Логические исследования
2015. Т. 21. № 2. С. 70–77
УДК 510.649

Logical Investigations
2015, vol. 21, no 2, pp. 70–77

А.А. Солощенков

Аналитико-табличное представление логик, включающих логику Par[1]

Солощенков Артем Андреевич
Кафедра логики, философский факультет, МГУ им. М.В. Ломоносова.
119991, Российская Федерация, Москва, ГСП-1,
Ломоносовский проспект, д. 27, корп. 4.
E-mail: artemiis@mail.ru

В этой работе мы предлагаем аналитико-табличные аксиоматизации ряда логик. Этими логиками являются такие расширения известной паранепротиворечивой и параполной логики Par из [1], которые сами являются паралогиками, то есть паранепротиворечивыми или/и параполными логиками. Согласно [2] существуют всего четыре паралогики, включающие логику Par. Для каждой из этих паралогик мы описываем просто устроенную аналитико-табличную аксиоматизацию, удобную для организации поиска доказательства. Правила редукции во всех этих аксиоматизациях одни и те же, как и принципы построения аналитических таблиц. Исчисления отличаются друг от друга только определением замкнутого множества маркированных формул. Аналитико-табличные построения проводятся в стиле Фиттинга (см. [4]). Следуя [4], мы рассматриваем два маркера для формул. Эти маркеры — T и F. Главное отличие набора предлагаемых здесь правил редукции от набора правил редукции, используемых в [4], состоит в том, что мы используем наряду с обычными правилами редукции, которые удаляют отдельные логические связки, правила редукции, удаляющие целые комплексы логических связок. Итак, здесь исследуются все логики, язык каждой из которых есть определяемый ниже пропозициональный язык L, каждая из которых включает известную паранормальную логику Par и является паранепротиворечивой или/и параполной логикой. Цель работы — для всякой такой логики описать адекватное ей и удобное для поиска вывода аналитико-табличное исчисление.

Ключевые слова: паралогика, паранормальная логика, паранепротиворечивая логика, параполная логика, аналитическая таблица, маркированная формула, замкнутое множество, аналитико-табличная аксиоматизация

Язык L всех интересующих нас логик есть стандартный пропозициональный язык, алфавиту которого принадлежат все следующие символы и только они: $\&, \vee, \supset$ (бинарные логические связки языка L), $\neg$ (унарная логическая связка языка L) и технические символы языка L, $p_1, p_2, p_3, \ldots$ (пропозициональные переменные языка L). Мы допускаем применение обычных соглашений об опускании скобок в формулах

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ № 13-06-00147а.

языка L и используем «формула» вместо «формула языка L». Опишем, следуя [2], исчисления $HPar$, $HPContPComp$, $HPCont$ и $HPComp$ гильбертовского типа, аксиоматизирующие интересующие нас логики. Множество всех аксиом исчисления $HPar$ есть множество всех тех и только тех формул, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих восемнадцати видов (здесь и далее A, B и C есть формулы):

(I) $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$, (II) $A \supset (A \vee B)$, (III) $A \supset (B \vee A)$, (IV) $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$, (V) $(A \& B) \supset A$, (VI) $(A \& B) \supset B$, (VII) $(C \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset (A \& B)))$, (VIII) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \& B) \supset C)$, (IX) $((A \& B) \supset C) \supset (A \supset (B \supset C))$, (X) $((A \supset B) \supset A) \supset A$, (XI) $\neg(A \vee B) \supset (\neg A \& \neg B)$, (XII) $(\neg A \& \neg B) \supset \neg(A \vee B)$, (XIII) $\neg(A \& B) \supset (\neg A \vee \neg B)$, (XIV) $(\neg A \vee \neg B) \supset \neg(A \& B)$, (XV) $\neg(A \supset B) \supset (\neg A \& B)$, (XVI) $(\neg A \& B) \supset \neg(A \supset B)$, (XVII) $\neg\neg A \supset A$, (XVIII) $A \supset \neg\neg A$.

Множество всех аксиом исчисления $HPContPComp$ есть множество всех тех и только тех формул, каждая из которых имеет хотя бы один из видов (I)–(XVIII) или имеет вид $(A \& \neg A) \supset (B \vee \neg B)$. Множество всех аксиом исчисления $HPCont$ есть множество всех тех и только тех формул, каждая из которых имеет хотя бы один из видов (I)–(XVIII) или имеет вид $(\mathrm{A} \vee \neg \mathrm{A})$. Множество всех аксиом исчисления $HPComp$ есть множество всех тех и только тех формул, каждая из которых имеет хотя бы один из видов (I)–(XVIII) или имеет вид $(A \& \neg A) \supset B$. Каждое из исчислений $HPar$, $HPContPComp$, $HPCont$, $HPComp$ имеет единственное правило вывода — правило modus ponens в L. Во всяком из этих исчислений выводы (в частности, доказательства) строятся обычным для исчислений гильбертовского типа образом. Для всякого из этих исчислений стандартно определяется доказуемая в нем формула. Следуя [2], определяем Par как множество всех формул, доказуемых в $HPar$. Аналогично определяем *PContPComp*, *PCont* и *PComp*. Термины «логика», «классическая логика в L», «паранепротиворечивая логика», «параполная логика», «паранормальная логика» и «паралогика» используем в смысле, который придается этим терминам в работе [2]. Согласно [2] логика определяется как непустое множество формул, замкнутое относительно правила подстановки в L и правила modus ponens в L. Известно, что множество всех классических тавтологий в языке L есть логика. Эту логику, следуя [2], называем классической логикой в L и обозначаем через ClP. Теорией логики L называется (см. [2]) множество формул, включающее логику L и замкнутое относительно правила modus ponens в L. Понятно, что множество всех формул является логикой и теорией любой логики. Вслед за [2] обозначаем это множество через $Form$ и называем тривиальной теорией. В [2] противоречивой теорией логики L называется такая теория T логики L, что для некоторой формулы A верно следующее: $A \in T$ и $\neg A \in T$, а паранепротиворечивой теорией логики L называется противоречивая теория T логики L, не являющаяся тривиальной теорией. Паранепротиворечивой логикой называется (см. [2]) такая логика L, что существует паранепротиворечивая теория логики L. Полной теорией логики L называется ([2]) такая теория T логики L, что для всякой формулы A верно: $A \in T$ или $\neg A \in T$, а параполной теорией логики L называется (см. [2]) такая теория T логики L, что T не является полной теорией логики L и всякая полная теория логики L, включающая T, есть тривиальная теория. Параполной логикой называется (см. [2]) такая логика L, что существует параполная теория логики L. Паранормальной логикой называется (см. [2]) логика, которая является паранепротиворечивой и параполной логикой. Паралогикой называется (см.[2]) логика, которая является паранепротиворечивой или параполной логикой.

Верны (см. [2]) следующие утверждения: (а) Par и $PContPComp$ — различные логики, каждая из которых паранормальна, (б) $PCont$ есть паранепротиворечивая, но не параполная логика, (в) $PComp$ есть параполная, но не паранепротиворечивая логика. В свете утверждений (а), (б) и (в) ясно, что Par, $PContPComp$, $PCont$ и $PComp$ являются паралогиками. Легко проверить, что все эти паралогики включают Par. Но тогда, учитывая, что множество всех логик, лежащих между Par и множеством всех формул, равно (см. [2]) множеству $\{PContPComp, PCont, PComp, ClP\}$ и ClP не является паралогикой, получаем, что $Par, PContPComp, PCont$ и $PComp$ — это все паралогики, язык каждой из которых есть L и каждая из которых включает логику Par.

Построим в стиле работы [4] аналитико-табличные исчисления $ATPar, ATPContPComp, ATPCont, ATPComp$, аксиоматизирующие соответствующие паралогики.

Называем маркер-формулой выражение вида QA, где Q есть символ T или символ F, а A есть формула. Условимся использовать букву M для обозначения конечных множеств маркер-формул. Правила редукции любого исчисления из $\{ATPar$, $ATPContPComp$, $ATPCont$, $ATPComp\}$, это в точности следующие четырнадцать правил:

правило $[T\&]$, являющееся множеством всех упорядоченных пар вида $< M, M \cup \{TA, TB\} >$, где $TA\&B \in M$;

правило $[T\neg\&]$, являющееся множеством всех упорядоченных троек вида $< M, M \cup \{T\neg A\}, M \cup \{T\neg B\} >$, где $T\neg(A\&B) \in M$;

правило $[F\&]$, являющееся множеством всех упорядоченных троек вида $< M, M \cup \{FA\}, M \cup \{FB\} >$, где $FA\&B \in M$;

правило $[F\neg\&]$, являющееся множеством всех упорядоченных пар вида $< M, M \cup \{F\neg A, F\neg B\} >$, где $F\neg(A\&B) \in M$;

правило $[T\vee]$, являющееся множеством всех упорядоченных троек вида $< M, M \cup \{TA\}, M \cup \{TB\} >$, где $TA \vee B \in M$;

правило $[T\neg\vee]$, являющееся множеством всех упорядоченных пар вида $< M, M \cup \{T\neg A, T\neg B\} >$, где $T\neg(A \vee B) \in M$;

правило $[F\vee]$, являющееся множеством всех упорядоченных пар вида $< M, M \cup \{FA, FB\} >$, где $FA \vee B \in M$;

правило $[F\neg\vee]$, являющееся множеством всех упорядоченных троек вида $< M, M \cup \{F\neg A\}, M \cup \{F\neg B\} >$, где $F\neg(A \vee B) \in M$;

правило $[T \supset]$, являющееся множеством всех упорядоченных троек вида $< M, M \cup \{FA\}, M \cup \{TB\} >$, где $TA \supset B \in M$;

правило $[T\neg \supset]$, являющееся множеством всех упорядоченных пар вида $< M, M \cup \{TA, T\neg B\} >$, где $T\neg(A \supset B) \in M$;

правило $[F \supset]$, являющееся множеством всех упорядоченных пар вида $< M, M \cup \{TA, FB\} >$, где $TA \supset B \in M$;

правило $[F\neg \supset]$, являющееся множеством всех упорядоченных троек вида $< M, M \cup \{FA\}, M \cup \{F\neg B\} >$, где $F\neg(A \supset B) \in M$;

правило $[T\neg\neg]$, являющееся множеством всех упорядоченных пар вида $< M, M \cup \{TA\} >$, где $T\neg\neg A \in M$;

правило $[F\neg\neg]$, являющееся множеством всех упорядоченных пар вида $< M, M \cup \{FA\} >$, где $F\neg\neg A \in M$.

Множество всех этих правил редукции обозначаем через Rd. Элементы множества Rd называем Rd-правилами.

Определения (а) результата применения Rd-правила к множеству маркер-формул, (б) конфигурации, (в) результата применения Rd-правила к конфигурации, (г) аналитической таблицы, (д) начальной конфигурации аналитической таблицы, (e) последней конфигурации аналитической таблицы аналогичны соответствующим определениям из работы [4].

$ATPar$-замкнутым множеством называем такое множество S маркер-формул, что TA и FA принадлежат множеству S для некоторой формулы A.

$ATPContPComp$-замкнутым множеством называем такое множество S маркер-формул, что S есть $ATPar$-замкнутое множество или TA, $T\neg A$, FB и $F\neg B$ принадлежат множеству S для некоторых формул A и B.

$ATPCont$-замкнутым множеством называем такое множество S маркер-формул, что S есть $ATPar$-замкнутое множество или FA и $F\neg A$ принадлежат множеству S для некоторой формулы A.

$ATPComp$-замкнутым множеством называем такое множество S маркер-формул, что S есть $ATPar$-замкнутое множество или TA и $T\neg A$ принадлежат множеству S для некоторой формулы A.

$ATPar$-замкнутой конфигурацией называем такую конфигурацию, каждый элемент которой есть $ATPar$-замкнутое множество.

Аналогично определяем $ATPContPComp$-замкнутую конфигурацию, $ATPCont$-замкнутую конфигурацию и $ATPComp$-замкнутую конфигурации.

$ATPar$-замкнутой аналитической таблицей называем такую аналитическую таблицу, последняя конфигурация которой есть $ATPar$-замкнутая конфигурация.

Аналогично определяем $ATPContPComp$-замкнутую аналитическую таблицу, $ATPCont$-замкнутую аналитическую таблицу и $ATPComp$-замкнутую аналитическую таблицу.

Для завершения определения исчислений $ATPar$, $ATPContPComp$, $ATPCont$ и $ATPComp$ остается для каждого из этих исчислений определить доказуемую в нем формулу.

Формулой, доказуемой в исчислении $ATPar$, называем такую формулу A, что существует $ATPar$-замкнутая таблица, начальная конфигурация которой есть $\{\{FA\}\}$.

Аналогично определяем формулу, доказуемую в исчислении $ATPContPComp$, формулу, доказуемую в исчислении $ATPCont$, и формулу, доказуемую в исчислении $ATPComp$.

Опираясь на результаты работы [3], удалось доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА. *Для всякой формулы A верно:*

(i) *$A \in Par$ тогда и только тогда, когда A доказуема в $ATPar$,*

(ii) *$A \in PContPComp$ тогда и только тогда, когда A доказуема в $ATPContPComp$,*

(iii) *$A \in PCont$ тогда и только тогда, когда A доказуема в $ATPCont$,*

(iv) *$A \in PComp$ тогда и только тогда, когда A доказуема в $ATPComp$.*

Для каждого построенного здесь аналитико-табличного исчисления можно организовать достаточно простую в применении синтаксическую разрешающую процедуру.

Автор выражает благодарность В.М. Попову за постановку проблемы и помощь в работе.

Литература

[1] *Попов В.М.* Секвенциальные формулировки паранепротиворечивых логических систем // Синтаксические и семантические исследования неэкстенсиональных логик. М.: Наука, 1989. С. 285–289.

[2] *Попов В.М.* Между Par и множеством всех формул // 6-е Смирновские чтения по логике: Материалы междунар. научн. конф. (17–19 июня 2009 г.). М.: Соврем. тетради, 2009. С. 93–95.

[3] *Попов В.М.* Секвенциальные аксиоматизации паралогик, включающих логику Par // Объединен. научн. журн. 2013. № 7–10 (278–281). С. 5–11.

[4] *Fitting M.C.* Intuitionistic logic model theory and forcing. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1969. 191 pp.

A.A. Solotschenkov

Table-analytical Axiomatizations of Expansions of Logic Par

Artem Andreevich Solotchenkov
Department of Logic, Faculty of Philosophy, Lomonosov Moscow State University.
27-4 Lomonosovsky prospekt, GSP-1, Moscow, 119991, Russian Federation.
E-mail: `artemiis@mail.ru`

In this work we offer table-analytical axiomatizations of a row of logics. These logics are such expansions of known paraconsistent and paracomplete logic *Par* from [1] which are paralogics, that is paraconsistent or/and paracomplete logics. According to [2] there are only four paralogics including logic *Par*. For each of these the paralogic we describe simply arranged table-analytical axiomatization convenient for the organization of search of the proof. Rules of a reduction in all these axiomatizations same, as well as the principles of creation of analytical tables. Calculations differ from each other only in definition of the closed set of the marked formulas. Table-analytical constructions are carried out in style of Fitting (see [4]). Following [4], we consider two markers for formulas. These markers — T and F. The main difference of a set of the rules of a reduction offered here from a set of the rules of a reduction used in [4] consists that we use along with usual rules of a reduction which delete separate logical connectives, rules of a reduction deleting the whole complexes of logical connectives. So, all logics are investigated here, language of each of which is the propositional language L defined below, and each of which includes known paranormal logic of Par and is paraconsistent or/and paracomplete logic. Our aim — for any such logic to describe an adequate table-analytical calculation convenient for search of a proof.

Keywords: paralogics, paranormal logic, paraconsistent logic, paracomplete logic, analytical table, marked formula, closed set, table-analytical axiomatization

References

[1] *Popov, V.M.* “Sekvencial’nye formulirovki paraneprotivorechivyh logicheskih sistem” [Sequential formulation of paraconsistent logical systems], *Sintaksicheskie i semanticheskie issledovanija nejekstensional’nyh logik* [Syntactical and semantical investigations of non-extensional logics]. Moscow: Nauka, 1989, pp. 285–289. (In Russian)

[2] *Popov, V.M.* “Mezhdu *Par* i mnozhestvom vseh formul” [Between *Par* and the set of all formulas], *6-e smirnovskie chtenija po logike* [The 6th Smirnov readings in logic]. Proceedings of international scientific conference (Moscow 17–19 of June 2009). Moscow: Modern notebooks Publ., 2009, pp. 93–95. (In Russian)

[3] *Popov, V.M.* "Sekvencial'nye aksiomatizacii paralogik, vkljuchajushhih logiku *Par*" [Sequential axiomatizations of paralogics including logic *Par*], *Ob'edinennyj nauchnyj zhurnal*, 2013, no 7–10 (278–281), pp. 5–11. (In Russian)

[4] *Fitting, M.C. Intuitionistic logic model theory and forcing.* Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1969. 191 pp.