В. И. Шалак[1]

ЛОГИЦИЗМ. СТО ЛЕТ СПУСТЯ

Резюме: Программа логицизма, призванная редуцировать математику к логике, не могла быть осуществлена, поскольку содержит внутреннее противоречие. Тем не менее, это не означает, что никакие фрагменты математики не могут быть представлены посредством определений в терминах чистой логики. Необходимым и достаточным условием редуцирования к логике является существование вырожденных одноэлементных моделей теории. Для философов интересными примерами являются теория симметричного отношения, теория групп, теория топосов, комбинаторная логика. В теориях арифметики и геометрии полной редукции к логике мешает лишь экзистенциальная аксиома, которая говорит о существовании более чем одного объекта в предметной области. Все остальные аксиомы сводимы к логике. Законы классической механики Ньютона не содержат экзистенциальных предпосылок и потому также сводимы к логике.
Ключевые слова: логицизм, математика, логика, теория, определение, экзистенциальные допущения.

Vladimir Shalack

LOGICISM. ONE HUNDRED YEARS LATER

Resume: The logicist program, designed to reduce mathematics to logic, could not be implemented because it contains an internal contradiction. Nevertheless, this does not mean that no fragments of mathematics can be represented by definitions in terms of pure logic. A necessary and sufficient condition for reducing to logic is the existence of a degenerate one-element model of a theory. For philosophers, interesting examples are the theory of symmetrical relations, group theory, topos theory, and combinatory logic. In the theories of arithmetic and geometry, the full reduction to logic is prevented by the existential axiom that asserts the existence of more than one object in the subject area. All other axioms are reducible to logic. The laws of classical Newtonian mechanics do not contain existential presuppositions and therefore are reducible to logic.
Keywords: logicism, mathematics, logic, theory, definition, existential assumptions.

[1] *Шалак Владимир Иванович*, доктор философских наук, ведущий научный сотрудник сектора логики Института философии РАН.

Shalack Vladimir Ivanovich, Dr. Sc., Leading Research Fellow, Department of Logic, Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences, Moscow.

shalack@mail.ru

«…все науки начинаются с определения понятий,
в противном случае они не заслуживают названия наук,
а являются пустыми разговорами»

[Гоббс 1989: 258]

Что такое математическое знание? Какова природа объектов математики? Эти вопросы еще долгое время будут интересовать философов и математиков. Удивление перед математикой нашло отражение в известном высказывании Галилея о том, что *книга природы написана языком математики*, и в известной статье Е. Вигнера «*Непостижимая эффективность математики в естественных науках*» [Вигнер 1971а: 182–198]. Одно из возможных объяснений могло бы заключаться в том, что математика — это продолжение логики, что все математические понятия производны от логических, и потому из универсальности логики следуют универсальность и эффективность математики. В этом случае нет ничего удивительного ни в словах Галилея, ни в словах Вигнера.

Идея логицизма

К середине XIX в. было показано, что анализ, алгебра и даже геометрия сводимы к арифметике. Отрицательные, целые и рациональные числа определимы с помощью натуральных чисел арифметики. Действительные числа определимы как пределы последовательностей рациональных чисел. Геометрию к теории чисел свел Декарт с помощью своей системы координат, предложив определять точки как пары или тройки чисел, а линии как множества точек, являющихся решениями соответствующих уравнений. Алгебраические структуры возникли в результате абстрагирования от конкретных свойств чисел и операций с ними. Дело оставалось за малым. Нужно было показать, что сама арифметика также сводима к логике. Такую попытку предпринял Г. Фреге. Он предложил, как средствами логики можно определить понятие числа. Но, когда уже был готов к печати второй том *«Основных законов арифметики»*, содержавший подробное изложение результатов Фреге, он получил письмо от Б. Рассела, в котором было указано на противоречивость построенной системы арифметики. Нечто подобное произошло полвека спустя, когда С. Клини и Дж. Россер обнаружили противоречие в первоначальном варианте лямбда-исчисления А. Черча, которое также можно рассматривать как более позднюю попытку логического обоснования математики.

Несмотря на то, что попытка Фреге оказалась неудачной, идея продолжала жить. По иронии судьбы наибольшие усилия по ее воплощению предпринял именно Рассел. В соавторстве с А. Уайтхедом в 1910–1913 гг. он опубликовал трехтомный труд «*Principia Mathematica*» [Whitehead, Russell 1910], посвященный строгому построению символической логики и редукции к ней основных разделов математики. Актуальность работы была обусловлена тем, что обнаруженные Расселом противоречия затрагивали не только построения Фреге, но и всю математику, поскольку для получения противоречия использовался широко распространенный в то время в математике способ рассуждения, позволявший по всякому свойству объединять в одну совокупность обладающие им предметы. Попытки найти выход из сложившейся ситуации привели к появлению нескольких направлений в обосновании математики — логицизма, интуиционизма, формализма и теоретико-множественного подхода. Об этом написано много работ, и мы не станем на них подробно останавливаться. Обратим внимание на логицизм.

В конце XIX в. в математике стал набирать популярность аксиоматический подход к построению теорий. Достаточно было принять ряд нужных постулатов, и в результате получалась готовая теория. Но при этом зачастую не было никаких гарантий, что новая теория не окажется противоречивой. К концу XIX в. уже был обнаружен ряд противоречий в теории множеств, но на них не обратили должного внимания, поскольку они затрагивали лишь продвинутые разделы теории. Парадокс, обнаруженный Расселом, был прост и грозил обрушить все здание математики. Позже, во «*Введении в математическую философию*», Рассел напишет: «*Метод постулирования того, что мы хотим, имеет много преимуществ; они, эти преимущества, точно такие же, как преимущества воровства перед честным трудом. Давайте оставим их другим, а сами займемся нашим тяжелым трудом*» [Рассел 2007: 121]. Вопреки этим пожеланиям оказалось, что для построения математики на основе логики требовалось принять дополнительные, далекие от очевидности аксиомы *сводимости, мультипликативности (выбора) и бесконечности*. Они и поставили под удар программу логицизма в исполнении Рассела. Его подход был признан неудачным. После того, как в 30-х годах прошлого века были доказаны ограничительные теоремы Гёделя-Тарского, интерес к логицизму снизился.

Необходимо отметить, что, начиная с работ Фреге и заканчивая работами Гёделя и Тарского, происходил процесс не только поиска новых оснований математики, но и процесс осмысления, что такое логика. Именно этим объясняются споры вокруг аксиом сводимости, мультипликативности и бесконечности. Относить их к логике или нет? В результате консенсуса пришли к заключению, что эти аксиомы постулируют слишком много и потому не могут считаться логическими. После работ Гёделя-Тарского была поставлена окончательная точка в ответе на вопрос, что такое законы логики. Это утверждения, истинные в любой предметной области и при любой интерпретации. Примерами являются законы тождества, противоречия и многие другие. Любая критика в адрес Фреге, Рассела и других основоположников современной логики, должна учитывать эти обстоятельства, чтобы быть справедливой. Поэтому все, что будет сказано далее, — это взгляд на проблему логицизма с современной точки зрения, а не с той, как это виделось в начале XX в.

Фреге и Рассел предприняли конкретные попытки свести математику к логике, но им это не удалось. Почему бы нам не предположить, что другие исследователи могли продолжить их дело, и одна из последующих попыток могла завершиться успехом? В этом случае им удалось бы найти такой набор определений базисных понятий математики в терминах чистой логики, из которых логическими средствами дедуцируются все теоремы математики, в том числе теоремы арифметики и геометрии. Но одной из теорем арифметики является утверждение, что ноль не равен единице $0 \neq 1$. Это утверждение может быть истинным, если универсум рассуждения содержит не менее двух объектов. Но, как мы знаем, согласно теореме о полноте логики предикатов, теоремы логики истинны во всех предметных областях, в том числе и одноэлементных. Данное же утверждение $0 \neq 1$ не может быть истинным в одноэлементной области и потому не может быть теоремой логики, как бы мы ни старались определить 0 и 1. Такое простое рассуждение позволяет заключить, что, с точки зрения современной логики, идея логицизма, редукции математики к логике, внутренне противоречива, а потому была изначально не реализуема. Удивительно, что на это никто не обратил внимания. Для того и понадобилась Расселу аксиома бесконечности, чтобы обойти данное затруднение, но тогда мы имели бы не логику, а нечто другое, на что и было указано критиками.

Теперь все споры позади и вроде бы пришла пора поставить крест на логицизме. Но делать это еще рано. Да, как мы установили, полная редукция математики к логике невозможна, но это не исключает возможности того, что некоторые математические теории все-таки сводимы к логике. Если это так, то одни теории привносят допущения об устройстве мира, ограничивая класс ситуаций, в которых они применимы, другие же — справедливы в любых областях. Научиться различать их — интересная задача с точки зрения лучшего понимания природы математического знания.

Математика как часть логики

В работе [Shalack 2016: 125–135] была доказана теорема о необходимых и достаточных условиях того, чтобы математическая теория могла быть представлена посредством определений в чистой логике. В дальнейшем изложении мы будем ссылаться на эту теорему, как на *теорему о редукции*. Условия редукции оказались очень простыми. Теории первого порядка, понимаемые как множества теорем, выводимых из постулатов средствами логики предикатов первого порядка, представимы посредством определений чистой логики без каких-либо дополнительных постулатов, если и только если они не налагают никаких ограничений на размер предметной области. Это равносильно тому, что такие теории должны иметь модель в предметной области, состоящей из одного элемента. В математике такие модели часто называют вырожденными и обычно не обращают на них должного внимания. Оказывается, что обнаружение именно таких моделей важно, поскольку указывает на чисто логическую природу теории. Посмотрим, какие известные теории удовлетворяют критерию редукции к логике.

Симметрия

Одним из самых простых примеров является теория симметричного отношения. Отношение Rxy называется симметричным, если из Rxy следует Ryx. Это отношение может быть определено средствами чистой логики, и его характеристическая аксиома становится теоремой логики, как и мечтали логицисты [Shalack 2015a: 46–48].

Для тех, кому интересно, покажем, как это делается. Пусть в языке у нас есть предикатный символ для двухместного отношения Pxy. Можно считать, что это некоторое абстрактное двухместное отношение, о котором больше ничего не известно, но в зависимости от конкретных моделей оно может интерпретироваться тем или иным образом. Покажем, как с помощью такого абстрактного отношения определить отношение симметричности Rxy, характеристическое свойство которого выражается постулатом $\forall xy(Rxy \to Ryx)$. Для этого достаточно принять следующее определение:

$$Rxy \equiv_{def} \forall uv(Puv \to Pvu) \to Pxy$$

Теперь мы можем в чистой логике предикатов первого порядка, не содержащей никаких дополнительных постулатов, доказать теорему $\forall xy(Rxy \to Ryx)$. В том, что это действительно теорема логики, легко убедиться, заменив Rxy и Ryx на правую часть нашего определения. В результате получится доказуемая формула логики предикатов:

$$\forall xy((\forall uv(Puv \to Pvu) \to Pxy) \to (\forall uv(Puv \to Pvu) \to Pyx))$$

Т. е. мы действительно определили симметричное отношение. При этом заметим, что это не единственный способ определить данное отношение.

Для философов данный факт интересен тем, что симметрия — один из фундаментальных принципов современной физики, законы которой симметричны относительно прошлого и будущего, не зависят от сдвига системы отсчета во времени или пространстве, их не изменяет поворот пространственной системы отсчета. Известный принцип относительности Галилея — это симметрия покоя и движения. В специальной теории относительности симметрия проявляется в виде равноправия наблюдателей. Законы сохранения — это тоже симметрия [Вигнер 1971б].

Возникает вопрос: симметрия — это априорная логическая схема, сквозь которую мы смотрим на окружающий мир, или сам мир устроен по законам логики? Не в этом ли кроется причина *непостижимой эффективности математики в естественных науках*?

Отношения порядка

Познание окружающего мира теснейшим образом связано с его упорядочиванием, которое может относиться как к физическим объектам во времени или пространстве, так и к абстрактным объектам. Вопросы о дискретности или непрерывности пространства и времени — это вопросы о порядке. Фундаментальную проблему детерминизма можно представить в виде поиска ответа на вопрос о линейной упорядоченности моментов времени. Если все детерминировано, то у нас нет выбора, и время в будущее вытянуто в линию. Никакого ветвления нет. Если же будущее не предопределено, то уже сегодня есть варианты дальнейшего развития событий, время в будущее потенциально ветвится. Оказывается, что различные виды порядков — линейный, частичный, дискретный, плотный и др. — также могут быть определены средствами чистой логики и потому не несут никакой информации. Это просто удобная сетка, сквозь которую мы смотрим на окружающий мир.

Группы

Понятие группы является центральным в общей алгебре. Группы возникают в различных разделах математики и находят широкое применение для описания объектов физики, химии и других естественных наук. Легко проверить, что аксиомы теории групп имеют модель в области, состоящей лишь из одного элемента. Отсюда следует, что все аксиомы этой теории посредством подходящих определений могут быть представлены как теоремы логики, что и было показано в статье [Shalack 2015б: 15–20]. В то же время более богатая алгебраическая теория поля не может быть определена средствами чистой логики, так как ее модели должны содержать, по крайней мере, два элемента.

Комбинаторная логика

Основные идеи комбинаторной логики были предложены М. Шейнфинкелем [Schönfinkel 1924: 305–316; Шейнфинкель 2009: 232–246], а дальнейшее развитие они получили благодаря работам Х. Карри и его учеников [Curry, Feys 1958] [Curry, Hindley, Seldin 1972]. Комбинаторная логика отлична от классической, но может быть представлена как теория в ее языке. В работе [Shalack 2015в: 9–14] было показано, что постулаты комбинаторной логики могут быть определены средствами классической логики предикатов первого порядка, в результате чего станут ее теоремами. В небольшой статье нет места для подробных объяснений, что такое комбинаторная логика. Но это и не нужно, так как данный пример для философов интересен не техническими деталями, а следствиями. Дело в том, что в комбинаторной логике представимы все эффективно вычислимые функции. Следовательно, эти же функции представимы и в чистой логике предикатов. Именно на этот факт, а не на подробности построения комбинаторной логики, мы хотим обратить внимание.

В чем заключаются некоторые философские следствия этого результата? Искусство счета имеет логическую природу, будучи производным от наших способностей рассуждать. Философы Древней Греции считали недостойным заниматься счетом, полагая, что это удел торговцев. Оказывается, они не были правы. Гораздо более удивительным следствием является то, что математическая теория эффективных вычислений, созданная Аланом Тьюрингом, тоже имеет чисто логическую природу. А поскольку с помощью эффективно вычислимых функций мы можем представить любую конструктивную деятельность, то и она неразрывно связана и производна от нашей способности рассуждать. Она уже имплицитно содержится в том наборе аксиом логики предикатов, который изучают студенты-первокурсники.

Теория категорий и теория топосов

В последние десятилетия набирают популярность теория категорий и теория топосов. Они находят широкое применение в современной математике, информатике, теоретической физике и других науках. Если при теоретико-множественном подходе объекты конструируются путем задания их внутренней структуры, то при категорном — объекты задаются посредством отношений к другим объектам, т. е. алгебраически. Топос — это категория с дополнительными аксиомами, которые наделяют ее большими выразительными возможностями [Голдблатт 1983]. С помощью теории топосов оказывается возможным развить арифметику и теорию множеств. Сегодня топосы рассматривают в качестве главных претендентов на роль новых оснований математики.

Можно показать, что посредством специального набора определений все постулаты теории категорий и элементарных (первопорядковых) топосов превращаются в теоремы классической логики предикатов. Они ничего к ней не добавляют. При желании каждый может сам просмотреть постулаты топосов и убедиться, что они не налагают никаких ограничений на размер предметной области. При этом необходимо отметить, что, когда средствами теории топосов определяют понятия арифметики и теории множеств, принимается дополнительный постулат, не входящий в стандартный набор этой теории. Этот постулат гласит, что начальный и конечный объекты топоса неизоморфны. Лишь в этот момент топосы выходят за рамки выразительных возможностей классической логики, поскольку теперь их модели должны содержать более одного объекта.

Топосы в качестве нового математического аппарата не являются каким-то прорывом в нашем понимании окружающего мира, а служат всего лишь еще одной сеткой, системой координат, которую мы на него налагаем. Сравнивая теорию топосов с теорией множеств, имеет смысл говорить лишь о большем или меньшем удобстве в применении той или другой теории для решения конкретных задач, но не о принципиальных отличиях.

Геометрия

Приведенные выше примеры не исчерпывают перечня всех интересных теорий, которые можно определить средствами чистой логики. Посмотрим, как обстоят дела с такой известной теорией, как геометрия.

В качестве конкретной аксиоматики можно взять набор аксиом Тарского [Tarski, Givant 1999: 175–214] или Гильберта [Гильберт, Бернайс 1982]. Если применить к ним критерии теоремы о редукции, то окажется, что единственной аксиомой, не позволяющей определить понятия геометрии средствами логики, является аксиома о том, что существуют три точки, не лежащие на одной прямой. В случае стереометрии аналогичную роль играет аксиома о четырех точках, не лежащих в одной плоскости. Все остальные аксиомы могут быть представлены, как теоремы логики, в том числе и знаменитый пятый постулат. Ситуация не изменится, если его заменить на постулат геометрии Лобачевского.

Получается, что мы можем строить геометрию следующим образом. Определяем средствами логики необходимые понятия всех аксиом за исключением аксиомы о трех точках, а затем принимаем ее как единственный нелогический постулат.

Многие математические теории, если применить к ним критерии теоремы о редукции, распадаются на две части — логическую и нелогическую. К нелогической части принадлежат лишь экзистенциальные постулаты о существовании более одного объекта в предметной области. Аксиомы же, описывающие свойства и отношения между объектами, оказываются определимыми в логике.

Арифметика

Нельзя обойти вниманием и арифметику, поскольку именно о нее споткнулась программа логицизма. Ситуация сходна с ситуацией в геометрии. Все аксиомы, за исключением аксиомы о том, что ноль не равен ни одному последующему числу $0 \neq S(x)$, определимы в логике. Это означает, что теория арифметики и сводимый к ней анализ могут строиться лишь посредством логических определений и единственного упомянутого нелогического постулата $0 \neq S(x)$. Если вспомнить, что геометрия сводится к арифметике, то этот единственный постулат приобретает еще большее значение.

Классическая механика

С логической точки зрения, постулаты физических теорий ничем не отличаются от аксиом теорий математики. Поэтому ничто не мешает применить критерии теоремы о редукции к аксиомам классической механики, которая надстраивается над арифметикой и анализом. Три закона Ньютона и закон тяготения не налагают никаких ограничений на размер предметной области. Они остаются тривиальным образом справедливыми даже в том случае, если она содержит всего одну материальную точку. Отсюда следует вывод, что для построения классической механики достаточно определить все ее понятия средствами чистой логики, которая не несет никакой информации об окружающем нас мире, затем принять единственный нелогический постулат арифметики $0 \neq S(x)$ и в результате получить механику Ньютона.

Заключение

Логицизм в полном объеме невозможен, но частично он имеет место. Эта грань, разделяющая логическое и нелогическое в наших знаниях, требует дальнейшего осмысления. Интересным представляется критерий такого разделения. Нетривиальные теории мы получаем лишь тогда, когда принимаем количественные допущения об окружающем мире. Именно в этом пункте мы выходим за пределы чистой логики и именно здесь возможно приобретение новых знаний.

Теорема о редукции позволяет по-новому взглянуть на структуру математики. Естественно разделить ее теории на две группы. К первой группе относятся теории, которые не зависят от количественных характеристик предметной области и потому могут быть названы *качественными*, а ко второй — теории, которые зависят от таких характеристик и потому могут быть названы *количественными*. Тогда получается, что вся качественная математика является частью логики, а математика, отличная от логики, — это учение о количестве. Отсюда следует, что нетривиальными теориями, как математическими, так и естественнонаучными, являются лишь те, которые постулируют существование отличных друг от друга объектов. С этой точки зрения было бы интересным произвести ревизию существующих научных теорий. В полном согласии с теорией информации наиболее ценными должны оказаться не универсальные теории, а теории, относящиеся к узким областям.

В тексте статьи несколько раз употреблялся термин *логический априоризм*. Он требует разъяснения. Математика глубоко проникла во все естественные науки и развивает экспансию в область гуманитарных. Требования к строгости доказательств, если сравнить с аналогичными стандартами XIX в., значительно ужесточились. Во многом это произошло благодаря развитию современной символической логики. Ни одно доказательство, которое не удовлетворяет критериями логической строгости, не может быть принято математиками. Доходит до того, что в стремлении выявить все неявно принимаемые допущения, доказательства воспроизводят с помощью специальных компьютерных программ, называемых *пруверами*. Как было показано, единственными ограничениями на определение математических понятий средствами чистой логики являются количественные допущения о размере предметной области. Все остальное — логика, которая *de facto* стала стандартом построения математических рассуждений. Многие математические структуры мы не обнаруживаем в окружающем мире, а проецируем на него то, что содержится в используемых нами способах рассуждений. Именно в этом смысле и понимается логический априоризм.

Еще одно следствие полученных результатов затрагивает широко распространенный взгляд на аксиоматический подход к построению теорий. Считается, что язык таких теорий обязательно должен содержать набор неопределяемых терминов, которые получают смысл в рамках теорий. Например, понятия массы и силы в классической механике. Оказывается, что теории можно строить таким образом, что в них не будет неопределяемых терминов, поскольку количественные экзистенциальные допущения о предметной области к таковым не относятся. Теории могут создаваться из ничего.

Литература

Вигнер 1971а — *Вигнер Е.* Непостижимая эффективность математики в естественных науках // Этюды о симметрии. М.: Мир, 1971. С. 182–198.

Вигнер 1971б — *Вигнер Е.* Симметрия и другие физические проблемы // Этюды о симметрии. М.: Мир, 1971. С. 9–117.

Гильберт, Бернайс 1982 — *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М.: Наука, 1982. 556 с.

Гоббс 1989 — *Гоббс Т.* О человеке // Сочинения в 2 т. Т. 1. М.: Мысль, 1989. С. 119–285.

Голдблатт 1983 — *Голдблатт Р.* Топосы. Категорный анализ логики. М.: Мир, 1983. 488 с.

Рассел 2007 — *Рассел Б.* Введение в математическую философию. Новосибирск, 2007.

Шейнфинкель 2009 — *Шейнфинкель М. И.* О кирпичах математической логики // Логические исследования. М.: Наука. Вып. 15, 2009. С. 232–246.

Curry, Feys 1958 — *Curry H. B., Feys R.* Combinatory Logic. V. 1. Amsterdam, 1958. 417 p.

Curry, Hindley, Seldin 1972 — *Curry H. B., Hindley J. R., Seldin J. P*. Combinatory Logic. V. 2. 1972. 520 p.

Schönfinkel 1924 — *Schönfinkel M.* Über die Bausteine der mathematischen Logik. Mathematische Annalen, 92 (1924), 305–316.

Shalack 2015a — *Shalack V. I.* First-order theories which are definitionally embeddable into predicate calculus // Девятые Смирновские чтения: материалы международной научной конференции. Москва, 17–19 июня 2015 г. М.: Современные тетради, 2015. С. 46–48.

Shalack 2015б — *Shalack V. I.* On the definitional embeddability of some elementary algebraic theories into the first-order predicate calculus // Логические исследования. Т. 21, № 2, 2015. С. 15–20.

Shalack 2015в — *Shalack V. I.* On the definitional embeddability of the combinatory logic theory into the first order predicate calculus // Логические исследования. Т. 21, № 2, 2015. С. 9–14.

Shalack 2016 — *Shalack V. I.* On First-order Theories Which Can Be Represented by Definitions // Логические исследования. Т. 22, № 1, 2016. С. 125–135

Tarski, Givant 1999 — *Tarski A., Givant S.* Tarski's System of Geometry. The Bulletin of Symbolic Logic Vol. 5, No. 2, 1999. P. 175–214.

Whitehead, Russell 1910 — *Whitehead A., Russell B.* Principia Mathematica, 3 vols. New York: Cambridge University Press, 1910–1913.