Логические исследования
2016. Т. 22. № 2. С. 27–58
УДК 164.07+510.635

Logical Investigations
2016, Vol. 22, No. 2, pp. 27–58
DOI: 10.21146/2074-1472-2016-22-2-27-58

Л.Ю. Девяткин

Неклассические модификации многозначных матриц классической логики. Часть I

Девяткин Леонид Юрьевич
Институт философии РАН
Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1
e-mail: leoniddevyatkin@gmail.com

Данная статья является первой в дилогии, посвященной многозначным матрицам классической пропозициональной логики как инструменту построения и анализа неклассических логик, и носит преимущественно обзорный характер. Сначала я анализирую три подхода к ответу на вопрос, когда многозначная матрица задает классическую логику, основанные на понятиях теории, логического следования с сингулярными заключениями, а также следования со множественными заключениями. Далее, я рассматриваю матрицы неклассических логик, являющиеся функциональными расширениями многозначных матриц классической логики. Приводятся примеры отдельных матриц, а также их классов. Изучаются их функциональные свойства. В число рассматриваемых примеров входят матрицы трехзначных логик Поста, Лукасевича, Бочвара и другие. Также, рассматривается класс матриц, задающих логики формальной противоречивости (LFI). На основе дуальности между паранепротиворечивыми и параполными логиками строится класс матриц, задающих логики формальной неопределенности (LFU). Кроме того, рассматривается класс четырехзначных матриц, сочетающих формальную противоречивость и формальную неопределенность. В заключительной части статьи изучается класс матриц, задающих паранепротиворечивые логики, которые не являются логиками формальной противоречивости.

Ключевые слова: многозначные логики, логические матрицы, паранепротиворечивость, параполнота

1. Введение

Многозначные логики важная область современных логических исследований. Один из наиболее полезных инструментов построения многозначных логик — это логические матрицы. Однако, как отмечали многие авторы, не все многозначные матрицы задают многозначную логику. В действительности, существует бесконечный класс многозначных матриц, являющихся матрицами классической пропозициональной логики. На первый взгляд, такие матрицы избыточны по отношения к двузначной матрице классической логики, и поэтому не представляют большого интереса. Однако это не так. Многозначные матрицы классической логики имеют большое значение для построения и анализа подлинно многозначных логик. Здесь стоит выделить два направления. Во-первых, можно построить матрицу неклассической логики, добавив к матрице классической логики одну или несколько неклассических операций. Примером может служить логика Бочвара, в которой используется два сорта операций — классические «внешние» и неклассические «внутренние». Вовторых, можно оставить операции классической матрицы без изменений, но модифицировать класс значений, которые интерпретируются как «истина». Так получается, в частности, матрица трехзначной логики Гейтинга. В литературе имеется достаточно примеров отдельных матриц первого и второго типов и даже их классов. Однако их систематической исследование, насколько известно автору, никогда не проводилось. Задача данной работы — заложить основу для такого исследования.

Дальнейшая структура статьи такова. В оставшейся части введения я даю необходимые определения и рассматриваю ряд общих методологических вопросов. Второй раздел посвящен функциональным расширениям матриц классической логики. Его задача — проиллюстрировать масштаб класса логик, которые могут быть построены подобным образом. Здесь я описываю известные по литературе примеры таких матриц, конструирую новые примеры, а также показываю, что многие многозначные матрицы, авторы которых исходили из совершенно других предпосылок, имеют эквивалентные формулировки в виде модификаций матриц классической логики.

Перед тем как перейти к рассмотрению матриц, задающих классическую логику, потребуется ввести ряд необходимых формальных понятий. Я начну с определений языка, логической матрицы, оценки, теории и отношения следования, задаваемых матрицей. Далее, будут рассмотрены три подхода к ответу на вопрос, когда можно говорить о том, что матрица задает многозначную логику, представленных в литературе. Различия между подходами определяются тем, что мы понимаем под «логикой» — теорию, обычное отношение следования, отношение следования с множественными заключениями. После этого я перехожу к «условиям стандартности» Россера–Тюркетта для матриц, базовыми операциями которых являются конъюнкция, дизъюнкция, импликация и отрицание. Удобной особенностью этих условий является то, что матрицы, которые им отвечают, задают классическую логику вне зависимости от того, какой из рассматриваемых трех подходов мы принимаем. Наконец, нужно обратить внимание на то, что различные матрицы могут, в определенном смысле, задавать одну и ту же логику. Поэтому в конце раздела я обращаюсь к понятию функциональной эквивалентности матриц и его связи с эквивалентностью матричных логик.

Как уже говорилось, начнем с базовых понятий.

- Пропозициональный язык $\mathcal{L} = \langle L, F \rangle$ рассматриваем как абсолютно свободную алгебру.

- Полагаем, что свободные порождающие $\mathcal{L}$ образуют счетное множество $Var = \{p_1, p_2, \dots\}$, и для каждого $i \leq n$ местность $F_i \in F$ равняется k_i.

- Множество For формул языка $\mathcal{L}$ определяется обычным образом.

- Логической матрицей называем структуру $M = \langle \mathcal{A}, D \rangle$, где $\mathcal{A} = \langle A, F \rangle$ есть алгебра, и $D \subseteq A$.

- Когда $\mathcal{L}$ и $\mathcal{A}$ подобны, говорим, что M есть матрица для $\mathcal{L}$. В этом случае гомоморфизм h из $\mathcal{L}$ в $\mathcal{A}$ называем оценкой формулы языка $\mathcal{L}$ в матрице M.

- Теорией, порождаемой M, называем множество $T(M) = \{\alpha | \forall h(h(\alpha) \in D)\}$.

- Отношением следования, порождаемым M, называем множество $Cn(M) = \{\langle X, \alpha \rangle | \forall h(h(X) \subseteq D \Longrightarrow h(\alpha) \in D)\}$.

Следующая двухзначная матрица для языка, базовыми связками которого являются конъюнкция, дизъюнкция, импликация и отрицание, порождает классические теорию и отношение логического следования.

- $C_2 = \langle\{0,1\}, \wedge, \vee, \supset, \neg, \{1\}\rangle$

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\supset$	0	1
0	1	1
1	0	1

	$\neg x$
0	1
1	0

Как отмечает Р. Вуйцицкий [49, Ch. 2], наиболее распространенными являются две трактовки понятия логической системы. В первом случае под логикой понимается множество формул, то есть теория. Во втором — множество множество умозаключений, то есть пар вида $\{X, \alpha\}$, где $X \subseteq \mathcal{L}$, $\alpha \in \mathcal{L}$. Следуя этой линии, Г. Малиновский [28, p. 30] предложил два подхода к ответу на вопрос, когда k-значная матрица порождает многозначную логику:

- Подход 1: M порождает многозначную логику, е.т.е. $T(M) \neq T(C_2)$;

- Подход 2: M порождает многозначную логику, е.т.е. $Cn(M) \neq Cn(C_2)$.

Второй подход представляется более продуктивным, так как он позволяет схватывать более тонкие различия между логическими матрицами. Для примера, рассмотрим логику парадоксов Г. Приста [35].

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

	$\sim x$
0	2
1	1
2	0

- $LP = \langle\{0,1,2\}, \vee, \wedge, \sim, \{1,2\}\rangle$.

Как показал автор, $T(LP) = T(C_2)$, однако $Cn(LP) \neq Cn(C_2)$. Находясь в рамках первого подхода, мы были бы вынуждены заключить, что матрица LP порождает классическую логику. Однако это противоречило бы целям ее построения — сохранить часть классических свойств и избавиться от других, таких как эксплозивность

Однако существует также третий подход, опирающийся на работу Т. Смайли и Д. Шусмита [45, pp. 246–247]. Он основан на понятии следования с множественными заключениями.

- Следованием с множественными заключениями, порождаемым M, называем множество $Cn_M(M) = \{\langle X, Y\rangle | \forall h(h(X) \subseteq D \Longrightarrow h(Y) \cap D \neq \emptyset)\}$.

Как пишут авторы, «Мы можем назвать логику n-значной <...> если она характеризуется простой матрицей с n значений» [45, p. 301]. Унифицируя терминологию, получаем следующий подход к определению многозначности.

- Подход 3: M порождает многозначную логику, е.т.е. $Cn_M(M) \neq Cn_M(C_2)$.

Третий подход позволяет различать матричные логики, которые отождествлялись бы как при первом, так и при втором подходе. Рассмотрим три матрицы с идентичными операциями, полученными произведением двузначной Булевой алгебры $\mathcal{B}_2$ на саму себя, и отличающиеся лишь классами выделенных значений.

$\vee$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	3	3
2	2	3	2	3
3	3	3	3	3

$\wedge$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
2	0	0	2	2
3	0	1	2	3

	$\sim x$
0	3
1	2
2	1
3	0

Пусть $M_1 = \langle\{0,1,2,3\}, \vee, \wedge, \sim, \{3\}\rangle$, $M_2 = \langle\{0,1,2,3\}, \vee, \wedge, \sim, \{2,3\}\rangle$, $M_3 = \langle\{0,1,2,3\}, \vee, \wedge, \sim, \{1,2,3\}\rangle$. Нетрудно убедиться, что имеют место следующие факты.

- $T(M_1) = T(M_2) = T(M_3)$.
- $Cn(M_1) = Cn(M_2)$, однако $Cn(M_1) \neq Cn(M_3)$.
- $Cn_M(M_1)$, $Cn_M(M_2)$, $Cn_M(M_3)$ попарно различны.

Следование с множественными заключениями имеет как своих пропонентов, так и оппонентов (см., например [46]). Однако его преимущества перед обычным следованием в определении логики такие же как у обычного следования перед теориями — более тонкое различение матричных логик.

Исторически, трактовка логической системы как теории предшествует остальным, поэтому первое обобщение классических функций на многозначный случай дано именно с таких позиций. Дж.Б. Россер и А.Р. Тюркетт предложили так называемые «условия стандартности», которые гарантируют, что класс тавтологий в многозначной логике совпадет с классическим. Операции называются *стандартными*, если они отвечают следующим условиям [38, p. 26]:

- $x \wedge y \in D \Longleftrightarrow x \in D$ и $y \in D$;
- $x \vee y \notin D \Longleftrightarrow x \notin D$ и $y \notin D$;
- $x \supset y \notin D \Longleftrightarrow x \in D$ и $y \notin D$;
- $\sim x \in D \Longleftrightarrow x \notin D$.

Хотя изначально речь шла о классах тавтологий, если связки в матрице отвечают условиям стандартности, она задает классическую логику с точки зрения любого из трех подходов. Более того, для языков соответствующего типа не существует матриц с нестандартными операциями, задающих классическое следование с единственными или множественными заключениями. Таким образом, у нас есть необходимое и достаточное условие, чтобы матрица для языка, единственными связками которого являются конъюнкция, дизъюнкция, импликация и отрицание, порождала классическую логику с точки зрения второго и третьего подходов. Теперь нам нужно определить расширения таких матриц.

Пусть на множестве E^k, имеющем мощность k, задана система функций

$$F = \{f_1(\tilde{x}_1), f_2(\tilde{x}_2), \ldots, f_n(\tilde{x}_n)\},$$

где $f_i(\tilde{x}_i) = f_i(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{a(f_i)}})$, $1 \leq i \leq n$, $a(f_i)$ обозначает местность f_i. Будем называть *суперпозицией* функций F такую функцию $g'(\tilde{y}') = g'(y'_1, y'_2, \ldots, y'_{a(g')})$, что она выполняет одно из двух условий:

- $g'(\tilde{y}')$ получена из $f_i(\tilde{x}_i)$ путем замены переменных.
- $g'(\tilde{y}') = g_n(g_1(\tilde{y}_1), g_2(\tilde{y}_1), \ldots, g_m(\tilde{y}_m))$, где $g_j(\tilde{y}_j)$ есть суперпозиция функций из F и $j \in \{1, \ldots, m, n\}$.

Множество $[F]$ называется *замыканием класса функций* F, если оно содержит все суперпозиции функций над классом F и только их.

Пусть $M = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ и $M' = \langle \mathcal{A}', D' \rangle$ матрицы, и F, F' классы их базовых операций. Если $[F] \subseteq [F']$, называем M' *функциональным расширением* M. Если $[F] = [F']$, говорим, что M и M' *функционально эквивалентны.*

Как отмечают К. Бергман и соавторы, функционально эквивалентные алгебры «считаются „одинаковыми“ во всех отношениях» [4]. Аналогично, когда в функционально эквивалентных матрицах M и M' совпадают классы выделенных значений D и D', задаваемые ими логики можно рассматривать как варианты одной и той же логики в разных языках [15, pp. 312–313]. С формальной точки зрения, можно говорить о наличии консервативных переводов (см. [16]) между логиками, которые порождаются матрицами M и M', или об их дефинициальной эквивалентности [50, § 1.8].

В следующем разделе я рассматриваю матрицы языковых вариантов различных логик, являющиеся функциональными расширениями матриц с базовыми операциями, отвечающими условию стандартности.

2. Функциональные расширения матриц классической логики

Этот раздел посвящен матрицам многозначных логик, построенным с помощью пополнения матриц классической логики неклассическими операциями. Моя первая задача — проиллюстрировать, насколько важную роль играют многозначные матрицы классической логики как основа для построения неклассических логик. Для этого я показываю, что значительное число полезных многозначных логик могут быть заданы как расширение классической. Сначала я привожу матрицы для хорошо известных трехзначных логик Поста, Лукасевича и Бочвара, а также некоторых других, которые получаются добавлением неклассического отрицания к матрице классической логики. После этого рассматривается обширный класс $8Kb$ трехзначных матриц для так называемых «логик формальной противоречивости», который включает в себя значительную часть известных трехзначных паранепротиворечивых логик. В изначальной формулировке, каждая матрица из $8Kb$ добавлением к матрице позитивного фрагмента классической логики двух операций — паранепротиворечивого отрицания и оператора непротиворечивости. Однако можно показать, что каждая из них также имеет функционально эквивалентную формулировку, имеющую вид расширения матрицы полной классической логики неклассическим отрицанием. Затем я перехожу ко второй задаче — проанализировать, как выбор базовых операций классической матрицы влияет на то, какие неклассические логики мы можем получить, расширяя ее. Используя дуальность между паранепротиворечивыми и параполными логиками, я показываю, что при построении матриц для последних эффективнее использовать формулировку матрицы классической логики с коимпликацией вместо импликации. Развивая эту тему, я также демонстрирую, что в случае матриц для логик, которые одновременно являются и параполными, и паранепротиворечивыми, классическая матрица, на основе которой они строятся, должна включать как импликацию, так и коимпликацию одновременно. В заключительной части раздела я рассматриваю еще один класс паранепротиворечивых логик, более слабых с функциональной точки зрения, чем логики формальной противоречивости. Матрицы в этом классе получены добавлением отрицания Лукасевича к матрице позитивного фрагмента классической логики, и в них не выразимо классическое отрицание. В качестве примеров рассматриваются матрица логики $PCont$, а также матрица логики Халковской–Зайца Z.

Первым примером послужит трехзначная логика Поста [34]. Операции ее матрицы $P_3 = \langle\{0,1,2\}, \vee, \circlearrowleft, \{2\}\rangle$ определяются следующими таблицами:

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

	$\circlearrowleft x$
0	1
1	2
2	0

Как известно, через базовые операции P_3 выразима любая операция на $\{0,1,2\}$ [51], в том числе следующие:

$\supset$	0	1	2
0	2	2	2
1	2	2	2
2	1	0	2

	$\neg x$
0	2
1	2
2	0

	$\sim x$
0	2
1	1
2	0

Операции $\vee$, $\supset$ и $\neg$ отвечают условиям стандартности. Поэтому, если определить конъюнкцию $\wedge$ стандартным образом через $\vee$ и $\neg$, то она тоже будет стандартной. В результате, получаем матрицу $P_3' = \langle\{0,1,2\}, \wedge, \vee, \supset, \neg, \sim \{2\}\rangle$, которая является расширением матрицы классической логики операцией $\sim$. При этом, выполняется следующее тождество: $\circlearrowleft x = \sim ((x \supset x) \supset x)$. Это значит, что матрицы P_3 и P_3' функционально эквивалентны.

Перейдем к следующему примеру — трехзначной логике Лукасевича [26]. Ее матрица $Ł_3 = \langle\{0,1,2\}, \to, \sim \{2\}\rangle$ содержит две базовые операции, а оставшиеся определяются следующими тождествами: $x \vee y = (x \to y) \to y$; $x \wedge y = \sim (\sim x \vee \sim y)$. Таблицы для $Ł_3$ имеют следующий вид:

$\to$	0	1	2
0	2	2	2
1	1	2	2
2	0	1	2

	$\sim x$
0	2
1	1
2	0

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

В то время как $\wedge$ и $\vee$ отвечают условиям стандартности, для $\to$ и $\sim$ это не так: $x \notin D$, $\sim x \notin D$ и $x \to y \notin D$ при $x = 1$, $y = 0$. В $Ł_3$ определимы следующие операции: $x \supset y = x \to (x \to y)$; $\neg x = x \to (x \to\sim (x \to x))$ [50, pp. 71–72]. Как показывают соответствующие таблицы, они отвечают условиям стандартности:

$\supset$	0	1	2
0	2	2	2
1	2	2	2
2	0	1	2

	$\neg x$
0	2
1	2
2	0

При этом, имеет место [23, с. 44]: $x \to y = (x \supset y) \wedge (\sim x \supset\sim y)$. Это значит, что матрица $Ł_3$ функционально эквивалентна матрице $Ł'_3 = \langle\{0,1,2\}, \wedge, \vee, \supset, \neg, \sim \{2\}\rangle$. Причем, $Ł'_3$ получена добавлением $\sim$ к матрице классической логики.

Теперь рассмотрим трехзначную логику Бочвара [5]. Хотя ее создатель явным образом указывал на то, что эта система расширяет классическую логику, в его формулировке к классической матрице добавляется целый набор операций, включающий, в том числе, отдельные неклассические конъюнкцию, дизьюнкцию, импликацию, отрицание. Ниже я покажу, что, подобно P_3 и $Ł_3$, достаточно добавить к стандартным операциям инволюционное отрицание $\sim$, чтобы получить матрицу, функционально эквивалентную матрице Бочвара. Оригинальная матрица $B_3 = \langle\{0,1,2\}, \cap, \sim, \Box, \bullet, \{2\}\rangle$ содержит в качестве базовых операций одну бинарную и три унарных. Они задаются следующими таблицами:

$\cap$	0	1	2
0	0	1	0
1	1	1	1
2	0	1	2

	$\sim x$
0	2
1	1
2	0

	$\Box x$
0	0
1	0
2	2

	$\bullet x$
0	0
1	2
2	0

Оставшиеся операции определяются через них: $x \cup y =\sim (\sim x \cap \sim y)$; $x \supset y =\sim (x \cap \sim y)$; $x \cap^{\Box} y = \Box x \cap \Box y$; $x \cup^{\Box} y = \Box x \cup \Box y$; $x \supset^{\Box} y = \Box x \supset \Box y$; $\neg x =\sim \Box x$. Как отмечает Бочвар, операции $\cap^{\Box}$, $\cup^{\Box}$, $\supset^{\Box}$, $\neg$ составляют фрагмент его системы, изоморфный классическому исчислению высказываний. Действительно, все эти операции отвечают стандартным условиям стандартности. Заметим, что, кроме того, условию стандартности для конъюнкции отвечает операция $\cap$. Причем, выполняются следующие тождества: $\Box x = \sim \neg x$; $\bullet x = \sim \Box \sim (x \cap \neg x)$. А это значит, что матрица $B_3' = \langle\{0,1,2\}, \cap, \cup^{\Box}, \supset^{\Box}, \neg, \sim \{2\}\rangle$, полученная из классической матрицы добавлением $\sim$, функционально эквивалентна матрице B_3.

Проанализируем только что рассмотренные примеры. Как я уже отмечал, через операции P_3 выразимы все операции на $\{0,1,2\}$. Если добавить к матрице $Ł_3$ любую операцию, не выразимую в ней, получим матрицу, функционально эквивалентную P_3 [17]. В то же время, B_3 функционально вложима в $Ł_3$ [44]. Каждая из матриц P_3', $Ł_3'$, B_3' получена добавлением к классической матрице инволюции ($\sim$). То есть, мы строим последовательность инволюционных расширений классической логики убывающей выразительной силы. Поскольку число операций конченой местности на конечном множестве конечно, тем более конечно число попарно различных трехзначных матриц, базовыми операциями которых являются стандартные конъюнцкия, дизъюнкция, импликация и отрицание, а также инволюция. И среди них мы можем указать самую слабую с функциональной точки зрения, которая завершит нашу последовательность. Для этого нам потребуется понятие C-расширяющей матрицы.

Назовем операцию на $\{0,1,2\}$ *C-расширяющей*, если на множестве $\{0,2\}$ ее значениями будут только элементы этого же множества. Если все операции матрицы M являются C-расширяющими, говорим, что M есть *C-расширяющая матрица*[1]. Обратим внимание на следующий факт. Пусть $M = \langle\{0,1,2\}, \wedge, \vee, \supset, \neg, \{2\}\rangle$ есть матрица, в которой все базовые операции являются стандартными и C-расширяющими. В ней определимы следующие операции B_3: $\Box x = \neg\neg x$; $x \cap^{\Box} y = \Box x \wedge \Box y$; $x \cup^{\Box} y = \Box x \vee \Box y$; $x \supset^{\Box} y = \Box x \supset \Box y$. Поскольку область значений всех этих операций ограничена $\{0,2\}$, через них не выразимы никакие другие стандартные $\wedge$, $\vee$ или $\supset$. В этом смысле матрица $\langle\{0,1,2\}, \wedge^{\Box}, \vee^{\Box}, \supset^{\Box}, \neg, \{2\}\rangle$ является слабейшей. Если же мы добавим к ней инволюцию, такая матрица будет

[1] Я использую терминологию, предложенную В.К. Финном [17]. В литературе это свойство называют также «нормальностью» [37, pp. 55–56], [19, p. 31].

эквивалентна матрице параполной логики LAP [32]. Базовые операции LAP определяются так:

$\wedge^\square$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	0	0
2	0	0	2

$\vee^\square$	0	1	2
0	0	0	2
1	0	0	2
2	2	2	2

$\supset^\square$	0	1	2
0	2	2	2
1	2	2	2
2	0	0	2

	$\sim x$
0	2
1	1
2	0

Стандартное отрицание $\neg$ определимо в данной матрице с помощью такого тождества: $\neg x = \sim((x \supset^\square x) \supset^\square x)$.

Когда мы рассматриваем расширения классических матриц неклассическим отрицанием, не обязательно ограничиваться инволюцией. Вместо нее мы можем взять отрицание, задаваемое следующей таблицей:

	$\neg^\diamond x$
0	2
1	0
2	0

Оно отвечает условию стандартности при $D = \{1, 2\}$, однако при $D = \{2\}$ это не так: $x \in D$ и $\neg^\diamond x \in D$ при $x = 1$. Если мы выберем $\neg^\diamond$ как неклассическое отрицание, наиболее слабым расширением классической матрицы окажется матрица $\langle\{0, 1, 2\}, \wedge^\square, \vee^\square, \supset^\square, \neg^\square, \neg^\diamond, \{2\}\rangle$. Она функционально эквивалентна матрице $I^1 = \langle\{0, 1, 2\}, \supset^\square, \neg^\diamond, \{2\}\rangle$ [43]. Это подтверждают следующие тождества [13]: $\neg^\square x = x \supset^\square \neg^\diamond(x \supset^\square x)$; $x \vee^\square y = \neg^\square x \supset^\square y$; $x \wedge^\square y = \neg^\square(x \supset^\square \neg^\square y)$.

До сих пор мы рассматривали только примеры с $D = \{2\}$. Последний пример подталкивает к тому, чтобы расширить область рассмотрения. Дело в том, что матрица I^1, которая задает параполную логику, обычно рассматривается в вместе с P^1, своим дуальным «близнецом». Матрица $P^1 = \langle\{0, 1, 2\}, \supset^\diamond, \neg^\square, \{1, 2\}\rangle$ содержит две базовые операции. Через них можно определить остальные стандартные связки для $D = \{1, 2\}$: $\neg^\diamond x = x \supset^\diamond \neg^\square(x \supset^\diamond x)$; $x \vee^\diamond y = \neg^\diamond x \supset^\diamond y$; $x \wedge^\diamond y = \neg^\diamond(x \supset^\diamond \neg^\diamond y)$. Соответствующие таблицы таковы:

$\wedge^\diamond$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	2	2
2	0	2	2

$\vee^\diamond$	0	1	2
0	0	2	2
1	2	2	2
2	2	2	2

$\supset^\diamond$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	2
2	0	2	2

Функциональная эквивалентность I^1 и P^1 вытекает из тождеств $\neg^\square x = x \supset^\square \neg^\diamond(x \supset^\square x)$ и $\neg^\diamond x = x \supset^\diamond \neg^\square(x \supset^\diamond x)$. Если же мы заменим в P^1 отрицание $\neg^\square$ на $\sim$, то получим матрицу $P^2 = \langle\{0,1,2\}, \supset^\diamond, \sim, \{1,2\}\rangle$ паранепротиворечивой логики, дуальной LAP [30]. Логики, задаваемые матрицами P^1 и P^2 являются представителями широкого класса логик формальной противоречивости. Этот класс имеет самое прямое отношение к теме данной статьи.

Речь пойдет о классе $8Kb$ трехзначных матриц для логик формальной противоречивости, описанном в [7] и [9]. Трехзначная матрица $M = \langle\{0,1,2\}, \wedge, \vee, \supset, \neg, \circ, \bullet, \{1,2\}\rangle$ принадлежит данному, если $\wedge$, $\vee$ и $\supset$ отвечают условиям стандартности и C-расширения, а $\neg$, $\circ$, $\bullet$ задаются следующими таблицами:

	$\neg x$
0	2
1	1 или 2
2	0

	$\circ x$
0	2
1	0
2	2

	$\bullet x$
0	0
1	2
2	0

Такие матрицы задают обширный класс логик, в который, в частности, попадают J_3 [12], T^3 [47], [48, с. 49–50], S_3 [42], P^1, P^2, P^3 [7], $LFI2$ [8]. Для нас особенно интересно, что каждая из получающихся матриц является функциональным расширением P^1 [9, p. 80]. Как указано выше, в P^1 выразимо стандартное отрицание $\neg^\diamond$. В свою очередь, в P^1 выразим оператор $\circ$: $\circ x = \neg^\square\neg^\square x \vee^\diamond \neg^\square(x \wedge^\diamond x)$ [9, p. 19]. Естественным образом, через $\neg^\square$ и $\circ$ выразим оператор $\bullet x$: $\bullet x = \neg^\square \circ x$. А это значит, что любая матрица из семейства $8Kb$ имеет функционально эквивалентную матрицу вида $M = \langle\{0,1,2\}, \wedge, \vee, \supset, \neg^\diamond, \neg, \{1,2\}\rangle$, полученную из классической матрицы добавлением нестандартного отрицания $\neg$. Таким образом, с функциональной точки зрения классическое отрицание и оператор непротиворечивости оказываются равносильны.

Заметим, что в P^1 также выразимы модальные операторы $\Box$ и $\Diamond$. Это указывает на тесную связь между логиками формальной противоречивости и модальными логиками. Ее подробному исследованию посвящена работа [29]. Кроме того, обратим внимание, что $\Box$, $\neg^{\Diamond}$ и $\bullet$ суть ни что иное как J-операторы на множестве $\{0, 1, 2\}$, поэтому каждая логика, задаваемая матрицей из рассматриваемого класса является истинностно-полной[2], и поэтому ее можно аксиоматизировать как расширение классической логики по алгоритму, разработанному О. Аншаковым и С. Рычковым [1].

Выше я указал, что P^1 и P^2 имеют функционально эквивалентных дуальных параполных «напарников» — I^1 и I^2 (LAP). Это верно также для других логик из $8Kb$. Матрица J_3 функционально эквивалентна $Ł_3$ [11], а S_3 функционально эквивалентна B_3. В $8Kb$ нет напарника для P_3, так как авторы рассматривают только C-расширяющие матрицы. Если мы откажемся от этого ограничения, то без труда получим нужную матрицу. Для этого достаточно взять следующие операции:

$\supset$	0	1	2
0	2	2	1
1	0	2	2
2	0	2	2

	$\neg x$
0	2
1	0
2	0

	$\sim x$
0	2
1	1
2	0

Отрицание Поста выразимо так: $\circlearrowleft x = x \supset\sim x$. А это значит, что матрица $P_3'' = \langle\{0, 1, 2\}, \wedge, \vee, \supset, \neg, \sim, \{1, 2\}\rangle$, являющаяся расширением классической матрицы посредством инволюции, функционально эквивалентна обычной матрице логики Поста $P_3 = \langle\{0, 1, 2\}, \vee, \circlearrowleft, \{2\}\rangle$.

До сих пор мы рассматривали расширения классической матрицы для языка, в котором единственными операциями являются $\wedge$, $\vee$, $\supset$ и $\neg$. Однако такой выбор операций для классической матрицы далеко не всегда оказывается оптимальным. Ниже мы проиллюстрируем это примерами классов параполных и паранормальных матриц, подобных матрицам из $8Kb$. Для этого нам необходимо сперва оста-

[2]Подробнее по данной теме см. [22].

новиться на феномене дуальности между паранепротиворечивыми и параполными логиками [6], [10], [21].

Вообще, паранепротиворечивой матрице с $D = \{1, 2\}$ можно сопоставить дуальную параполную матрицу с $D = \{2\}$. В терминах мультиследования дуальность между паралогиками описывается так [6], [29]. Пусть $\circledcirc$ связка. Обозначим через $\circledcirc^d$ дуальную к ней. Обозначим X^d результат замены в множестве формул X всех вхождений связки $\circledcirc$ на $\circledcirc^d$. Теперь пусть $L_1 = \{S_1, \vdash_1\}$ логика. Говорим, что логика $L_2 = \{S_2, \vdash_2\}$ дуальна к L_1, если $S_2 = S_1^d$ и $X^d \vdash_2 Y^d \Longleftrightarrow Y \vdash_1 X$.

В случае логических матриц, из этого вытекает следующее. Пусть M_1 и M_2 такие матрицы, что $\vdash_1 = Cn_M(M_1)$ и $\vdash_2 = Cn_M(M_2)$. Матрица M_2 дуальна M_1, когда $\{X, Y\} \in Cn_M(M_1) \Longleftrightarrow \{Y, X\} \in Cn_M(M_2)$. Теперь обратим внимание на следующее:

- $\{X, Y\} \in Cn_M(M_1) \Longleftrightarrow \forall h(h(X) \subseteq D_1 \Longrightarrow h(Y) \cap D_1 \neq \emptyset)\}$;
- $\{X, Y\} \in Cn_M(M_1) \Longleftrightarrow \forall h(h(Y) \subseteq \bar{D}_1 \Longrightarrow h(X) \cap \bar{D}_1 \neq \emptyset)\}$, где $\bar{D}_1 = A_1 \setminus D_1$;
- $\{Y, X\} \in Cn_M(M_2) \Longleftrightarrow \forall h(h(Y) \subseteq D_2 \Longrightarrow h(X) \cap D_2 \neq \emptyset)\}$;
- $\{Y, X\} \in Cn_M(M_2) \Longleftrightarrow \forall h(h(X) \subseteq \bar{D}_2 \Longrightarrow h(Y) \cap \bar{D}_2 \neq \emptyset)\}$, где $\bar{D}_2 = A_2 \setminus D_2$.

Пусть $M = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ и $M' = \langle \mathcal{A}, \bar{D} \rangle$ матрицы, отличные лишь классами выделенных значений, причем $\bar{D} = A \setminus D$ и, как следствие, $D = A \setminus \bar{D}$. Ясно, что $\{X, Y\} \in Cn_M(M) \Longleftrightarrow \{Y, X\} \in Cn_M(M')$. То есть, матрица M' дуальна матрице M. Это позволяет легко распространить определение дуальность с мультиследования на обычно следования и теории: если матрица M задает следование (теорию), то дуалом следования (теории) будет задавать соответствующая матрица M'[3].

[3]Однако здесь могут возникнуть возражения эпистемологического характера. Если мы интерпретируем элементы множества-носителя матрицы как степени истинности, а класс выделенных значений как «истину», возникает противоречие. Этого можно избежать, если ввести понятие анти-выделенного значения в стиле [27]. Таким путем идут авторы [6].

Теперь пусть $M_1 = \langle\{0,1,2\}, F, \{2\}\rangle$ трехзначная матрица. Ее дуалом будет матрица $M_1' = \langle\{0,1,2\}, F, \{0,1\}\rangle$. Определим отображение ι следующим образом: $\iota(0) = 2$, $\iota(1) = 1$, $\iota(2) = 0$. Пусть F^* класс операций, где каждый элемент есть

$$f^*(x_1, \ldots, x_n) = \iota(f(\iota(x_1), \ldots, \iota(x_n)))$$

для каждой операции $f \in F$. Поскольку $\iota\iota x = x$, матрица $M_1^* = \langle\{0,1,2\}, F^*, \{1,2\}\rangle$ изоморфна матрице M' относительно ι. Аналогичное построение нетрудно провести также и для матрицы $M_2 = \langle\{0,1,2\}, F, \{1,2\}\rangle$, получив сначала дуальную матрицу M_2' с классом выделенных значений $\bar{D} = \{0\}$, а после этого M_2^* с классом выделенных значений $\iota(D) = \{2\}$.

Описанное выше построение иллюстрирует, как получить из паранепротиворечивой матрицы параполную и наоборот. Причем, поскольку ι совпадает с инволюционным отрицанием $\sim$, если матрица уже содержит инволюцию, то ее дуал будет ей функционально эквивалентен. Если же мы берем более слабое отрицание, то все сложнее. Матрицы P^1 и I^1 оказываются функционально эквивалентны, так как их значения ограничены $\{0,2\}$, а их отрицания суть гомоморфизмы из $\{0,1,2\}$ на $\{0,2\}$. А вот дуал матрицы P^3 не только не будет ей функционально эквивалентным, но и не будет задаваться расширением класса $\{\wedge, \vee, \supset, \neg\}$ классических операций с помощью неклассического отрицания. Остановимся на этом подробнее.

Операции матрицы $P^3 = \langle\{0,1,2\}, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \{1,2\}\rangle$ задаются следующими таблицами [7]:

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

$\vee$	0	1	2
0	0	2	2
1	2	1	2
2	2	2	2

$\rightarrow$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	1	2
2	0	2	2

	$\neg x$
0	2
1	2
2	0

Для того чтобы определить операции дуальной матрицы $I^3 = \langle\{0,1,2\}, \wedge^*, \vee^*, \leftarrow^*, \neg^*, \{2\}\rangle$, будем использовать следующие тождества: $x \wedge^* y =\sim (\sim x \vee \sim y)$; $x \vee^* y =\sim (\sim x \wedge \sim y)$: $x \leftarrow^* y =\sim (\sim x \rightarrow\sim y)$; $\neg^* x =\sim \neg \sim x$. В результате, получим такие таблицы:

$\wedge^*$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	0
2	0	0	2

$\vee^*$	0	1	2
0	0	0	2
1	0	1	2
2	2	2	2

$\leftharpoonup^*$	0	1	2
0	0	0	2
1	0	1	2
2	0	0	0

	$\neg^* x$
0	2
1	0
2	0

Однако пока здесь не хватает импликации. Поскольку в P^3 выразимы операции P^1, I^3 дуальна P^3 и I^1 дуальна P^1, в I^3 выразимы операции I^1. Как следствие, в I^3 выразима импликация $\supset^\square$. Однако матрица $\langle\{0,1,2\},\wedge^*,\vee^*,\supset^\square,\neg^*,\{2\}\rangle$ не будет функционально эквивалентна матрице I^3. Допустим обратное: пусть $\leftharpoonup^*$ представима в виде $f(g_1(\tilde{x}_1),\ldots,g_n(\tilde{x}_n))$, где $g_i(\tilde{x}_i) = g_i(x_{i_1},\ldots,x_{i_{a(g_i)}})$ и $f, g_i \in \{\wedge^*,\vee^*,\supset^\square,\neg^*\}$ $(1 \leq i \leq n)$. Если $\circledcirc \in \{\wedge^*,\vee^*,\leftharpoonup^*\}$, то получаем: $x \circledcirc y = 1 \iff x = 1$ и $y = 1$. При этом, $x \supset^\square y \neq 1$ и $\neg^* x \neq 1$. Следовательно, $f, g_i \in \{\wedge^*,\vee^*\}$. Однако, если $\circledast \in \{\wedge^*,\vee^*\}$, то $x \circledast y = 2$, когда $x = 2$ и $y = 2$. В то же время, $2 \leftharpoonup^* 2 = 0$. Таким образом, мы пришли к противоречию, и допущение о выразимости $\leftharpoonup^*$ через $\wedge^*$, $\vee^*$, $\supset^\square$, $\neg^*$ неверно.

Единственной альтернативой $\supset^\square$, то есть C-расширяющей импликацией, которая отвечает условию стандартности при $D = \{2\}$, будет следующая операция:

$\supset$	0	1	2
0	2	2	2
1	2	2	2
2	0	1	2

Однако она не выразима в I^3. Нетрудно убедиться, что все операции I^3 отвечают следующему условию. Пусть $\tilde{a} = (a_1,\ldots,a_n)$ такой набор чисел, что $a_i \in \{1,2\}$ $(1 \leq i \leq n)$. Для любого такого набора чисел $\tilde{b} = (b_1,\ldots,b_n)$, что $b_i \neq a_i$, выполняется: $f(\tilde{x}) \neq c(\tilde{a})$, где $c(\tilde{a}) = 1$ или $c(\tilde{a}) = 2$. Например, пусть $a_1 = 1$ и $a_2 = 2$. Получаем следующие наборы вида $\tilde{b}$: $(0,0)$, $(0,1)$, $(2,0)$, $(2,1)$. В данном случае, если $\circledcirc \in \{\wedge^*,\vee^*,\leftharpoonup^*\}$, то $b_1 \circledcirc b_2 \in \{0,2\}$ для каждого из этих $\tilde{b}$. То есть, $c(\tilde{a}) = 1$. Однако, $2 \supset 1 = 1$ и $2 \supset 2 = 2$. Это показывает, что $\supset$ нарушает описанное выше условие. Однако класс функций, которые отвечают данному условию является замкнутым [51]. Следовательно, операция $\supset$ не выразима в I^3.

В то же время, в двухзначной матрице C_2 импликация и коимпликация равноправны: $x \subset y = \neg(\neg x \supset \neg y)$; $x \supset y = \neg(\neg x \subset \neg y)$. В частности, это значит, что мы можем сформулировать стандартное условие для $\subset$: $x \supset y \in D \Longleftrightarrow x \notin D$ и $y \in D$. Операция $\leftarrow^*$ отвечает этому условию. Поэтому I^3 также может рассматриваться как расширение матрицы классической логики посредством нестандартного отрицания.

Рассмотренный выше пример указывает на важное отличие многозначного случая от двухзначного. В двухзначной логике не важно, берем ли мы в качестве базовых операций импликацию, коимпликацию, обе или ни одну, поскольку все операции на $\{0,1\}$ выразимы через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание. Однако уже в трехзначном случае этот выбор играет критическую роль. Как я показал выше, каждой матрице из $8Kb$ можно сопоставить ее параполный дуал. Это дает нам класс $8Kb^*$ матриц, порождающих параполные логики, дуальные паранепротиворечивым логикам, задаваемым классом $8Kb$. В силу дуальности, каждая из матриц $8Kb$ будет задаваться матрицей с $D = \{2\}$, в которой операции отвечают следующим условиям:

$\wedge$	0	1	2
0	0	0 или 1	0
1	0 или 1	0 или 1	0 или 1
2	0	0 или 1	2

$\vee$	0	1	2
0	0	0 или 1	2
1	0 или 1	0 или 1	2
2	2	2	2

$\leftarrow$	0	1	2
0	0	0 или 1	2
1	0 или 1	0 или 1	2
2	0	0 или 1	0

	$\neg x$
0	2
1	0 или 1
2	0

	$\circ x$
0	2
1	0
2	2

	$\bullet x$
0	0
1	2
2	0

Заметим, что операторы $\circ$ и $\bullet$ совпадают с таковыми в $8Kb$. Однако меняется их содержательная интерпретация. В $8Kb$ мы трактуем их как операторы непротиворечивости и противоречивости, а в $8Kb^*$ как операторы полноты и неполноты. Такие матрицы задают обширный класс логик, в который, в частности, попадают $Ł_3$, E_3 [14], [18], B_3, I^1, I^2, I^3 и многие другие матрицы. Каждая из получающихся матриц является функциональным расширением I^1. В то же время, в I^1 выразимо стандартное отрицание $\neg^\Box$. Кроме того, I^1 и P^1 функционально эквивалентны, и нам уже известно, что в P^1 выразимы $\circ$ и $\bullet$. А это значит, что любая матрица из семейства $8Kb^*$ имеет функционально эквивалентную матрицу вида $M = \langle\{0,1,2\}, \wedge, \vee, \subset, \neg^\Box, \neg, \{1,2\}\rangle$, полученную из классической матрицы добавлением нестандартного отрицания $\neg$. То есть, как и в случае $8Kb$, оператор полноты и стандартное отрицание взаимозаменимы.

Если же мы захотим использовать стандартную C-расширяющую импликацию вместо коимпликации, наши варианты будут ограничены связками, имеющими следующий вид:

$\to$	0	1	2
0	2	0 или 1	0
1	2	2	2
2	2	2	2

В этом случае, как отмечает Маркос [30], мы получим только 1,024 матрицы вместо 8,192 как в вышло при построении семейства $8Kb$, и 7,168 матриц останутся без своих дуалов. Аналогично, если мы заменим импликацию на коимпликацию при определении $8Kb$, нам придется использовать таблицу

$\leftarrow$	0	1	2
0	0	0	2
1	0	0	1 или 2
2	0	0	0

И мы опять получим 1,024 матрицы вместо 8,192.

Пока мы можем заключить, что импликация дает нам больше паранепротиворечивых логик, а коимпликация — параполных. Но что если мы захотим построить аналогичный класс для логик, которые являются одновременно паранепротиворечивыми и параполными? Оказывается, в этой ситуации нам снова придется изменить выбор базовых операций для матрицы классической логики, которую мы расширяем.

Паранепротиворечивость и параполнота могут определяться поразному, в зависимости от того, рассматриваем ли мы логику с точки зрения отношения следования или класса тавтологий. Как и авторы большинства процитированных в этом разделе работ, в текущей статье я применяю первый подход. Логика называется паранепротиворечивой, если в ней не выполняется принцип эксплозивности: $\alpha, \neg\alpha \vdash \beta$. Логика называется параполной, если в ней не выполняется принцип имплозивности: $\alpha \vdash \beta, \neg\beta$. Коль скоро мы определяем паранепротиворечивость и параполноту в терминах эксплозивности и имплозивности, трех значений оказывается недостаточно, чтобы построить матрицу, обладающую обоими свойствами одновременно. Чтобы определить параполное отрицание $\sim$ нам нужно по меньшей мере одно значение, такое что $a \in D$ и $\sim a \in D$, а также по меньшей мере одно значение, такое что $b \notin D$ и $\sim b \notin D$. Однако $\sim$ также должно вести себя как следует хотя бы на одном выделенном и одном невыделенном значении. Это значит, что минимальное число для матрицы паранормальной логики равняется четырем.

Поскольку мы уже выяснили, что любая матрица из $8Kb$ и $8Kb^*$ функционально эквивалентна матрице со стандартными операциями $\wedge, \vee, \subset, \neg$ и нестандартным (паранепротиворечивым или параполным) отрицанием $\sim$, нетрудно определить аналогичные классы паранепротиворечивых, параполных или паранормальных матриц для k значений. Однако в последнем случае нам придется взять в качестве базовых операций импликацию и коимпликацию одновременно.

Рассмотрим матрицу $M = \langle\{0,1,2,3\}, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftarrow, \neg, \sim, \{2,3\}\rangle$, операции которой определяются следующим образом:

$\wedge$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	0	0
2	0	0	2	3
3	0	0	3	3

$\vee$	0	1	2	3
0	0	0	3	3
1	0	1	3	3
2	3	3	2	3
3	3	3	3	3

$\rightarrow$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	3	3	3	3
2	0	0	2	3
3	0	0	3	3

$\leftarrow$	0	1	2	3
0	0	0	3	3
1	0	1	3	3
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0

	$\neg x$
0	3
1	3
2	0
3	0

	$\sim x$
0	3
1	1
2	2
3	0

Убедимся, что здесь выразимы операторы, выражающие непротиворечивость, полноту или их отсутствие. Достаточно следующих тождеств: $\overrightarrow{\circ}x = \sim \neg(x \to x)$; $\overrightarrow{\bullet}x = \neg\overrightarrow{\circ}x$; $\overleftarrow{\bullet}x = \sim \neg(x \leftarrow x)$; $\overleftarrow{\circ}x = \neg\overleftarrow{\bullet}x$; $\circ x = \overrightarrow{\circ}x \wedge \overleftarrow{\circ}$; $\bullet x = \overrightarrow{\bullet}x \vee \overleftarrow{\bullet}$. В результате получаем операторы, отвечающие следующим таблицам:

	$\overrightarrow{\circ}x$
0	3
1	3
2	0
3	3

	$\overrightarrow{\bullet}x$
0	0
1	0
2	3
3	0

	$\overleftarrow{\circ}x$
0	3
1	0
2	3
3	3

	$\overrightarrow{\bullet}x$
0	0
1	3
2	0
3	0

	$\circ x$
0	3
1	0
2	0
3	3

	$\bullet x$
0	0
1	3
2	3
3	0

Теперь покажем, что и $\leftarrow$, и $\to$ необходимо брать в качестве базовых операций. Для этого допустим, что $x \leftarrow y = f(x, y)$, где $f(x, y)$ некая суперпозиция операций из $\{\wedge, \vee, \to, \neg, \sim\}$. Так как $2 \leftarrow 2 = 0$, f содержит по меньшей мере одно вхождение $\neg$, ведь в противном случаем мы получили бы $f(2, 2) = 2$. Однако $1 \leftarrow 1 = 1$, а это значит, что f не содержит вхождений $\neg$ или $\to$, поскольку $\wedge$, $\vee$, $\sim$ дают 1, если и только если значение всех аргументов 1, но $\neg x \neq 1$ и $x \to y \neq 1$. Аналогично можно показать, что $\to$ нельзя выразить через $\wedge$, $\vee$, $\leftarrow$, $\neg$ и $\sim$.

Матрица, которую мы только что рассмотрели, содержит в качестве подматриц $LFI2$ и ее параполный дуал $LFI2^*$:

- $LFI2 = \langle \{0, 2, 3\}, \wedge, \vee, \to, \leftarrow, \neg, \sim, \{2, 3\} \rangle$;
- $LFI2^* = \langle \{0, 1, 3\}, \wedge, \vee, \to, \leftarrow, \neg, \sim, \{3\} \rangle$.

Мы можем скомбинировать рассмотренные выше матрицы P^3 и I^3 (см. стр. 42) сходным образом. Достаточно заменить таблицу для $\sim$ на следующую:

	$\sim x$
0	3
1	0
2	3
3	0

Как отмечают Карпенко и Томова [24, §2.6.2], в литературе описаны и матрицы с операциями, полученными аналогичным образом из пар P^1, I^1 [31], [36] и P^2, I^2 [33], [25]. Однако ясно, что четерехзначная паранормальная матрица, являющаяся функциональным расширением классической, может и не содержать собственных подматриц. Возьмем уже рассмотренную выше матрицу $M = \langle\{0,1,2,3\},\wedge,\vee,$ $\rightarrow$, $\leftarrow,\neg,\sim,\{2,3\}\rangle$ и заменим таблицу для отрицания:

	$\neg x$
0	3
1	2
2	1
3	0

В заключение раздела рассмотрим еще один подход к построению паранепротиворечивых матриц. Логики из $8Kb$ содержат стандартное отрицание, но при их построении это не является целью. Вместо этого добавляется два оператора к матрице позитивного фрагмента классической логики. Если же мы откажемся от оператора $\circ$, и выберем в качестве нестандартного отрицания инволюцию, то получим новый интересный класс матриц.

Наверное, наиболее известным его представителем будет матрица $PCont$[4]. В матрице $PCont = \langle\{0,1,2\},\wedge,\vee,\rightarrow,\sim,\{1,2\}\rangle$ связки определяются следующими таблицами:

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$\rightarrow$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	1	2
2	0	1	2

	$\sim x$
0	2
1	1
2	0

[4] Я использую обозначение Л.И. Розоноэра [39], [40], [41], но матрицы с такими операциями многократно появлялись независимо друг от друга (см. обзор [23, §3.5.2]). В современной англоязычной литературе распространенным также является обозначение Pac [9, Ex. 17], [2], введенное А. Авроном [3].

Импликация, конъюнкция и дизъюнкция отвечают условию стандартности. Однако все операции этой матрицы сохраняют значение 1, поэтому в ней не выразим оператор $\circ$. По этой же причине не выразимы также ни стандартное отрицание, ни модальные операторы.

Можно определить целый класс матриц, подобных $PCont$. В качестве отрицания всегда будет выступать инволюция, а прочие базовые операции должны, во-первых, сохранять значение 1, и, во-вторых, отвечать условиям стандартности.

Помимо $PCont$, представителем этого класса оказывается матрица логики Халковской–Зайца [20]. Он интересен тем, что в исходной формулировке ни одна из базовых операций не является стандартной. Это показывает, что рассматриваемый нами класс может включать в себя логики, которые изначально строились на принципиально иных основаниях. Операции в матрице $Z = \langle\{0, 1, 2\}, \wedge, \vee, \sim, \{1, 2\}\rangle$ отвечают следующим таблицам:

$\wedge$	0	1	2
0	0	1	0
1	1	1	1
2	0	1	2

$\vee$	0	1	2
0	0	0	2
1	0	1	2
2	2	2	2

	$\sim x$
0	2
1	1
2	0

Как можно увидеть, конъюнкция и дизъюнкция будут стандартными только при $D = \{2\}$. Тем не менее, в Z можно определить и связки, которые будут стандартными при $D = \{1, 2\}$: $x \wedge^* y = \sim (\sim x \vee \sim y)$; $x \vee^* y = \sim (\sim x \wedge \sim y)$; $x \to y = (\sim x \vee y) \vee \sim (\sim x \vee \sim y)$. В результате, получаем следующие таблицы:

$\wedge^*$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

$\vee^*$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	1
2	2	1	2

$\to$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	1	2
2	0	2	2

Последний пример перекликается с четырехзначными матрицами, которые мы рассматривали в начале статьи (см. стр. 31), а также матрицами логик Клини и Приста. Эти примеры показывают, что матрица с одним и тем же классом операций может задавать разные логики в зависимости от выбора выделенных значений. Это открывает еще одну возможность применения классических матриц для построения неклассических логик. Дело в том, что определение стандартности включает в себя указание на класс выделенных значений. А это значит, что матрица, в которой все операции стандартны относительно некоторого D совершенно не обязательно задает классическую логику при некотором другом D'. Так мы подошли ко второму способу построения многозначных логик на основе матриц классической логики — модификации класса выделенных значений многозначной матрицы классической логики при сохранении неизменным ее класса операций. Это станет первой темой, которая будет рассмотрена в Части II данного исследования.

Продолжение следует...

Список литературы

[1] *Бочвар Д.А.* Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления // Математический сборник. 1938. Т. 4. № 2. С. 287–308.

[2] *Карпенко А.С.* Неклассические логики versus классической // Логико-философские штудии. 2005. № 3. С. 48–73.

[3] *Карпенко А.С.* Развитие многозначной логики. М.: ЛКИ, 2010. 448 с.

[4] *Карпенко А.С., Томова Н.Е.* Трехзначная логика Бочвара и литеральные паралогики. М.: ИФ РАН, 2016. 110 с.

[5] *Попов В.М.* Об одной трехзначной параполной логике // Логические исследования. 2002. № 9. С. 175–178.

[6] *Попов В.М.* Об одной четырехзначной паранормальной логике // Логика и В.Е.К. К 90-летию со дня рождения профессора Войшвилло Евгения Казимировича. / Под ред. В.И. Маркина. М.: Современные тетради, 2003. С. 192–195.

[7] *Томова Н.Е.* Естественные трехзначные логики: функциональные свойства и отношения. М.: ИФ РАН, 2012. 89 с.

[8] *Финн В.К.* О предполноте класса функций, соответствующего трехзначной логике Я. Лукасевича // Научно-техническая информация. Сер. 2. Вып. 10. М., 1969. С. 35–38.

[9] *Шестаков В.И.* О взаимоотношении некоторых трехзначных логических исчислений // Успехи математических наук. 1964. Т. 19. Вып. 2(116). С. 177—181.

[10] *Яблонский С.В.* Функциональные построения в k-значной логике // Труды математического института им. В.А. Стеклова. Т. 51. М., 1958. С. 5—142.

[11] *Anshakov O., Rychkov S.* On Finite-Valued Propositional Logical Calculi // Notre-Dame Journal of Formal Logic. 1995. Vol. 36. No. 4. P. 606–629.

[12] *Arieli O.*, *Avron A.*, *Zamansky A.* Maximally Paraconsistent Three-Valued Logics // Proceedings of the Twelfth International Conference on the Principles of Knowledge Representation and Reasoning. 2010. P. 310–318.

[13] *Avron A*. Natural 3-Valued Logics — Characterization and Proof Theory // The Journal of Symbolic Logic. Vol. 56. No. 1. 1991. P. 276–294.

[14] *Bergman C., Juedes D., Slutzki G.* Computational Complexity of Term-Equivalence // International Journal of Algebra and Computation. 1999. Vol. 9. No. 1. P. 113–128.

[15] *Brunner A.B., Carnielli W.A.*. Anti-Intuitionism and Paraconsistency // Journal of Applied Logic. 2005. Vol. 3. No. 1. P. 161–184.

[16] *Carnielli W.A., Marcos J.* A Taxonomy of C-systems. 2001. URL: http://arxiv.org/abs/math/0108036 (дата обращения —21.06.2016).

[17] *Carnielli W., Coniglio M.E., Marcos, J.* Logics of Formal Inconsistency // Handbook of Philosophical Logic. Vol. 14. Springer Netherlands, 2007. P. 1–93.

[18] *Carnielli W., Marcos J., de Amo S.* Formal Inconsistency and Evolutionary Databases // Logic and Logical Philosophy. 2004. Vol. 8. P. 115–52.

[19] *Cobreros P.* Vagueness: Subvaluationism // Philosophy Compass. 2013. Vol. 8. No. 5. P. 472–485.

[20] *D'Ottaviano I.M.L.* The Completeness and Compactness of a Three-Valued First-Order Logic // Revista Colombiana de Matematicas. 1985. Vol. 19. P. 77–94.

[21] *D'Ottaviano I.M.L., da Costa N.C.A.* Sur un problème de Jaśkowski // Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris. Ser. A. 1970. Vol. 270. P. 1349–1353.

[22] *D'Ottaviano I.M.L., de Araujo Feitosa H.* Paraconsistent Logics and Translations // Synthese. 2000. Vol. 125. No. 1–2. P. 77–95.

[23] *Ebbinghaus H.D.* Über eine Prädikatenlogik mit partiell definierten Prädikaten und Funktionen // Archive for Mathematical Logic. 1969. Vol. 12. No. 1. P. 39–53.

[24] *Epstein R.L.* The Semantic Foundations of Logic. Vol. 1: Propositional logic. Dordrecht: Kluwer, 1990. 388 p.

[25] *Feitosa H.A., D'Ottaviano I.M.L.* Conservative Translations // Annals of Pure and Applied Logic. 2001. Vol. 108. No. 1. P. 205–227.

[26] *Finn V.K., Grigolia R.* Nonsense Logics and their Algebraic Properties // Theoria. 1993. Vol. 59. No. 1–3. P. 207–273.

[27] *Gottwald S.* A Treatise on Many-Valued Logics. Baldock: Research Studies Press, 2001. 600 p.

[28] *Hałkowska K.* A Note on Matrices for Systems of Nonsense-Logics // Studia Logica. 1989. Vol. 48. No. 4. P. 461–464.

[29] *Hyde D.* From Heaps and Gaps to Heaps of Gluts // Mind. 1997. Vol. 106. No. 424. P. 641–660.

[30] *Lewin R.A., Mikenberg I.F.* Literal-Paraconsistent and Literal-Paracomplete Matrices // Mathematical Logic Quarterly. 2006. Vol. 52. No. 5. P. 478–493.

[31] *Łukasiewicz J.* On Three-Valued Logic // Jan Łukasiewicz. Selected Works / Ed. by L. Borkowski. Amsterdam: North-Holland, 1970. P. 87–88.

[32] *Malinowski G.* Towards the Concept of Logical Many-Valuedness // Acta Universitatis Lodziensis. Folia Philosophica. 1990. Vol. 7. P. 97–103.

[33] *Malinowski G.* Many-Valued Logics. Oxford University Press. 1993. 144 p.

[34] *Marcos J.* Nearly Every Normal Modal Logic is Paranormal // Logique et Analyse. 2005. Vol. 48. No. 189–192. P. 279–300.

[35] *Marcos J.* On a Problem of da Costa // Essays on the Foundations of Mathematics and Logic 2 / Ed. by G. Sica. Polimetrica, 2005. P. 53–69.

[36] *Popov V.M.* On the Logics Pelated to A. Arruda's System V1 // Logic and Logical Philosophy. 1999. Vol. 7. P. 87–90.

[37] *Post E.L.* Introduction to a General Theory of Elementary Propositions // American Journal of Mathematics. 1921. Vol. 43. No. 3. P. 163–185.

[38] *Priest G.* Logic of Paradox // Journal of Philosophical Logic. 1979. Vol. 8. P. 219–241.

[39] *Puga L.Z., da Costa N.C.A.* On the Imaginary Logic of N.A. Vasiliev // Mathematical Logic Quarterly. 1988. Vol. 34. P. 205–211.

[40] *Rescher N.* Many-Valued Logic. New York: McGraw-Hill, 1969. Reprinted: Aldershot: Gregg Revivals, 1993. 349 p.

[41] *Rosser J.B., Turquette A.R.* Many-Valued Logics. Amsterdam: North-Holland. 1952. 124 p.

[42] *Rozonoer L.I.* Proving Contradictions in Formal Theories. I // Automation and Remote Control. 1983. Vol. 44. No. 6. P. 781–790.

[43] *Rozonoer L.I.* Proving Contradictions in Formal Theories. II // Automation and Remote Control. 1983. Vol. 44. No. 7. P. 908–914.

[44] *Rozonoer L.I.* On Interpretation of Inconsistent Theories // Information Sciences. 1989. Vol. 47. No. 3. P. 243–266.

[45] *Segerberg K.* A Contribution to Nonsense-Logic // Theoria. 1965. Vol. 31. P. 199–217.

[46] *Sette A.M., Carnielli W.A.* Maximal Weakly-Intuitionistic Logics // Studia Logica. 1995. Vol. 55. P. 181–203.

[47] *Shoesmith D.J., Smiley T.J.* Multiple-Conclusion Logic. Cambrige University Press, 1978. 409 p.

[48] *Steinberger F.* Why Conclusions Should Remain Single // Journal of Philosophical Logic. 2011. Vol. 40. No. 3. P. 333–355.

[49] *Tomova N.E.* A Lattice of Implicative Extensions of Regular Kleene's Logics // Reports on Mathematical Logic. 2012. No. 47. P. 173–182.

[50] *Wójcicki R.* Lectures on Propositional Calculi. Wroclaw: Ossolineum, 1984. 292 p.

[51] *Wójcicki R.* Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations. Dordrecht: Kluwer, 1988. 474 p.

L.Yu. Devyatkin

Non-classical Modifications of Many-valued Matrices of the Classical Propositional Logic. Part I

Devyatkin Leonid Yuryevich
Institute of Philosophy of Russian Academy of Sciences
12/1 Goncharnaya Str., Moscow, 109240, Russian Federation
e-mail: `leoniddevyatkin@gmail.com`

This paper constitutes the first part of the duology dedicated to many-valued matrices of the classical propositional logic regarded as a tool of construction and analysis of non-classical logics, and it is for the most part of the survey nature. First, I analyze the three approaches to the question when a many-valued matrix defines the classical propositional logic, which are based on the notions of theory, logical consequence relation with single conclusions and multiple-conclusion consequence relation. Then I deal with the matrices of non-classical logics which are functional extensions of classical matrices. The examples of individual matrices of this kind, as well as some classes of them, are considered, some of them known in the literature, and some completely new. Their functional properties are investigated. Among the examples considered are the matrices of three-valued logics of Post, Łukasiewicz, Bochvar and others. Moreover, I explore a class of matrices which define logics of formal inconsistency (LFI). On the basis of duality between paraconsistent and paracomplete logics, a class of matrices which define logics of formal uncertainty is constructed. Furthermore, I develop a class of four-valued matrices which combine formal inconsistency and formal uncertainty. In the concluding part of the paper I investigate another class of matrices, defining paraconsistent logics which are not logics of formal inconsistency.

Keywords: many-valued logics, logical matrices, paraconsistency, paracompleteness, closed classes of functions

References

[1] Anshakov, O., Rychkov, S. "On Finite-Valued Propositional Logical Calculi", *Notre-Dame Journal of Formal Logic*, 1995, Vol. 36, No. 4, pp. 606–629.

[2] Arieli, O., Avron, A., Zamansky, A. "Maximally Paraconsistent Three-Valued Logics", *Proceedings of the Twelfth International Conference on the Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, 2010, pp. 310–318.

[3] Avron, A. "Natural 3-Valued Logics — Characterization and Proof Theory", *The Journal of Symbolic Logic*, 1991, Vol. 56, No. 1, pp. 276–294.

[4] Bergman, C., Juedes, D., Slutzki, G. "Computational Complexity of Term-Equivalence", *International Journal of Algebra and Computation*, 1999, Vol. 9, No. 1, pp. 113–128.

[5] Bochvar, D.A. "Ob odnom trekhznachnom ischislenii i ego primenenii k analizu paradoksov klassicheskogo rasshirennogo funktsional'nogo ischisleniya" [On a Three-Valued Logical Calculus and its Application to the Analysis of Contradictions], *Matematicheskii sbornik*, 1938, Vol. 4, No. 2, pp. 287–308. (In Russian)

[6] Brunner, A.B., Carnielli, W.A. "Anti-Intuitionism and Paraconsistency", *Journal of Applied Logic*, 2005, Vol. 3, No. 1, pp. 161–184.

[7] Carnielli, W.A., Marcos, J. *A Taxonomy of C-systems*, 2001. [http://arxiv.org/abs/math/0108036, accessed on 21.06.2016]

[8] Carnielli, W., Marcos, J., de Amo, S. "Formal Inconsistency and Evolutionary Databases", *Logic and Logical Philosophy*, 2004, Vol. 8, pp. 115–52.

[9] Carnielli, W., Coniglio, M.E., Marcos, J. "Logics of Formal Inconsistency", *Handbook of Philosophical Logic*. Springer Netherlands, 2007, pp. 1–93.

[10] Cobreros, P. "Vagueness: Subvaluationism", *Philosophy Compass*, 2013, Vol. 8, No. 5, pp. 472–485.

[11] D'Ottaviano, I.M.L. "The Completeness and Compactness of a Three-Valued First-Order Logic", *Revista colombiana de matematicas*, 1985, Vol. 19, pp. 77–94.

[12] D'Ottaviano, I.M.L., da Costa, N.C.A. "Sur un problème de Jaśkowski", *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris. Ser. A*, 1970, Vol. 270, pp. 1349–1353.

[13] D'Ottaviano, I.M.L., de Araujo Feitosa, H. "Paraconsistent Logics and Translations", *Synthese*, 2000, Vol. 125, No. 1–2, pp. 77–95.

[14] Ebbinghaus, H.D. "Über eine Prädikatenlogik mit partiell definierten Prädikaten und Funktionen", *Archive for Mathematical Logic*, 1969, Vol. 12, No. 1, pp. 39–53.

[15] Epstein, R.L. *The Semantic Foundations of Logic. Vol. 1: Propositional logic*. Dordrecht: Kluwer, 1990. 388 pp.

[16] Feitosa, H.A., D'Ottaviano, I.M.L. "Conservative Translations", *Annals of Pure and Applied Logic*, 2001, Vol. 108, No. 1, pp. 205–227.

[17] Finn, V.K. "O predpolnote klassa funktsii, sootvetstvuyushchego trekhznachnoi logike J. Łukasiewicza" [The Precompleteness of a Class of Functions that Correspond to the Three-Valued Logic of J. Łukasiewicz], *Nauchno-tekhnicheskaya informatsiya. Ser. 2*, 1969, Vol. 10, pp. 35–38. (in Russian)

[18] Finn, V.K., Grigolia, R. "Nonsense Logics and Their Algebraic Properties", *Theoria*, 1993, Vol. 59, No. 1–3, pp. 207–273.

[19] Gottwald, S. *A Treatise on Many-Valued Logics*. Baldock: Research Studies Press, 2001. 600 pp.

[20] Hałkowska, K. "A Note on Matrices for Systems of Nonsense-Logics", *Studia Logica*, 1989, Vol. 48, No. 4, pp. 461–464.

[21] Hyde, D. "From Heaps and Gaps to Heaps of Gluts, *Mind*, 1997, Vol. 106, No. 424, pp. 641–660.

[22] Karpenko, A.S. "Neklassicheskie logiki versus klassicheskoi" [Non-Classical Logics Versus Classical], *Logiko-filosofskie shtudii*, 2005, No. 3, pp. 48–73. (In Russian)

[23] Karpenko, A.S. *Razvitie mnogoznachnoi logiki* [The Development of Many-Valued Logic]. M.: LKI, 2010. 448 pp. (In Russian)

[24] Karpenko, A.S., Tomova, N.E. *Trekhznachnaya Logika Bochvara i Literal'nye Paralogiki* [Three-Valued Logic of Bochvar and Literal Paralogics]. M.: IF RAN, 2016. 110 pp. (In Russian)

[25] Lewin, R.A., Mikenberg, I.F. "Literal-Paraconsistent and Literal-Paracomplete Matrices", *Mathematical Logic Quarterly*, 2006, Vol. 52, No. 5, pp. 478–493.

[26] Łukasiewicz, J. "On Three-Valued Logic", in: J. Łukasiewicz, *Selected Works*, ed. by L. Borkowski. Amsterdam: North-Holland, 1970, pp. 87–88.

[27] Malinowski, G. "Towards the Concept of Logical Many-Valuedness", *Acta Universitatis Lodziensis. Folia Philosophica*, 1990, Vol. 7, pp. 97–103.

[28] Malinowski, G. *Many-Valued Logics*. Oxford University Press, 1993. 144 pp.

[29] Marcos, J. "Nearly Every Normal Modal Logic is Paranormal", *Logique et Analyse*, 2005, Vol. 48, No. 189–192, pp. 279–300.

[30] Marcos, J. "On a Problem of da Costa", *Essays on the Foundations of Mathematics and Logic 2*, ed. by G. Sica. Polimetrica, 2005, pp. 53–69.

[31] Popov, V.M. "On the Logics Related to A. Arruda's System V1", *Logic and Logical Philosophy*, 1999, Vol. 7, pp. 87–90.

[32] Popov, V.M. "Ob odnoi trekhznachnoi parapolnoi logike" [On One Three-Valued Paracomplete Logic] // *Logicheskie issledovaniya*, 2002, Vol. 9, pp. 175–178. (In Russian)

[33] Popov, V.M. "Ob odnoi chetyrekhznachnoi paranormal'noi logike" [On One Four-Valued Paranormal Logic], *Logika i V.E.K. K 90-letiyu so dnya rozhdeniya professora Voishvillo Evgeniya Kazimirovicha* [Logic and V.E.K. Essays Dedicated to prof. Evgeniy Kazimirovich Voishvillo on the Occasion of his 90th Birthday], ed. by V.I. Markin. M.: Sovremennye tetradi, 2003, pp. 192–195. (In Russian)

[34] Post, E.L. "Introduction to a General Theory of Elementary Propositions", *American Journal of Mathematics*, 1921, Vol. 43, No. 3, pp. 163–185.

[35] Priest, G. "Logic of Paradox", *Journal of Philosophical Logic*, 1979, Vol. 8. pp. 219–241.

[36] Puga, L.Z., da Costa, N.C.A. "On the Imaginary Logic of N.A. Vasiliev", *Mathematical Logic Quarterly*, 1988, Vol. 34, pp. 205–211.

[37] Rescher, N. *Many-Valued Logic*. New York: McGraw-Hill, 1969. Reprinted: Aldershot: Gregg Revivals, 1993. 349 pp.

[38] Rosser, J.B., Turquette, A.R. *Many-Valued Logics*. Amsterdam: North-Holland, 1952. 124 pp.

[39] Rozonoer, L.I. "Proving Contradictions in Formal Theories. I", *Automation and Remote Control*, 1983, Vol. 44, No. 6, pp. 781–790.

[40] Rozonoer, L.I. "Proving Contradictions in Formal Theories. II", *Automation and Remote Control*, 1983, Vol. 44, No. 7, pp. 908–914.

[41] Rozonoer, L.I. "On Interpretation of Inconsistent Theories", *Information Sciences*, 1989, Vol. 47, No. 3, pp. 243–266.

[42] Segerberg K. "A Contribution to Nonsense-Logic", *Theoria*, 1965, Vol. 31, pp. 199–217.

[43] Sette, A.M., Carnielli, W.A. "Maximal Weakly-Intuitionistic Logics", *Studia Logica*, Vol. 55, 1995, pp. 181–203.

[44] Shestakov, V.I. "O vzaimootnoshenii nekotorykh trekhznachnykh logicheskikh ischislenii" [On Interrelations Between Some Three-Valued

Logical Calculi], *Uspekhi matematicheskikh nauk*, 1964, Vol. 19, No. 2(116), pp. 177—181. (in Russian)

[45] Shoesmith, D.J., Smiley, T.J. *Multiple-Conclusion Logic.* Cambrige University Press, 1978. 409 pp.

[46] Steinberger F. "Why Conclusions Should Remain Single", *Journal of Philosophical Logic*, 2011, Vol. 40, No. 3, pp. 333–355.

[47] Tomova, N.E. "A Lattice of Implicative Extensions of Regular Kleene's Logics", *Reports on Mathematical Logic*, 2012, No. 47, pp. 173–182.

[48] Tomova, N.E. *Estestvennye trekhznachnye logiki: funktsional'nye svoistva i otnosheniya* [Natural Three-Valued Logics: Functional properties and Relations]. M.: IFRAN, 2012. 89 pp. (In Russian)

[49] Wójcicki, R. *Lectures on Propositional Calculi.* Wroclaw: Ossolineum, 1984. 292 pp.

[50] Wójcicki, R. *Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations.* Dordrecht: Kluwer, 1988. 474 pp.

[51] Yablonskii, S.V. "Funktsional'nye postroeniya v k-znachnoi logike" [Functional Constructions in k-Valued Logic], *Trudy matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova*, 1958, Vol. 51, pp. 5–142. (in Russian)