений в терм T, определение через неподвижную точку совпадает с обычным определением.

Пара $L = \langle Term(Const), \Delta\rangle$ называется *языком* (с определениями через неподвижную точку), если и только если существует такая последовательность языковых структур $\langle S_0,\ldots, S_n\rangle$, что $n\geq 0$, $S_0 = \langle Term(Const_0), \varnothing\rangle$, $S_n = \langle Term(Const), \Delta\rangle$ и для всякого $0\leq i<n$ языковая структура S_{i+1} является расширением языковой структуры S_i по правилу DI или DFI.

Правило замены (для определений через неподвижную точку)**.** Если $X\{\mathbf{D}Y_1\ldots Y_n\}$ – терм языка L(Δ), с выделенным вхождением терма $\mathbf{D}Y_1\ldots Y_n$, где $\mathbf{D}x_1\ldots x_n =_{dfp} T[\mathbf{D}/y] \in \Delta$, то $X\{T[\mathbf{D}/y,Y_1/x_1,\ldots,Y_n/x_n]\}$ есть результат замены выделенного вхождения $\mathbf{D}Y_1\ldots Y_n$ на $T[\mathbf{D}/y,Y_1/x_1,\ldots,Y_n/x_n]$.

$$(DFE)\quad \frac{X\{\mathbf{D}Y_1\ldots Y_n\}}{X\{T[\mathbf{D}/y,Y_1/x_1,\ldots,Y_n/x_n]\}}\ ,\quad \text{где } \mathbf{D}x_1\ldots x_n =_{dfp} T[\mathbf{D}/y] \in \Delta$$

Теорема 7. (о консервативности определений через неподвижную точку). Если для множества определений Δ и термов $X, Y\in L(\Delta)$ не верно, что имеет место вывод $\Delta; X > Y$, то для любого нового определения $\mathbf{D}x_1\ldots x_n =_{dfp} T[\mathbf{D}/y]$ вывод $\Delta\cup\{\mathbf{D}x_1\ldots x_n =_{dfp} T[\mathbf{D}/y]\}; X > Y$ также не будет иметь места.

Определения через неподвижную точку не расширяют дедуктивных возможностей дефинициальной логики, так как всегда могут быть заменены обычными определениями.

Интерес представляют логико-философские следствия, которые можно отсюда извлечь. Очень часто, объясняя необходимость существования неопределяемых исходных терминов, ссылаются на то, что в силу конечности множества используемых понятий все термины определить нельзя и во избежание порочного круга рано или поздно этот процесс приходится остановить. Так якобы и появляются неопределяемые термины, и ничего с этим нельзя поделать. Оказывается, ссылка на порочный круг некорректна. Введение новых терминов как *решений языковых уравнений*, если перевести это на обычный язык, означает определение новых терминов посредством множества контекстов их употребления. Из теоремы 6 и ее следствия вытекает, что эти решения *всегда существуют*, и корректным логическим инструментом введения новых терминов являются определения через неподвижные точки.

В развитие темы неподвижных точек заметим, что помимо решения отдельных уравнений, стандартной задачей арифметики является также нахождение решений системы уравнений:

$f_1(x_1,...,x_n) = 0$

. . . .

$f_n(x_1,...,x_n) = 0$

Эту задачу можно свести к задаче о нахождения множественных неподвижных точек для системы уравнений:

$f_1(x_1,...,x_n)+x_1 = x_1$

. . . .

$f_n(x_1,...,x_n)+ x_n = x_n$

Теорема 8. (о множественных неподвижных точках) Для всякого множества определений Δ и термов $F_1,\ldots,F_n \in L(\Delta)$ существует такое множество определений Θ и термы $X_1,\ldots, X_n \in L(\Theta)$, что $\Delta \subseteq \Theta$ и имеют место выводы $\Delta;\ X_1 > (F_1X_1\ldots X_n),\ldots,\ \Delta;\ X_n > (F_nX_1\ldots X_n)$.

Следствие. Для всяких термов $C_1,\ldots,C_m \in L(\Delta)$ и $\Theta = \Delta \cup \{\mathbf{G_1}y_1\ldots y_mx_1\ldots x_n =_{def} C_1,\ldots,\ \mathbf{G_m}y_1\ldots y_mx_1\ldots x_n =_{def} C_m,\ \ \mathbf{R}yx_1\ldots x_m =_{dfp} y(\mathbf{R}x_1x_1\ldots x_m)\ldots(\mathbf{R}x_mx_1\ldots x_m)\}$ существуют такие термы $\mathbf{F_1}, \ldots,\mathbf{F_m} \in L(\Theta)$, что для любых термов $T_1,\ldots,T_n \in L(\Theta)$ имеет место вывод $\Theta;\ \mathbf{F_i}T_1\ldots T_n > C_i[\mathbf{F_1}/y_1,\ldots,\mathbf{F_m}/y_m,T_1/x_1,\ldots,T_n/x_n]$.

Отсюда вытекает возможность принятия множественных определений через неподвижные точки. В арифметике аналогом этого является одновременное определение нескольких функций посредством взаимной рекурсии.

Множественные определения через неподвижные точки. Если $T_1,\ldots,T_m$ – термы, $FV(T_i) \subseteq \{y_1,\ldots,y_m,x_1,\ldots,x_n\}$, $m\geq 1$, $n\geq 0$, и $\mathbf{D_1},\ldots,\mathbf{D_m}$ - константы, то

$$\begin{cases} \mathbf{D_1}x_1\ldots x_n =_{dmp} T_1[\mathbf{D_1}/y_1,\ldots,\ \mathbf{D_m}/y_m] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{D_m}x_1\ldots x_n =_{dmp} T_m[\mathbf{D_1}/y_1,\ldots,\ \mathbf{D_m}/y_m] \end{cases}$$

является множественным определением через неподвижные точки.

Правило введения определений через множественные неподвижные точки. Если имеется множество определений Δ, термы $T_1,\ldots,T_m$ и константы $\mathbf{D_1},\ldots,\mathbf{D_m}$, удовлетворяющие ограничениям $T_1,\ldots,T_m \in Term(Const)$, $\mathbf{D_1},\ldots,\mathbf{D_m} \notin Const$, и $FV(T_i)\subseteq\{y_1, \ldots,y_m,x_1,\ldots,x_n\}$, то мы можем добавить к множеству Δ новые определения:

$$\begin{cases} \mathbf{D_1}x_1\ldots x_n =_{dmp} T_1[\mathbf{D_1}/y_1,\ldots,\ \mathbf{D_m}/y_m] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{D_m}x_1\ldots x_n =_{dmp} T_m[\mathbf{D_1}/y_1,\ldots,\ \mathbf{D_m}/y_m] \end{cases}$$

$$(DMI)\quad \frac{\langle Term(Const),\ \Delta\rangle}{\begin{matrix}\langle Term(Const\cup\{\mathbf{D_1},\ldots,\mathbf{D_m}\}), \\ \Delta\cup\{\langle\mathbf{D_1}x_1\ldots x_n,\ T_1[\mathbf{D_1}/y_1,\ldots,\ \mathbf{D_m}/y_m]\rangle,\ldots, \\ \langle\mathbf{D_m}x_1\ldots x_n,\ T_m[\mathbf{D_1}/y_1,\ldots,\ \mathbf{D_m}/y_m]\rangle\}\rangle\end{matrix}}\qquad \begin{matrix}T_1,\ldots,T_m \in Term(Const), \\ FV(T_i)\subseteq\{y_1,\ldots,y_m,x_1,\ldots,x_n\}, \\ \mathbf{D_1},\ldots,\mathbf{D_m} \notin Const\end{matrix}$$

Общий смысл заключается в том, что для определения системы терминов, их не нужно определять в обычном смысле, а достаточно задать контексты их совместного употребления.

Параграф шестой - «Определимость функций». Полезным свойством дефинициальной логики является то, что с ее помощью мы можем представлять различные функции и вычисления с ними.

Пусть дана некоторая функция $\mathbf{f}: A^n \to B$, и мы хотим каким-то образом представить ее в языке дефинициальной логики. Для этого мы должны каждому элементу $a\in A$ сопоставить некоторый терм дефинициальной логики $\ulcorner a\urcorner$, и каждому элементу $b\in B$ сопоставить терм $\ulcorner b\urcorner$. При этом необходимо соблюсти условие, что если $a_1\neq a_2$, то термы $\ulcorner a_1\urcorner$ и $\ulcorner a_2\urcorner$ не должны быть дефинициально равны, т.е. $\ulcorner a_1\urcorner \neq_\Delta \ulcorner a_2\urcorner$.

Дефинициальная определимость. Функция $\mathbf{f}:A^n \to B$ определима в языке $L(\Delta)$ дефинициальной логики посредством терма F, если

$$\forall a_1,\ldots,a_n \in A(\Delta;\ F^{\ulcorner}a_1^{\urcorner}\ldots{}^{\ulcorner}a_n^{\urcorner} > {}^{\ulcorner}f(a_1,\ldots,a_n)^{\urcorner}),$$

где ${}^{\ulcorner}f(a_1,\ldots,a_n)^{\urcorner}$ представляет элемент $\mathbf{f}(a_1,\ldots,a_n)\in B$. В этом случае будем говорить, что *терм* F *определяет функцию* **f**.

В качестве первого примера покажем, что в языке дефинициальной логики определимы все функции классической логики высказываний. Сначала необходимо выбрать термы, которые будут представлять *Истину* и *Ложь*. Для этого примем два определения:

$(\mathbf{T}\ x\ y) =_{def} x$
$(\mathbf{F}\ x\ y) =_{def} y$

Поскольку термы-константы **T** (*Истина*) и **F** (*Ложь*) находятся в нормальной форме и отличны друг от друга, все необходимые условия соблюдены, т.е $\mathbf{T} \neq_\Delta \mathbf{F}$. Для представления базовых функций логики высказываний определим дополнительные константы:

$(\mathbf{N}\ x) =_{def} (x\ \mathbf{F}\ \mathbf{T})$
$(\mathbf{A}\ x\ y) =_{def} (x\ y\ \mathbf{F})$
$(\mathbf{O}\ x\ y) =_{def} (x\ \mathbf{T}\ y)$

Пусть эти пять определений составляют множество Δ. Тогда имеют место требуемые выводимости:

$\Delta;\ (\mathbf{N}\ \mathbf{T}) > \mathbf{F}$	$\Delta;\ (\mathbf{A}\ \mathbf{T}\ \mathbf{T}) > \mathbf{T}$	$\Delta;\ (\mathbf{A}\ \mathbf{F}\ \mathbf{T}) > \mathbf{F}$
$\Delta;\ (\mathbf{N}\ \mathbf{F}) > \mathbf{T}$	$\Delta;\ (\mathbf{A}\ \mathbf{T}\ \mathbf{F}) > \mathbf{F}$	$\Delta;\ (\mathbf{A}\ \mathbf{F}\ \mathbf{F}) > \mathbf{F}$

Легко показать, что в языке дефинициальной логики определимы любые конечнозначные табличные функции[34].

Параграф седьмой - «Вычислимые функции». Особый интерес вызывает вопрос об определимости в языке дефинициальной логики вычислимых функций. Положительный ответ на него уже следует из теоремы 4 о рекурсивной вложимости комбинаторной логики в дефинициальную, поскольку известно, что в комбинаторной логике эти функции определимы. Но возможно и прямое доказательство. Оно и приведено в седьмом параграфе.

Параграф восьмой - «Вычислимость и дефинициальная логика». В настоящее время известен целый ряд математических уточнений интуитивного понятия эффективной вычислимости. Первыми в этом ряду стоят машины А. Тьюринга, λ-исчисление А. Чёрча, исчисление равенств Эрбрана-Гёделя, канонические системы Э. Поста, нормальные алгорифмы А. Маркова и др. Каждый новый язык программирования, а их число уже давно перевалило за тысячу, также можно рассматривать как очередное формальное уточнение интуитивного понятия эффективной вычислимости. В то же время принципиальных идей в этой области не так много, и они вполне обозримы.

[34] Шалак В.И. Лингвистический априоризм // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. Вып. XIX. М., 2009. С. 104-114.

Во-первых, это теоретические модели вычислительных машин, которые в разное время были предложены А. Тьюрингом[35], Э. Постом[36], Хао Ваном[37], Дж. Шефердсоном и Х. Старджисом[38], М. Минским[39] и др.

Во-вторых, это ориентированное на вычисление арифметических функций[40] уточнение Эрбрана-Гёделя, которое формулируется в виде специального исчисления равенств. Основная идея заключается в том, чтобы представить процесс вычисления функции посредством дедукции равенства термов, где равенство понимается как равенство по определению. Для этого постулируется существование *нуля* и существование функции «*следует за…*», которые затем могут участвовать в определении новых функций.

В-третьих, это канонические системы Поста и нормальные алгорифмы Маркова, посредством которых представимы эффективные функции над множествами символьных строк.

В-четвертых, это комбинаторная вычислимость по Шейнфинкелю-Карри и λ-исчисление Чёрча, аксиоматизирующие понятие функции как формульного предписания.

В этот же ряд можно поставить и *логико-лингвистическое* уточнение понятия вычислимости, базирующееся на двух простых логических операциях – аналогах широко используемых операций введения и устранения определений. Вычислимость оказывается связанной с логикой гораздо более тесными узами, чем это можно было предположить.

Исходные символы языка:
1. Var – множество переменных;
2. Const – множество констант;
3. $=_{df}$ - символ определения;
4.), (- скобки.

Термы:
1. Если $x \in$ Var, то x – терм;
2. Если $\mathbf{D} \in$ Const, то $\mathbf{D}$ – терм;
3. Если X и Y – термы, то (XY) - терм;
4. Ничто другое термом не является.

Определения**.** Если T - терм, $FV(T) \subseteq \{x_1,\ldots,x_n\}$, $n \geq 0$ и $\mathbf{D} \in$ Const, то $\mathbf{D}x_1\ldots x_n =_{df} T$ – определение.

Программа:
1. $\varnothing$ - программа.
2. Если T – терм и $FV(T) \subseteq \{x_1,\ldots,x_n\}$, $\mathbf{D} \in$ Const и $\mathbf{D}$ не является определяемым символом ни одного другого определения программы π, то $\pi \cup \{\mathbf{D}x_1\ldots x_n =_{df} T\}$ – программа.
3. Ничто другое программой не является.

Правило устранения определений. Если $\mathbf{D}x_1\ldots x_n =_{df} T \in \pi$, а $X\{\mathbf{D}Y_1\ldots Y_n\}$ – терм, с выделенным вхождением $\mathbf{D}Y_1\ldots Y_n$, то $X\{T[Y_1/x_1,\ldots,Y_n/x_n]\}$ есть результат замены $\mathbf{D}Y_1\ldots Y_n$ согласно определению на $T[Y_1/x_1,\ldots,Y_n/x_n]$.

[35] Turing, A.M. On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem // Proceedings of the London Mathematical Society, series 2, 42 (1936-37), P. 230-265.

[36] Post E. L., Finite Combinatory Processes - Formulation 1 // Journal of Symbolic Logic. 1936, V.1. P.103-105.

[37] Wang Hao A variant to Turing's theory of computing machines // Journal of the Association for Computing Machinery. 1957, V. 4. P.63–92.

[38] Shepherdson J. C., Sturgis H. E. Computability of recursive functions // Journal of the Association for Computing Machinery. 1963, V.10, N.2. P.217-255.

[39] Minsky M. Computation: Finite and Infinite Machines. Prentice-Hall, 1967. 317 p.

[40] Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1976. С.261-278.

$$\text{(DPE)}\quad \frac{X\{\mathbf{D}Y_1\ldots Y_n\}}{X\{T[Y_1/x_1,\ldots,Y_n/x_n]\}}\ ,\qquad \mathbf{D}x_1\ldots x_n =_{df} T \in \pi$$

Вычисление:

1. *Вычислением терма* T по программе π называется такая непустая последовательность термов $<T_0, \ldots, T_{i-1}, T_i, \ldots>$, что $T_0 \equiv T$ и для всякого $i>0$ верно, что терм T_i получен из терма T_{i-1} посредством применения правила DPE.
2. Терм T_n называется *результатом вычисления* $<T_0, \ldots, T_n>$, если к нему не применимо правило DPE.

Всякая программа – это некоторое, возможно пустое, множество определений. Кроме запрета дублировать определяемые символы, никаких других ограничений на построение программ нет. Определения могут вводиться в любом порядке. Заметим, что в терм T определения $\mathbf{D}x_1\ldots x_n =_{df} T$, добавляемого на очередном шаге построения программы, уже может входить как символ **D**, так и определяемые символы других определений независимо от того, на каком шаге они были или еще только будут добавлены к программе. Это означает, что предложенный формализм логико-лингвистической базируется на множественных определениях через неподвижные точки, которые были рассмотрены нами в пятом параграфе.

ПЯТАЯ ГЛАВА - «Протологика» посвящена изучению свойств протологической выводимости. В системе протологики, которая была сформулирована нами в седьмом параграфе третьей главы, можно выделить три составляющие.

Первая составляющая представлена константами языка. Это то, что уже известно субъекту интеллектуальной деятельности и хранится в его памяти в виде элементарных знаков. Правило введения констант CI разрешает использовать эти знаки в процессе интеллектуальной деятельности.

Вторая составляющая – синтетическая деятельность. Она заключается в переходе от более простых знаков к более сложным. На семантическом уровне это может быть смешение красок или смешение химических веществ, умножение чисел или забивание гвоздей, построение чертежа дома или создание новой теории. Все это примеры синтетической деятельности, которые обобщены в правиле построения термов TI.

Третья составляющая – систематизирующая и аналитическая деятельность. Посредством операции введения определений DI мы расширяем язык новыми (теоретическими) терминами. Посредством операции устранения определений DE мы реализуем аналитическую деятельность.

Параграф первый - «Свойства протологики».

Теорема 1. (о консервативности определений). Пусть Δ - произвольное множество определений, $X\in L(\Delta)$ и $\Sigma\subseteq L(\Delta)$. Если вывод $\Delta; \Sigma >> X$ не имеет места, то и для любого нового определения $\mathbf{D}x_1\ldots x_n =_{def} T$ вывод $\Delta\cup\{\mathbf{D}x_1\ldots x_n =_{def} T\}; \Sigma >> X$ также не будет иметь места.

Пусть **φ -** функция *перевода* термов дефинициальной логики в термы комбинаторной, которую мы определили в четвертом параграфе четвертой главы.

Лемма 1.

1) Если в протологике имеет место выводимость $\Delta; \{X_1,\ldots,X_n\} >> X$, то в комбинаторной логике для некоторого комбинатора **H** доказуема редукция $\mathbf{H}\varphi(X_1)\ldots\varphi(X_n) \geq \varphi(X)$.

2) Если в протологике имеет место выводимость $\Delta; \varnothing >> X$, то в комбинаторной логике для некоторого комбинатора **H** доказуема редукция $\mathbf{H} \geq \varphi(X)$.

Лемма 2. Пусть $\{\mathbf{K}xy =_{def} x,\ \mathbf{S}xyz =_{def} ((xz)(yz))\} \subseteq \Delta$. Если в комбинаторной логике для некоторого комбинатора **H** доказуема редукции $\mathbf{H}X_1 \ldots X_n \geq Y$, то в протологике имеет место выводимость $\Delta; \{X_1, \ldots, X_n\} >> Y$.

Лемма 3. Пусть $\Delta = \{\mathbf{K}xy =_{def} x,\ \mathbf{S}xyz =_{def} ((xz)(yz))\}$ и $X_1, \ldots, X_n \in L(\Delta)$. Если в комбинаторной логике для некоторого комбинатора **H** доказуема редукция $\mathbf{H}\varphi(X_1) \ldots \varphi(X_n) \geq \varphi(Y)$, то в протологике имеет место выводимость $\Delta; \{X_1, \ldots, X_n\} >> Y$.

Теорема 2. Пусть $\Delta = \{\mathbf{K}xy =_{def} x,\ \mathbf{S}xyz =_{def} ((xz)(yz))\}$. В протологике имеет место выводимость $\Delta; \{X_1, \ldots, X_n\} >> Y$, если и только если в комбинаторной логике для некоторого комбинатора **H** доказуема редукции $\mathbf{H}\varphi(X_1) \ldots \varphi(X_n) \geq \varphi(Y)$.

Если сравнить условия теоремы 2 с определением протологического следования, то легко заметить, что она может рассматриваться как теорема о полноте протологики относительно комбинаторной логики.

Параграф второй - «Модели протологики». Модели задаются относительно текущего множества принятых определений. В самом простом случае, когда множество определений пусто, они совпадают с моделями для языка сложных выражений, которые мы уже рассмотрели ранее.

Стандартной моделью протологики будем называть алгебру ее термов. В основе этой алгебры лежит отношение дефинициального равенства термов, которое является отношением эквивалентности.

Лемма 4. Отношение дефинициального равенства обладает свойством конгруэнтности, т.е. из $X =_\Delta Y$ и $U =_\Delta W$ следует $(XU) =_\Delta (YW)$

Конгруэнтность дефинициального равенства по отношению к единственной термообразующей операции языка позволяет перейти к классам дефинициально равных термов. Пусть $X \in L(\Delta)$. Посредством $|X|_\Delta$ обозначим класс термов, дефинициально равных X. В тех случаях, когда множество определений Δ фиксировано, и это не может вызвать недоразумений, вместо $|X|_\Delta$ будем писать просто $|X|$.

Обозначим посредством $\mathbf{T}_\Delta$ множество классов дефинициально равных термов. Конгруэнтность отношения дефинициального равенства позволяет нам определить бинарную операцию $|X|\bullet|Y| = |(XY)|$.

Обозначим посредством $\{\Delta\}$ множество всех классов термов, дефинициально равных вводимым определениями Δ констант.

Алгеброй термов протологики будем называть тройку $\mathcal{A}(\Delta) = <\mathbf{T}_\Delta, \bullet, \{\Delta\}>$.

Характеристической особенностью данной алгебры является то, что если $|\mathbf{D}| \in \{\Delta\}$ для определения $\mathbf{D}x_1 \ldots x_n =_{def} U$, то для всех термов $|Z_1|, \ldots, |Z_n| \in \mathbf{T}_\Delta$ имеет место $((\ldots(|\mathbf{D}|\bullet|Z_1|)\bullet\ldots)\bullet|Z_n|) = |U[Z_1/x_1, \ldots, Z_n/x_n]|$.

Если множество определений пусто, то алгебра термов является просто группоидом, и каждый класс $|X| \in \mathbf{T}_\Delta$ состоит из единственного терма X.

Лемма 5. Если $\mathcal{A}(\Delta_1) = <\mathbf{T}_{\Delta 1}, \bullet, \{\Delta_1\}>$, $\mathcal{A}(\Delta_2) = <\mathbf{T}_{\Delta 2}, \bullet, \{\Delta_2\}>$ и $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$, то функция $\varphi: \mathbf{T}_{\Delta 1} \rightarrow \mathbf{T}_{\Delta 2}$, задаваемая посредством $\varphi(|X|_{\Delta 1}) = |X|_{\Delta 2}$, является вложением и $|X|_{\Delta 1} \subseteq \varphi(|X|_{\Delta 1})$.

Лемма 6. Если $\mathcal{A}(\Delta_1) = <\mathbf{T}_{\Delta 1}, \bullet, \{\Delta_1\}>$, $\mathcal{A}(\Delta_2) = <\mathbf{T}_{\Delta 2}, \bullet, \{\Delta_2\}>$, $\Delta_2 = \Delta_1 \cup \{\mathbf{D}x_1 \ldots x_n =_{def} U\}$ и $n>0$, то существует такой элемент $|Y| \in \mathbf{T}_{\Delta 2}$, что ни для одного $|X| \in \mathbf{T}_{\Delta 1}$ не имеет места $|X| \subseteq |Y|$.

Эта лемма важна для лучшего понимания протологики и роли, которую играют в ней определения. Смысл ее заключается в том, что всякий раз принятие нового определения $\mathbf{D}x_1 \ldots x_n =_{def} U$ при условии, что $n>0$, приводит к собственному расширению алгебры термов. Новые объекты мысли, вводимые посредством определений, не сводимы к старым. Они образуют новые структуры, не смешиваясь с уже существующими и не разрушая их.

Моделью языка протологики $L(\Delta)$ будем называть пару $M = <W, \varphi>$, где $W \neq \emptyset$, а φ - функция интерпретации, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $\varphi(a) \in W$ - $a \in Const$;
2. $\varphi(()) : W \times W \rightarrow W$

Для обозначения бинарной операции $\varphi(()):W \times W \rightarrow W$ будем использовать символ $\bullet$.

Как и ранее, в нашем распоряжении имеется множество всех функций приписываний переменным $Val = W^{Var}$.

Значение терма в модели:

1. $[x,M,v] = v(x)$ - $x \in Var$
2. $[a,M,v] = \varphi(a)$ - $a \in Const$
3. $[(XY),M,v] = ([X,M,v] \bullet [Y,M,v])$

Рассмотренные нами алгебры термов являются моделями языка протологики. Стандартной интерпретацией в алгебре термов является функция φ, сопоставляющая константам $\mathbf{D}$ классы $|\mathbf{D}|_\Delta$. При каноническом приписывании $v_c(x) = |x|_\Delta$ значением терма X в модели $\boldsymbol{A}(\Delta)$ будет $[X, \boldsymbol{A}(\Delta),v_c] = |X|_\Delta$.

Параграф третий - «Протобулева логика». Протологика в том виде, как мы ее представили, - это, прежде всего, инструмент для теоретического анализа определенных видов знаковой деятельности. Она имеет примерно такое же отношение к реально проводимым рассуждениям, какое имеют машины Тьюринга к реальным вычислениям и построениям.

Теория, с точки зрения протологики, может быть представлена как набор постулатов-выводимостей, каждому из которых на уровне семантики сопоставлена функция, позволяющая вычислить значение заключения на основании значений посылок.

$\Sigma_1 || \!- A_1$ - $\forall v(v(A_1)=\mathbf{f}_1(v(\Sigma_1))$

$\Sigma_2 || \!- A_2$ - $\forall v(v(A_2)=\mathbf{f}_2(v(\Sigma_2))$

. . .

$\Sigma_n || \!- A_n$ - $\forall v(v(A_n)=\mathbf{f}_n(v(\Sigma_n))$

Выполнение многошагового протологического вывода сопровождается на уровне семантики синтезом функции, связывающей значения исходных посылок со значением результирующего заключения. Это является гарантией того, что в ходе манипуляций со знаками мы действительно не теряем их соответствия внеположной реальности.

Сказанное проиллюстрируем на примере построения протобулевой логики – теории протологических рассуждений с использованием истинностнозначных термов[41,42].

В классической логике некоторое умозаключение считается правильным, если и только если при истинности посылок оно гарантирует истинность заключений.

[41] Шалак В.И. Логика альтернативного отношения следования // Логические исследования. Вып.13. М.: Наука, 2006. С. 287-304.
[42] Шалак В.И. О понятии логического следования. М.: ИФРАН, 2007. 170 с.

*Из множества формул Σ следует формула A, если и только если в каждой модели **M**, в которой истинны все формулы множества Σ, будет истинна и формула A.*

Кратко, с использованием общепринятой логической символики, это можно записать в следующем виде:

$$\Sigma \models A \iff \forall \mathbf{M}(\forall B(B\in\Sigma \Rightarrow \mathbf{M}[B]=\text{true}) \Rightarrow \mathbf{M}[A]=\text{true})$$

где **M**[A]=true означает, что в модели **M** истинна формула A.

Логика призвана удерживать нас от заблуждений. Перефразируя Аристотеля, скажем, что заблуждение – *это говорить о сущем, что его нет, или о не-сущем, что оно есть.* При классическом понимании следования истинность посылок является достаточным условием истинности заключения. Классическая логика предохраняет нас от заблуждений лишь в том случае, если все исходные посылки истинны. Что случится, если хотя бы одна из посылок окажется ложной? Тогда классическая логика снимает с себя всякую ответственность, и заключение может быть как истинным, так и ложным.

Как строить выводы из посылок, относительно которых не принимается допущение об их истинности, но в то же время не впадать в заблуждения? Чтобы этого не случилось, мы должны быть способны, придя в ходе рассуждения к некоторому заключению, определить его истинностное значение. Т.е. *форма умозаключения может считаться правильной, если знание истинностных значений посылок является достаточным условием знания истинностного значения заключения*. Говоря об истинностных значениях посылок, мы не требуем, чтобы они были одновременно истинны, а допускаем любое распределение значений. Для нас совершенно не важно, будет ли результирующее истинностное значение заключения *истиной* или *ложью*. Главным является то, что если это значение - *истина*, то мы должны быть в состоянии определить, что оно - *истина*, а если - *ложь*, то мы должны быть в состоянии определить, что оно - *ложь*. В отношении заключения мы не лишаем себя возможности *«говорить о том, что сущее есть и не-сущее не есть»*, а принимаем это в качестве необходимого условия правильности рассуждений. Это приводит нас к следующему определению следования.

*Из множества формул $\Sigma = \{B_1,..,B_k\}$ следует формула A, если и только если существует функция **f**, которая позволяет по истинностным значениям формул множества Σ, вычислить истинностное значение формулы A.*

$$\{B_1,..,B_k\} \mid\mid= A \iff \exists \boldsymbol{f} \forall v(v(A) = \boldsymbol{f}(v(B_1),..,v(B_k)))$$

где v - обычное приписывание истинностных значений формулам языка.

Исходные символы языка:

1. Var – множество пропозициональных переменных;
2. &, ∨, ¬ - логические связки.
3.), (- скобки.

Формулы:

1. Всякая переменная p∈ Var является формулой.
2. Если A и B – формулы, то (A&B), (A∨B), ¬A также формулы.
3. Ничто другое формулой не является.

Пусть Val = $\{\mathbf{T},\mathbf{F}\}^{\mathrm{Var}}$ - множество приписываний истинностных значений пропозициональным переменным нашего языка. Обычным образом мы распространяем функции приписывания истинностных значений на все формулы языка.

Протобулево следование. Из множества формул $\Gamma = \{B_1,\ldots,B_k\}$ *следует* формула A ($\Gamma \mid\mid= A$), если и только если существует функция $\mathbf{f}:\{\mathbf{T},\mathbf{F}\}^k \rightarrow \{\mathbf{T},\mathbf{F}\}$, которая позволяет для произвольного приписывания $v \in Val$ на основании оценок $v(B_1),\ldots,v(B_k)$ вычислить оценку $v(A)$, т.е. $v(A) = \mathbf{f}(v(B_1),\ldots,v(B_k))$.

$$\{B_1,..,B_k\} \Vert\!= A \Leftrightarrow \exists \mathbf{f} \forall v(v(A) = \mathbf{f}(v(B_1),..,v(B_k))$$

Выводимостью будем называть выражение вида $\Gamma \Vert\!- A$, где A - формула, а $\Gamma = \{B_1, \ldots, B_k\}$ - конечное ($k \geq 0$) множество формул. Будем называть множество формул Γ посылками выводимости, а формулу A – ее заключением.

Аксиоматизацию отношения следования представим в виде набора выводимостей и правил перехода от одних выводимостей к другим. Формулы, доказуемые в классической логике высказываний, будем обозначать посредством $|\!- A$.

A.1 $\Vert\!- A \vee \neg A$

A.2 $\{A, B\} \Vert\!- A \& B$

A.3 $\{A\} \Vert\!- \neg A$

$$\text{R.1}\ \frac{|\!- A \equiv B}{\{A\} \Vert\!- B} \qquad \text{R.2}\ \frac{\Gamma \Vert\!- A, \quad \{A\} \cup \Delta \Vert\!- B}{\Gamma \cup \Delta \Vert\!- B}$$

В правиле R.1 мы используем ссылку на доказуемую в классической логике эквивалентность. Эта ссылка позволяет нам дать компактную аксиоматизацию, но не является обязательной. С равным успехом мы могли бы оставить одно лишь правило R.2, а R.1 заменить несколькими аксиомами, соответствующими аксиомам булевой алгебры, по правилу: если A=B - аксиома булевой алгебры, то к набору наших аксиом-выводимостей мы добавляем две новые – $\{A\} \Vert\!- B$ и $\{B\} \Vert\!- A$.

Доказательством называется непустая конечная последовательность, каждый из элементов которой является либо доказуемой формулой классического исчисления высказываний вида $A \equiv B$, либо аксиомой-выводимостью A.1-A.3, либо выводимостью, полученной из предыдущих элементов последовательности по правилам R.1-R.2. Доказанной считается выводимость, являющаяся конечным элементом последовательности.

Теорема 3. (о непротиворечивости протобулевой логики) Если $\Gamma \Vert\!- A$, то $\Gamma \Vert\!= A$.

Теорема 4. (о полноте протобулевой логики). Если $\Gamma \Vert\!= A$, то $\Gamma \Vert\!- A$.

Параграф четвертый - «Квантитативная логика». В протобулевой логике исследуется, как ведут себя в протологических рассуждениях истинностнозначные термы. Аналогичным образом мы можем построить теорию квантитативных рассуждений, когда предложениям языка сопоставляются не оценки истины или лжи, а специальные количественные оценки[43].

Мы опираемся на тот факт, что в протологике представимы все вычислимые функции. Отношение следования в квантитативной логике определяется не через вычислимость истинностного значения заключения по истинностным значениям посылок, как в протобулевой логике, а через *вычислимость количественной оценки заключения на основании количественных оценок посылок*.

В **ЗАКЛЮЧЕНИИ** диссертационного исследования подводятся его итоги и формулируются результаты.

[43] Шалак В.И. Квантитативное расширение логики // Материалы IX Общероссийской научной конференции. Санкт-Петербург, 22-24 июня 2006 г. СПб., 2006. С. 400-402.

Монографии

1. Шалак В.И. Логический анализ сети Интернет. М.: ИФРАН, 2005. 96 с. (3,3 а.л.)
2. Шалак В.И. О понятии логического следования. М.: ИФРАН, 2007. 170 с. (4,8 а.л.)

Статьи в периодических изданиях, рекомендованных ВАК

1. Шалак В.И. Об альтернативном определении логического следования // Эпистемология & философия науки. 2007, T.XIII, №3. С. 199-205. (0,45 а.л.)
2. Шалак В.И. О логическом следовании // Вестник МГУ, Серия 7: Философия. N5. 2007. (0,71 а.л.)
3. Шалак В.И. О скрытых математических структурах языка // Полигнозис. 2008, №3. С. 31-36. (0,42 а.л.)
4. Шалак В.И. Канон и органон // Эпистемология & философия науки. 2008, T.XIV, №4. С. 210-217. (0,46 а.л.)
5. Шалак В.И. Протологика // Вестник ВятГГУ. 2009, № 1(1). С. 12-17. (0,55 а.л.)
6. Шалак В.И. Логика апорий // Полигнозис. 2009, №1. С.25-31. (0,54 а.л.)

Статьи

1. Шалак В.И. Квантитативное расширение логики // Материалы IX Общероссийской научной конференции. Санкт-Петербург, 22-24 июня 2006 г. СПб., 2006. С. 400-402. (0,15 а.л.)
2. Шалак В.И. Логическая модель сети Интернет // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. Вып. XVIII. М., 2006. С. 134-144. (0,45 а.л.)
3. Шалак В.И. Альтернативное определение логического следования // Логические исследования. Вып.13. М.: Наука, 2006. С. 274-286. (0,65 а.л.)
4. Шалак В.И. Логика альтернативного отношения следования // Логические исследования. Вып.13. М.: Наука, 2006. С. 287-304. (0,7 а.л.)
5. Шалак В.И. Логический анализ апорий Зенона // "Смирновские чтения по логике", конф. (2007; Москва). 5-я конференция "Смирновские чтения по логике", 20-22 июня 2007 г. С. 164-165. (0,1 а.л.)
6. Шалак В.И. Логика термов // Логические исследования. Вып.14. М.: Наука, 2007. С. 286-300. (0,49 а.л.)
7. Шалак В.И. Логико-лингвистическое уточнение понятия вычислимости // Тезисы: X Общероссийской научной конференции, С-Петербург, 26-28 июня 2008 г. С.404-407. (0,14 а.л.)
8. Шалак В.И. Против апорий // Противоположности и парадоксы. М.: "Канон+" РООИ "Реабилитация", 2008. С.189-204. (0,66 а.л.)
9. Шалак В.И. Шейнфинкель и комбинаторная логика // Логические исследования. Вып.15. - М.: Наука. С.247-265. (0,65 а.л.)
10. Шалак В.И. Логический анализ дефинициальной дедукции // Логические исследования. Вып.15. - М.: Наука. С.266-283. (0,71 а.л.)
11. Шалак В.И. О белых пятнах в логике // "Шестые Смирновские чтения по логике". Материалы международной научной конференции 17-19 июня 2009 г. С.110. (0,05 а.л.)
12. Шалак В.И. Лингвистический априоризм // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. Вып. XIX. М., 2009. С. 104-114. (0,4 а.л.)
13. Шалак В.И. Логика функций vs логика отношений // Логические исследования. Вып.16. М.: Наука. (0,46 а.л.)