Логические исследования
2016. Т. 22. № 2. С. 9–26
УДК 510.64

Logical Investigations
2016, Vol. 22, No. 2, pp. 9–26
DOI: 10.21146/2074-1472-2016-22-2-9-26

Неклассическая логика
Non-classical Logic

Н.Л. Архиереев

Теоретико-множественная семантика для системы Гейтинга Int

Архиереев Николай Львович
МГТУ им. Н.Э. Баумана
Российская Федерация, 105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1
e-mail: arkh-nikolaj@yandex.ru

Рассматривается методика построения теоретико-множественных семантик для систем Льюиса S4, S5, не использующая понятий «возможный мир» и «модельная структура». Исходной является идея последовательной интерпретации каждого элементарного высказывания, входящего в формулу, в терминах $\{N, C, I\}$, т.е. в качестве логически истинного, логически недетерминированного, логически невозможного. В результате таких ограничений допустимых истинностных значений переменных формулы из исходного множества описаний состояний (о.с.) для неё исключаются некоторые о.с., т.е. на основе метаоценок $\{N, C, I\}$ на базе исходного множества о.с. для формулы образуются ограниченные, дополнительно ограниченные (для системы S5) и относительно ограниченные (для системы S4) множества описаний состояний и их семейства, выполняющие роль модельных структур традиционных семантик возможных миров. В качестве возможного мира при этом рассматривается классическое о.с. Предлагаемые семантики используют только традиционные для логики понятия истинности, ложности, совместимости/несовместимости высказываний по истинности/ложности и т.д. Кроме того, число ограниченных, дополнительно и относительно ограниченных множеств о.с. для произвольной формулы всегда конечно. В работе предлагаются алгоритмы характеризации и пересчёта подобных конструкций для формул с произвольным конечным числом переменных. На основе известного перевода МакКинси–Тарского формул системы Int в S4 предлагается теоретико-множественная семантика указанного типа для пропозиционального фрагмента системы Int. В качестве возможного мира рассматривается классическое о.с., а роль модельных структур семантик возможных миров выполняют конечные упорядоченные множества о.с. для формулы. При этом смысл интуиционистских связок моделируется в классическом по своим свойствам метаязыке с кванторами по о.с. и их множествам.

Ключевые слова: модальная логика, интуиционистская логика, модельная структура, множество описаний состояний

© Архиереев Н.Л.

В работах [1, 2, 3, 4] были изложены основные принципы построения семантик для некоторых нормальных модальных систем, в которых не используются понятия «модельная структура», «возможный мир», «отношение достижимости между мирами», а смысл модальных понятий проясняется при помощи некоторых конечных упорядоченных множеств описаний состояний (далее — о.с.) для формулы с модальными операторами.

В настоящей статье делается попытка применить принципы построения семантик указанного типа для систем Льюиса S5, S4 к построению семантики для одной из основных систем интуиционистской логики — системы Гейтинга Int.

При построении семантики для пропозиционального фрагмента S5 исходной является идея последовательной интерпретации каждой пропозициональной переменной, входящей в формулу с модальными операторами, как обозначающей логически истинное (необходимое), логически недетерминированное (случайное) и логически ложное (невозможное) высказывание. Далее, некоторые конъюнкции логически недетерминированных высказываний могут дополнительно оцениваться как логически случайные или же невозможные (например, конъюнкция логически случайных высказываний «12 января 2018 года произойдёт мировой банковский кризис» и «12 января 2018 года мировой банковский кризис не произойдёт» очевидно должна оцениваться как логически невозможное высказывание). В результате таких ограничений допустимых истинностных значений элементарных высказываний из исходного множества о.с. W для формулы могут исключаться некоторые о.с. В частности, если переменная истолковывается как обозначающая логически истинное высказывание, то из W исключаются все о.с., содержащие $\neg p$; если переменная истолковывается как обозначающая логически ложное высказывание, то из W исключаются все о.с., содержащие p; если же переменная понимается как обозначающая логически недетерминированное (случайное) высказывание, то W может содержать последовательность о.с. «длины» от 2 до 2^n, в которой переменная хотя бы однажды меняет значение. Семантика, таким образом, является не истинностно-функциональной. Получаемые при этом ограниченные множества о.с. $\langle \text{О}\Gamma; W' \rangle$ и дополнительно ограниченные множества о.с. $\langle \text{О}\Gamma'; W'' \rangle$ выполняют роль модельных структур семантик возможных миров, в качестве же возможного мира выступает классическое о.с. [6, 169–191].

Будем иметь в виду следующую формулировку S5.

Исходные символы: $\neg, \supset, \Box$ (отрицание, импликация, оператор необходимости соответственно — символы объектного языка), аксиомы и правила вывода К.И.В. (классического исчисления высказываний), а также модальные аксиомы системы — A1. $\Box(\text{A} \supset \text{B}) \supset (\Box\text{A} \supset \Box\text{B})$, A2. $\Box\text{A} \supset \text{A}$, A3. $\Diamond\text{A} \supset \Box\Diamond\text{A}$ и правило Гёделя (если $\vdash$ A, то $\vdash \Box$A); символы $\boldsymbol{\neg}, \boldsymbol{\Rightarrow}, \boldsymbol{\Leftrightarrow}, \wedge, \vee, \forall, \exists, \in$ являются символами метаязыка, в котором формулируются условия истинности/ложности формул системы S5; операторы $\boldsymbol{\neg}, \boldsymbol{\Rightarrow}, \boldsymbol{\Leftrightarrow}, \wedge, \vee, \forall, \exists, \in$ трактуются как классические отрицание, импликация, эквивалентность, конъюнкция, дизъюнкция, квантор общности и существования соответственно (кванторы по о.с.), символ принадлежности некоторого элемента множеству; операторы возможности и случайности могут быть определены следующим образом: $\Diamond\text{A} \Leftrightarrow \neg\Box\neg\text{A}$; $\nabla\text{A} \Leftrightarrow \Diamond\text{A} \wedge \Diamond\neg\text{A}$.

При данном подходе в семантике выделяют оценки трёх типов и двух «уровней» (относительно отдельных о.с. либо их множеств W):

1) оценки формул к.л.в. в отдельных о.с. (двухзначные истинностно-функциональные или «чисто классические» оценки);

2) оценки формул, находящихся в области действия операторов $\Box$, $\Diamond$ (двухзначные не-истинностно-функциональные оценки, которые приписываются модальным формулам в множествах о.с.);

3) метаистолкования элементарных формул к.л.в. в терминах $\{N, C, I\}$ («логически необходимо», «логически случайно», «логически невозможно» соответственно), которые также осуществляются относительно множеств о.с. (трёхзначные не-истинностно-функциональные оценки).

Оценки типа 1 являются стандартными: $|p|_\alpha = t \Leftrightarrow p \in \alpha$; $|p|_\alpha = f \Leftrightarrow \neg p \in \alpha$; (при этом, в силу того, что о.с. является классическим, выполняются требования $\neg(p \in \alpha \wedge \neg p \in \alpha)$; $(p \in \alpha \vee \neg p \in \alpha))$; $|\neg B|_\alpha = t \Leftrightarrow |B|_\alpha = f$; $|\neg B|_\alpha = f \Leftrightarrow |B|_\alpha = t$; $|A \supset B|_\alpha = t \Leftrightarrow |A|_\alpha = f \vee |B|_\alpha = t$; $|A \supset B|_\alpha = f \Leftrightarrow |A|_\alpha = t \wedge |B|_\alpha = f$;

Оценки типа 2 толкуют операторы $\Box$, $\Diamond$ как кванторы $\forall$, $\exists$ по элементам множеств о.с. W:

$$|\Box B|_\alpha = t \Leftrightarrow \forall\alpha(\alpha \in W \Rightarrow |B|_\alpha = t);$$

$$|\Diamond B|_\alpha = t \Leftrightarrow \exists\alpha(\alpha \in W \wedge |B|_\alpha = t) \text{ и т. д.}$$

Поскольку при данном подходе в S5 различаются оценки только двух уровней, существенными оказываются только модальности первой степени — собственные для S5 модальности $\Box$, $\neg\Box$, $\Diamond$, $\neg\Diamond$. Итерированные модальности рассматриваются как фиктивные кванторы — кванторы по переменным, не имеющим вхождения в формулу.

Формула $\Box B$ *логически общезначима*, е.т.е. B общезначима в каждом $W \in 2^U$ (U есть 2^n-элементное множество о.с. для формулы).

Формула $\Box B$ *логически выполнима*, е.т.е. B общезначима в некотором $W \in 2^U$.

Формула $\Diamond B$ *логически общезначима*, е.т.е. B логически выполнима.

Метаоценки типа 3 приписывают элементарным формулам к.л.в. в множествах о.с. W одно из значений $\{N, C, I\}$ в зависимости от того, входит ли формула в каждое о.с. из этого множества без отрицания, с отрицанием или же по крайней мере однажды меняет значение в этом множестве о.с.:

1. $|p|_W = N \Leftrightarrow \forall\alpha(\alpha \in W \Rightarrow |p|_\alpha = t)$,
2. $|p|_W = I \Leftrightarrow \forall\alpha(\alpha \in W \Rightarrow |p|_\alpha = f)$,
3. $|p|_W = C \Leftrightarrow \exists\alpha(\alpha \in W \wedge |p|_\alpha = t) \wedge \exists\alpha(\alpha \in W \wedge |p|_\alpha = f)$.

Отметим, что в общем случае число истолкований переменных некоторой формулы в терминах $\{N, C, I\}$ удобно представлять в виде арифметической функции вида $C_n^0 \times 2^n + C_n^1 \times 2^{n-1} + C_n^2 \times 2^{n-2} + \ldots + C_n^k \times 2^{n-k} + C_n^n \times 2^0 = 3^n$, где $C_n^k \times 2^{n-k}$ —

число множеств о.с., в которых в качестве «случайных» толкуются к.-л. k $(0 \leq k \leq n)$ переменных; элементами данного класса эквивалентности будут 2^k-элементные множества о.с. Если, далее, символом $N(k)$ $(2 \leq k \leq n-1)$ обозначить число допустимых ограничений на образование конъюнкций k случайных переменных, то выражение, описывающее их общее число для формулы с произвольным конечным числом переменных n, примет вид: $2^U - [C_n^0 \times 2^n + C_n^1 \times 2^{n-1} + C_n^2 \times 2^{n-2} \times N(2) + C_n^3 \times 2^{n-3} \times N(3) + \ldots + C_n^k \times 2^{n-k} \times N(k) + \ldots + C_n^{n-1} \times 2^1 \times N(n-1) + C_n^n \times 2^0]$.

Например, для $n = 3$: $2^8 - [C_3^0 \times 2^3 + C_3^1 \times 2^2 + C_3^2 \times 2^1 \times 7 + C_3^3 \times 2^0] = 256 - 63 = 193$;

Для $n = 4$: $2^{16} - [C_4^0 \times 2^4 + C_4^1 \times 2^3 + C_4^2 \times 2^2 \times 7 + C_4^3 \times 2^1 \times 193 + C_4^4 \times 2^0] = 65536 - 1761 = 63775$;

Для $n = 5$: $2^{32} - [C_5^0 \times 2^5 + C_5^1 \times 2^4 + C_5^2 \times 2^3 \times 7 + C_5^3 \times 2^2 \times 193 + C_5^4 \times 2^1 \times 63775 + C_5^5 \times 2^0] = 4294967296 - 646143 = 4294321153$ и т. д.

При построении семантики данного типа для S4 исходной остаётся идея последовательной интерпретации переменных формулы в терминах $\{N, C, I\}$ и дополнительного истолкования конъюнкций двух и более «случайных» переменных как возможных (случайных) или невозможных. Однако поскольку в модельной структуре для S4 уже не «каждый мир достижим из каждого», существенным оказывается понятие выделенного мира, т.е указанные интерпретации осуществляются относительно каждого отдельного о.с. для формулы. Кроме того, поскольку значимыми в S4 являются итерированные модальности, допустимы и итерированные метаистолкования переменных в терминах $\{N, C, I\}$. Получаемые в результате таких истолкований конечные множества о.с. и их множества различной степени $\langle \text{ОГ}'_n; \alpha_i; W''_n \rangle$, $(n \geq 1)$ называются относительно ограниченными множествами о.с. (ОГОСами) и выполняют роль модельных структур семантик возможных миров для S4 [6, с. 169–191],[2].

Будем иметь в виду следующую формулировку S4. Исходные символы объектного языка : $\neg, \supset, \Box$; символы метаязыка, в котором формулируются условия истинности/ложности формул системы S4: $\neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \wedge, \vee, \forall, \exists, \in$; при этом кванторы $\forall, \exists$ пробегают не только по отдельным о.с, но и по конечным множествам о.с.; аксиомами

S4 являются аксиомы и правила вывода К.И.В., а также аксиомы A1. $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$, A2. $\Box A \supset A$, A3. $\Box A \supset \Box\Box A$ и правило Гёделя. Как и в семантике для S5, имеются три типа оценок:

1) оценки формул к.л.в. в отдельных о.с. (двухзначные истинностно-функциональные или «чисто классические» оценки);

2) оценки формул, находящихся в области действия модальных операторов (двухзначные не-истинностно-функциональные оценки, которые приписываются в множествах о.с.); условия истинности и ложности формул с модальностями первой степени совпадают с аналогичными условиями для S5; при этом собственные для S4 итерированные модальности вида $\Box\Diamond$, $\Diamond\Box$, $\Diamond\Box\Diamond$, $\Box\Diamond\Box$ рассматриваются как кванторы по множествам и множествам множеств о.с., и значения формулам с данными модальностями приписываются в множествах соответствующего «уровня»:

$$|\Box\Diamond B|_{W_2} = t \Leftrightarrow \forall W_1(W_1 \in W_2 \Rightarrow |\Diamond B|_{W_1} = t);$$

$$|\Diamond\Box B|_{W_2} = t \Leftrightarrow \exists W_1(W_1 \in W_2 \wedge |\Box B|_{W_1} = t);$$

$$|\Box\Diamond\Box B|_{W_3} = t \Leftrightarrow \forall W_2(W_2 \in W_3 \Rightarrow |\Diamond\Box B|_{W_2} = t);$$

$$|\Diamond\Box\Diamond B|_{W_3} = t \Leftrightarrow \exists W_2(W_2 \in W_3 \wedge |\Box\Diamond B|_{W_2} = t).$$

(Для отрицательных модальностей определения аналогичны);

3) метаистолкования формул к.л.в. в терминах $\{N, C, I\}$, которые также осуществляются относительно множеств о.с. (трёхзначные не-истинностно-функциональные оценки); наличие существенных итерированных модальностей в S4 предполагает возможность вторичных метаистолкований формул к.л.в. в терминах $\{N, C, I\}$. Метаоценки N, I могут повторно истолковываться только как N, метаоценка C может истолковываться как N либо C, т.е. для произвольной элементарной формулы p_i справедливы утверждения: $Np_i \vee Ip_i \Rightarrow NNp_i \vee NIp_i$; $Cp_i \Rightarrow NCp_i \vee CCp_i$. При этом если ОГ$'_2$ некоторого $\langle$ОГ$'_2; \alpha_i; W''_2\rangle$ содержит для некоторой переменной p_i истолкование NCp_i, то элементами W''_2 будут только такие множества о.с. W''_1, в каждом из которых p_i по крайней мере однажды меняет значение. Если же в ОГ$'_2$ содержится интерпретация CCp_i, то в

W_2'' она будет представлена тройкой множеств о.с., соответствующей истолкованию $NCp_i \vee Np_i \vee Ip_i$.

Пример. Рассмотрим о.с. $\alpha_1 = \{p, q\}$ и все $\langle \text{О}\Gamma_1'; \alpha_1; W_1'' \rangle$ для него:

1. $\langle \{Np, Nq\}; \{p, q\}; \{\{p, q\}\} \rangle$;
2. $\langle \{Np, Cq\}; \{p, q\}; \{\{p, q\}\{p, \neg q\}\} \rangle$;
3. $\langle \{Cp, Nq\}; \{p, q\}; \{\{\neg p, q\}\{p, q\}\} \rangle$;
4. $\langle \{Cp, Cq\}; \{p, q\}; \{\{p, q\}\{p, \neg q\}\{\neg p, q\}\{\neg p, \neg q\}\} \rangle$.

Число $\langle \text{О}\Gamma_1'; \alpha_i; W_1'' \rangle$ по отдельному α_i удобно представлять в виде арифметической функции $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^k + \ldots + C_n^n = 2^n$. Слагаемое C_n^k обозначает число W_1'', в которых k переменных толкуются как «случайные»; каждое такое множество содержит 2^k о.с.

Множество 2 порождает два кластера второй степени:
$\langle \{NNp, NCq\}; \{p, q\}; \{\{\{p, q\}\{p, \neg q\}\}\} \rangle$;
$\langle \{NNp, CCq\}; \{p, q\}; \{\{\{p, q\}\{p, \neg q\}\}; \{\{p, q\}\}; \{\{p, \neg q\}\}\} \rangle$.

Тройка множеств о.с. в последнем кластере соответствует метаистолкованию $NCq \vee Nq \vee Iq$.

Множество 4 порождает четыре кластера второй степени:

1. $\langle \{NCp, NCq\}; \{p, q\}; \{\{\{p, q\}\{p, \neg q\}\{\neg p, q\}\{\neg p, \neg q\}\}\} \rangle$
2. $\langle \{NCp, CCq\}; \{p, q\}; \{\{\{p, q\}\{p, \neg q\}\{\neg p, q\}\{\neg p, \neg q\}\};$
   $\{\{p, q\}\{\neg p, q\}\}; \{\{p, \neg q\}\{\neg p, \neg q\}\}\} \rangle$
3. $\langle \{CCp, NCq\}; \{p, q\}; \{\{\{p, q\}\{p, \neg q\}\{\neg p, q\}\{\neg p, \neg q\}\};$
   $\{\{p, q\}\{p, \neg q\}\}; \{\{\neg p, q\}\{\neg p, \neg q\}\}\} \rangle$
4. $\langle \{CCp, CCq\}; \{p, q\}; \{1.\{\{p, q\}\{p, \neg q\}\{\neg p, q\}\{\neg p, \neg q\}\};$
   $2.\{\{p, q\}\{\neg p, q\}\}; 3.\{\{p, \neg q\}\{\neg p, \neg q\}\}; 4.\{\{p, q\}\{p, \neg q\}\};$
   $5.\{\{\neg p, q\}\{\neg p, \neg q\}\}; 6.\{\{p, q\}\}; 7.\{\{p, \neg q\}\}; 8.\{\{\neg p, q\}\};$
   $9.\{\{\neg p, \neg q\}\}\} \rangle$

Каждое множество о.с. с некоторым номером в последнем $\langle \text{О}\Gamma_2'; \alpha_i; W_2'' \rangle$ соответствует элементу дизъюнкции с тем же номером $1.NCp \wedge NCq \vee 2.NCp \wedge Nq \vee 3.NCp \wedge Iq \vee 4.Np \wedge NCq \vee 5.Ip \wedge NCq \vee 6.Np \wedge Nq \vee 7.Np \wedge Iq \vee 8.Ip \wedge Nq \vee 9.Ip \wedge Iq$. Число $\langle \text{О}\Gamma_2'; \alpha_i; W_2'' \rangle$ по отдельному α_i в общем случае определяется выражением: $C_n^0 \times 2^0 + C_n^1 \times 2^1 + C_n^2 \times 2^2 + \ldots + C_n^k \times 2^k + \ldots + C_n^n \times 2^n = 3^n$.

Слагаемое $C_n^k \times 2^k$ $(0 \leq k \leq n)$ представляет число $\langle \text{О}\Gamma_2'; \alpha_i; W_2'' \rangle$, порождённых кластерами первой степени с k случайными переменными. Если все k переменных истолковываются как CC, то W_2'' этого $\langle \text{О}\Gamma_2'; \alpha_i; W_2'' \rangle$ будет представлять собой 3^k-элементное множество множеств о.с. с «размерностью» элементов от 2^n до 2^k. Так, W_2 последнего из вышеприведённых ОГОСов представляет собой 9-элементное множество множеств о.с. При этом размерность элементов W_2 (множеств о.с.) варьируется от 2^n до 2^0. (Замечание: если некоторый $\langle \text{О}\Gamma_1'; \alpha_i; W_1'' \rangle$ содержит ограничения на образование конъюнкций двух и более «случайных» переменных, то при повторных интерпретациях все метаистолкования C данного кластера толкуются либо как NC, либо как CC. Поскольку в общем случае метаистолкованию двух и более переменных в качестве случайных может соответствовать любая последовательность о.с. длины от 2 до 2^n, то при соблюдении данного условия результирующие множества W_2 будут отличаться по крайней мере одним элементом.)

При итерированных метаистолкованиях более высоких степеней сохраняется принцип $Np_i \vee Ip_i \Rightarrow NNp_i \vee NIp_i$; $Cp_i \Rightarrow NCp_i \vee CCp_i$. Например, одним из возможных $\langle \text{О}\Gamma_3'; \alpha_i; W_3'' \rangle$ относительно четвёртого из вышеприведённых $\langle \text{О}\Gamma_2'; \alpha_i; W_2'' \rangle$ будет $\langle \{NCCp, CCCq\}; \{p, q\}; 1.[\{\{p, q\}\{p, \neg q\}\{\neg p, q\}\{\neg p, \neg q\}\}; \{\{p, q\}\{\neg p, q\}\};$ $\{\{p, \neg q\}\{\neg p, \neg q\}\}; \{\{p, q\}\{p, \neg q\}\}; \{\{\neg p, q\}\{\neg p, \neg q\}\}; \{\{p, q\}\}; \{\{p, \neg q\}\};$ $\{\{\neg p, q\}\}; \{\{\neg p, \neg q\}\}]; 2.[\{\{p, q\}\{\neg p, q\}\}; \{\{p, q\}\}; \{\{\neg p, q\}\}];$ $3.[\{\{p, \neg q\}\{\neg p, \neg q\}\}; \{\{p, \neg q\}\}; \{\{\neg p, \neg q\}\}] \rangle$.

Каждое множество в данном $\langle \text{О}\Gamma_3'; \alpha_i; W_3'' \rangle$ соответствует элементу дизъюнкции с тем же номером $1.NCCp \wedge NCCq \vee 2.NCCp \wedge Nq \vee 3.NCCp \wedge Iq$.

Формула $\Box\Diamond\Box(p \supset q)$ будет истинной в данном W_3, поскольку $\forall W_2(W_2 \in W_3 \Rightarrow \exists W_1(W_1 \in W_2 \wedge \forall \alpha(\alpha \in W_1 \Rightarrow |p \supset q|_\alpha = t)))$.

Общее число $\langle \text{ОГ}'_3; \alpha_i; W''_3 \rangle$ по отдельному α_i описывается арифметической функцией вида: $C_n^0 \times 3^0 + C_n^1 \times 3^1 + C_n^2 \times 3^2 + \ldots + C_n^k \times 3^k + \ldots + C_n^n \times 3^n = 4^n$, где слагаемое $C_n^k \times 3^k$ представляет число $\langle \text{ОГ}'_3; \alpha_i; W''_3 \rangle$, порождаемых теми кластерами первой степени, в каждом из которых в качестве «случайных» истолковываются к.-л. k переменных $0 \leq k \leq n$. Элементами таких W_3 будут объекты предыдущего уровня, т.е. 3^k-элементные множества множеств о.с. $0 \leq k \leq n$.

Сказанное о способе порождения конструкций $\langle \text{ОГ}'_n; \alpha_i; W''_n \rangle$, числе и типе их элементов можно обобщить следующим образом:

$\langle \text{ОГ}'_1; \alpha_i; W''_1 \rangle$: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^k + \ldots + C_n^n = 2^n$

$\langle \text{ОГ}'_2; \alpha_i; W''_2 \rangle$: $C_n^0 \times 2^0 + C_n^1 \times 2^1 + C_n^2 \times 2^2 + \ldots + C_n^k \times 2^k + \ldots + C_n^n \times 2^n = 3^n$

$\langle \text{ОГ}'_3; \alpha_i; W''_3 \rangle$: $C_n^0 \times 3^0 + C_n^1 \times 3^1 + C_n^2 \times 3^2 + \ldots + C_n^k \times 3^k + \ldots + C_n^n \times 3^n = 4^n$

Степень кластера	Число случайных переменных в ОГ	Число элементов в W	Тип элементов W
$\langle \text{ОГ}'_1; \alpha_i; W''_1 \rangle$	$0 \leq i \leq n$ (n — число переменных в формуле)	2^i	о. с.
$\langle \text{ОГ}'_2; \alpha_i; W''_2 \rangle$	$0 \leq k \leq i$	3^k	множества о. с.
$\langle \text{ОГ}'_3; \alpha_i; W''_3 \rangle$	$0 \leq m \leq k$	3^m	множества множеств о. с.

Для кластеров произвольной конечной степени искомый алгоритм примет вид:

$\langle \text{ОГ}'_R; \alpha_i; W''_R \rangle$: $C_n^0 \times R^0 + C_n^1 \times R^1 + C_n^2 \times R^2 + \ldots + C_n^k \times R^k + \ldots + C_n^n \times R^n = (R+1)^n$.

Однако, как нетрудно убедиться, конструкции степени > 3 не несут никакой новой информации о допустимых значениях переменных и их конъюнктивных сочетаниях. Таким образом, тот факт, что в S4 отсутствуют собственные итерированные модальности степени > 3, естественным образом отражён в самом способе построения данной семантики.

Предложенные семантики полны и непротиворечивы относительно исчислений S5, S4 [2].

В основу дальнейшего изложения положим процедуру перевода исчисления Гейтинга в модальную систему S4, предложенную в 1948 году Дж. МакКинси и А. Тарским. Пусть ψ — функция перевода. Тогда, в зависимости от степени сложности интуиционистской формулы, её перевод в S4 будет выглядеть следующим образом:

1. $\psi(p) = \Box p$, где p — пропозициональная переменная
2. $\psi(\neg A) = \Box\neg\psi(A)$, где A — произвольная формула
3. $\psi(A \wedge B) = \psi(A) \wedge \psi(B)$
4. $\psi(A \vee B) = \psi(A) \vee \psi(B)$
5. $\psi(A \supset B) = \Box(\psi(A) \supset \psi(B))$

«Произвольная формула A языка интуиционистской логики доказуема в исчислении Гейтинга тогда и только тогда, когда её перевод $\psi(A)$ доказуем в модальной системе S4» [5, с. 122–131].

При данном переводе, таким образом, все формулы системы Int, включая элементарные, рассматриваются как модальные. Отрицание и импликация системы Int рассматриваются как модальные понятия второй степени.

Поскольку настоящий перевод формул Int в S4 толкует как модальные все формулы, включая элементарные, значения им приписываются не в отдельных о.с., а в их множествах. Как и в семантике для S4, различаются 3 группы значений:

1) пара классических («слабых») значений $\{t, f\}$. Значения $\{t, f\}$ приписываются в отдельных о.с. элементарным формулам и выполняют сугубо вспомогательную функцию — служат для выражения смысла интуиционистских понятий системы; для обозначения классического значения f будем использовать символ метаязыка $\neg$ («фактическое» или «слабое» отрицание); для обозначения

«сильной» («инуиционистской») ложности будем использовать символ объектного языка $\sim$. Интуиционистская ложность, как и интуиционистская истинность, подчиняется принципу монотонности (сохранности): если высказывание оценено в некотором мире как истинное или ложное в сильном смысле, то оно сохраняет своё значение во всех мирах, достижимых из данного. Слабая («фактическая») ложность не подчиняется принципу сохранности. Однако оба типа ложности выполняют требование обратной сохранности: высказывание, оцененное как ложное (в сильном или слабом смысле) в настоящий момент, было ложным всегда (в сильном или слабом смысле);

2) тройка «интуиционистских» (мета)значений $\{T, R, F\}$ («достоверно истинно», «опровержимо» — refutable, «достоверно ложно»). F — «интуиционистская ложность», соответствующая операции $\sim$, «сильный напарник» T, подчиняющийся, как и T, принципу монотонности, R — «опровержимость», «слабая ложность» — аналог «фактического» отрицания, для которого выполняется только принцип обратной и не выполняется принцип прямой сохранности. Выделенным значением является T;

3) тройка метаистолкований допустимых значений переменных в терминах $\{N, C, I\}$; в силу принципа монотонности переменная, входящая в исходное о.с. без символа $\neg$, может иметь только метазначение N. (Если исходное о.с. не содержит ни одной переменной с метаотрицанием, допустимым относительно него оказывается только метаистолкование $Np_1 \dots Np_n$.) Переменная, входящая в исходное о.с. с классическим (мета)отрицанием, может принимать метазначения C или I. (Если исходное о.с. содержит k ($1 \leq k \leq n$, n — число переменных в формуле) переменных с метаотрицаниями, допустимыми относительно него оказываются 2^k метаистолкований «от» $Ip_1 \dots Ip_k$ «до» $Cp_1 \dots Cp_k$.) Метаистолкованию Cp_i может соответствовать любое W_n «размерности» от 2^1 до 2^k, в котором p_i по крайней мере однажды меняет значение. Как и ранее, если две или более переменные имеют метазначение C, рассматриваются все возможные ограничения на образование их конъюнкций. В результате всех последовательных метаистолкований допустимых значений переменных и их сочетаний в терминах $\{N, C, I\}$ относительно каждого о.с.

для формулы получаем множество конструкций вида $\langle \text{О}\Gamma'_n; \alpha_i; W''_n \rangle$, которые выполняют функцию модельных структур семантики возможных миров для системы Int. Очевидно при этом, что моделями Int будет ровно половина моделей S4.

Будем иметь в виду следующую формулировку Int: исходные символы $\sim$, $\rightarrow$,$\wedge$, $\vee$ — сильное отрицание, импликация системы Int, конъюнкция и дизъюнкция системы Int; символы $\neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \wedge, \vee, \forall, \exists, \in$ являются символами метаязыка, в котором формулируются условия истинности/ложности формул системы Int; аксиомами системы будут все аксиомы к.и.в. за исключением $\sim\sim A \rightarrow A$, вместо которой вводится $\sim A \rightarrow (A \rightarrow B)$. Правилами вывода Int «являются правила вывода классического исчисления предложений» [5, 122–131].

Формулам системы Int следующим образом приписываются значения в данной семантике:

Переменная обычным образом принимает значение t или f в о.с. в зависимости от того, входит ли в о.с. она сама или её метаотрицание: $|p|_\alpha = t \Leftrightarrow p \in \alpha$; $|p|_\alpha = f \Leftrightarrow \neg p \in \alpha$;

1. $|A|_{W_1} = T \Leftrightarrow \forall \alpha (\alpha \in W_1 \Rightarrow |A|_\alpha = t)$;
2. $|A|_{W_1} = R \Leftrightarrow \exists \alpha (\alpha \in W_1 \wedge |A|_\alpha = f)$;
3. $|A|_{W_2} = F \Leftrightarrow |\sim A|_{W_2} = T \Leftrightarrow \forall W_1 (W_1 \in W_2 \Rightarrow |A|_{W_1} = R)$.

Таким образом, значения T и F в данной семантике «несимметричны»: если истинность некоторой формулы определяется в множестве уровня W_n, то её (сильная) ложность определяется в множестве следующего уровня W_{n+1}; в W_n устанавливается только её слабая ложность (опровержимость);

4. $|\sim A|_{W_2} = R \Leftrightarrow \exists W_1 (W_1 \in W_2 \wedge |A|_{W_1} = T)$;
5. $|\sim A|_{W_3} = F \Leftrightarrow |\sim\sim A|_{W_3} = T \Leftrightarrow \forall W_2 (W_2 \in W_3 \Rightarrow |\sim A|_{W_2} = R)$.

Попытаемся продолжить процесс навешивания отрицаний:

$|\sim\sim A|_{W_3} = R \Leftrightarrow \exists W_2 (W_2 \in W_3 \wedge |\sim A|_{W_2} = T)$;

$|\sim\sim A|_{W_4} = F \Leftrightarrow |\sim\sim\sim A|_{W_4} = T \Leftrightarrow \forall W_3(W_3 \in W_4 \Rightarrow \exists W_2(W_2 \in W_3 \wedge |\sim A|_{W_2} = T))$, — в силу принятых в классической логике правил удаления кванторов последнее определение эквивалентно определению 3, поэтому «нет надобности рассматривать более двух последовательных отрицаний» [5, с. 122–131].

6. $|A \wedge B|_{W_1} = T \Leftrightarrow (|A|_{W_1} = T \wedge |B|_{W_1} = T)$;

7. $|A \wedge B|_{W_1} = R \Leftrightarrow (|A|_{W_1} = R \vee |B|_{W_1} = R)$;

8. $|A \wedge B|_{W_2} = F \Leftrightarrow |\sim (A \wedge B)_{W_2} = T \Leftrightarrow \forall W_1(W_1 \in W_2 \Rightarrow (|A|_{W_1} = R \vee |B|_{W_1} = R))$;

9. $|A \vee B|_{W_1} = T \Leftrightarrow (|A|_{W_1} = T \vee |B|_{W_1} = T)$;

10. $|A \vee B|_{W_1} = R \Leftrightarrow (|A|_{W_1} = R \wedge |B|_{W_1} = R)$;

11. $|A \vee B|_{W_2} = F \Leftrightarrow |\sim (A \vee B)|_{W_2} = T \Leftrightarrow (|A|_{W_2} = F \wedge |B|_{W_2} = F) \Leftrightarrow (|\sim A|_{W_2} = T \wedge |\sim B|_{W_2} = T)$;

12. $|A \to B|_{W_2} = T \Leftrightarrow \forall W_1(W_1 \in W_2 \Rightarrow (|A|_{W_1} = T \Rightarrow |B|_{W_1} = T))$ или, поскольку импликация $\Rightarrow$ рассматривается как материальная:

12′. $|A \to B|_{W_2} = T \Leftrightarrow \forall W_1(W_1 \in W_2 \Rightarrow (|A|_{W_1} = R \vee |B|_{W_1} = T))$;

13. $|A \to B|_{W_2} = R \Leftrightarrow \exists W_1(W_1 \in W_2 \wedge (|A|_{W_1} = T \wedge |B|_{W_1} = R))$;

14. $|A \to B|_{W_3} = F \Leftrightarrow |\sim (A \to B)|_{W_3} = T \Leftrightarrow \forall W_2(W_2 \in W_3 \Rightarrow (|A \to B|_{W_2} = R))$.

Формула B *выполнима в* Int, е.т.е. B принимает значение T в некотором W_n $n \geq 1$.

Формула B *общезначима в* Int, е.т.е. B принимает значение T в каждом W_n $n \geq 1$.

Приведённых определений достаточно, чтобы показать необщезначимость в Int ряда законов классической логики.

Формула $\sim A \vee A$ не общезначима в Int. Рассмотрим $\langle \text{ОГ}'_1; \alpha_i; W''_1 \rangle$ с характеристиками $\langle CA; \{\neg A\}; \{\{\neg A\}\{A\}\}\rangle$ и один из возможных относительно него $\langle \text{ОГ}'_2;\ \alpha_i;\ W''_2 \rangle$: $\langle CCA;\ \{\neg A\};\ \{\{\{\neg A\}\{A\}\};\ \{\{\neg A\}\};\ \{\{A\}\}\}\rangle$.

A опровержима в W_1, $\sim A$ опровержима в W_2 ,т.к. множество $\{\{A\}\}$ не содержит ни одного о.с., в котором A принимала бы значение f.

Формула $\sim (A \to B) \to (\sim A \vee \sim B)$ не общезначима в Int.

Пусть исходным о.с. является $\{\neg A, \neg B\}$, формулы A и B имеют значение R и при этом конъюнкции $A \wedge B$, $\neg A \wedge \neg B$ рассматриваются как невозможные. Таким образом, мы имеем $W_1 = \{\{A, \neg B\}, \{\neg A, B\}\}$ с характеристиками:

$$\langle\{CA, CB, I(A \wedge B), C(A \wedge \neg B), C(\neg A \wedge B), I(\neg A \wedge \neg B);\ \{\neg A, \neg B\};\ \{\{A, \neg B\}, \{\neg A, B\}\}\rangle.$$

Пусть, далее, все формулы, имеющие истолкования C, повторно истолковываются как случайные:

$$\langle\{CCA, CCB, NI(A \wedge B), CC(A \wedge \neg B), CC(\neg A \wedge B), NI(\neg A \wedge \neg B);\ \{\neg A, \neg B\}; \{\{A, \neg B\}, \{\neg A, B\}\};\ \{\{A, \neg B\}\};\ \{\{\neg A, B\}\}\rangle.$$

В каждом элементе данного W_2 формула $A \wedge B$ опровержима, т.е.

$| \sim (A \wedge B)|_{W_2} = T$, но при этом $| \sim A|_{W_2} = R$, $| \sim B|_{W_2} = R$.

Формула $(\sim A \vee \sim B) \to \sim (A \wedge B)$ будет законом Int: истинность $(\sim A \vee \sim B)$ в некотором W_2 означает, что $| \sim A|_{W_2} = T$ или $| \sim B|_{W_2} = T$, т.е. в *каждом* $W_1 \in W_2$ по крайней мере одна из формул A или B имеет значение R. Истинность $\sim (A \wedge B)$ вытекает из этого факта, так сказать, «по построению».

Формула $(A \to B) \to (\sim A \vee B)$ не общезначима в Int (интуиционистская импликация не выразима через суперпозицию сильного отрицания и дизъюнкции).

Рассмотрим $\langle \text{ОГ}'_1; \alpha_i; W''_1\rangle$ с характеристиками

$$\langle\{CA, CB, C(A \wedge B), I(A \wedge \neg B), I(\neg A \wedge B), C(\neg A \wedge \neg B);\ \{\neg A, \neg B\};\ \{\{A, B\}\{\neg A, \neg B\}\}\rangle.$$

Одним из допустимых относительно него W_2 будет $\{\{\{A, B\}\{\neg A, \neg B\}\}\{\{A, B\}\}; \{\{\neg A, \neg B\}\}\}$. Согласно определениям 12, 12$'$, формула $(A \to B)$ принимает значение T в W_2. Однако в том же W_2 формула $\sim A$ опровержима (опровергающее множество о.с. — $\{\{A, B\}\}$), а в исходном W_1 опровержима формула B.

Формула $(\sim A \vee B) \to (A \to B)$ общезначима в Int. Истинность $(\sim A \vee B)$ означает выполнение по крайней мере одного из условий: $|B|_{W_1} = T$ или $|\sim A|_{W_2} = T$ (формула B истинна в исходном W_1 или формула A опровержима в каждом элементе W_1 множества W_2, построенного на основе исходного); в обоих случаях формула $(A \to B)$ истинна.

Формула $\sim\sim A \to A$ не общезначима в Int.

Рассмотрим множество W_1 с характеристиками $\langle CA;\ \{\neg A\};\ \{\{\neg A\}\{A\}\}\rangle$ и одно из допустимых относительно него множеств 3 степени $\langle NCCA; \{\neg A\}; \{\{\{\{\neg A\}\{A\}\}; \{\{\neg A\}\}; \{\{A\}\}\}\}\rangle$ — для каждого элемента одноэлементного множества $\{\{\{\{\neg A\}\{A\}\}; \{\{\neg A\}\}; \{\{A\}\}\}\}$ выполняется условие $\forall W_2(W_2 \in W_3 \Rightarrow |\sim A|_{W_2} = R)$, т.е. $\sim\sim A$ истинна в данном W_3. Однако в исходном множестве $\{\{\neg A\}\{A\}\}$ формула A опровержима.

Формула $\sim A \to (A \to B)$ общезначима в Int: пусть $|B|_{W_1} = T$; в этом случае исходная формула истинна независимо от значений $\sim A$ и A. Пусть $|\sim A|_{W_2} = T$; следовательно, в каждом элементе W_1 данного W_2 формула A опровержима, импликация $A \to B$ истинна независимо от значения B, и формула $\sim A \to (A \to B)$ истинна. Предположим далее, что $|\sim A|_{W_2} = R$, $|A|_{W_1} = R$; поскольку значения формул $\sim A$, A не являются выделенными, исходная формула будет истинной независимо от значения B. Пусть, наконец, $|A|_{W_1} = T$, $|B|_{W_1} = R$; в W_2, построенном на основе такого W_1, $A \to B$ будет опровержимой. Однако опровержимой в этом W_2 будет и формула $\sim A$, соответственно формула $\sim A \to (A \to B)$ будет истинной.

Построенная семантика полна и непротиворечива относительно исчисления Int. Доказательство опускается.

Список литературы

[1] *Архиереев Н.Л.* Трёхзначная не-истинностно-функциональная модальная логика // Логико-философские исследования. Вып. 4. М.: Изд-во Моск. гуманитар. ун-та, 2010. С. 123–130.

[2] *Архиереев Н.Л.* Логические модальности как арифметические функции // Логические исследования. 2010. № 16. С. 3–22.

[3] *Бочаров В.А.*, *Маркин В.И.* Введение в логику М.: ИД ФОРУМ, 2008. 354 с.

[4] *Войшвилло Е.К.* Содержательный анализ модальностей S4 и S5 // Филос. науки. 1983. № 3. С. 76–80.

[5] *Гейтинг А.* Интуиционизм. М.: URSS, 2010. 162 с.

[6] *Ивлев Ю.В.* Модальная логика. М.: Изд-во МГУ, 1991. 221 с.

N.L. Arkhiereev

Set-theoretic Semantics for Heyting's System Int

Arkhiereev Nikolai L'vovich
Bauman Moscow State Technical University
5/1 Baumanskaya 2-ya St., Moscow, 105005, Russian Federation
e-mail: arkh-nikolaj@yandex.ru

The article aims at analysis of the new method of construction of set-theoretic semantics for Lewis's systems S4, S5, which doesn't use such notions as 'possible world' and 'model structure'. The initial idea is to interpret each elementary proposition occurring in some formula in the terms $\{N, C, I\}$, i.e. as logically true, logically indeterminate, logically impossible. Such restrictions of possible truth values of the variables of some formula lead to certain restrictions of the original set of state descriptions (s.d.) for the formula, namely on the basis of metavaluations $\{N, C, I\}$ restricted, additionally and relatively restricted sets of state descriptions (RSSD, ARSSD, RRSSD respectively) are constructed. These sets substitute model structures of the semantics of possible worlds. The possible world is interpreted as classical s.d. The proposed semantics involves only traditional logical notions such as truth, false, (in)compatibility of the truth values of elementary propositions etc. Besides that the number of RSSD, ARSSD, RRSSD for the formula is always finite. The algorithms of characterization and enumeration of such constructions for the formula are proposed in the article. On the basis of the translation of formulae Int into S4 implemented by McKinsey, Tarski set-theoretic semantics of the same sort for Int is also proposed. The possible world in this semantics is interpreted as classical s.d, and model structures are substituted by finite ordered sets of s.d. Sense of intuitionistic logical connectives is modeled by classical metalanguage with quantifires over s.d. and their sets.

Keywords: modal logic, intuitionistic logic, model structure, set of state-descriptions

References

[1] Arkhiereev, N.L. "Trekhznachnaya ne-istinnostno-funktsional'naya modal'naya logika" [Three-valued non-truth-functional modal logic], *Logiko-filosofskie issledovaniya* [Logical and Philosophical Studies], vol. 4. Moscow: Moscow Univ. for the Humanities Publ., 2010, pp. 123–130. (In Russian)

[2] Arkhiereev, N. L. "Logicheskie modal'nosti kak arifmeticheskie funktsii" [Logical Modalities as Arithmetical Functions], *Logicheskie issledovanija*, 2010, Vol. 16, pp. 3–22. (In Russian)

[3] Bocharov, V.A., Markin, V.I. *Vvedenie v logiku* [Introduction to logic]. Moscow: FORUM, 2008. 354 pp. (In Russian)

[4] Voishvillo, E. K. "Soderzhatel'nyi analiz modal'nostei S4 i S5" [Content Analysis of the Modalities in S4, S5], *Filosofskie nauki*, 1983, Vol. 3, pp. 76–80. (In Russian)

[5] Geiting, A. *Intuishionizm* [Intuitionism]. Moscow: URSS Publ., 2010, 162 pp. (In Russian)

[6] Ivlev, Yu. V. *Modal'naya logika* [Modal logic]. Moscow: Moscow St. Univ. Publ., 1991, 221 pp. (In Russian)