

---

## К проблеме обоснования аподиктического знания

Е. К. Войшвилло <sup>1</sup>

---

**ABSTRACT.** A discussion presented in this paper concerns the relationship between the rival views on fundamental problem of apodictic knowledge justification. The ideas reviewed here mostly date back to I. Kant and D. Hilbert. The processes of idealization and abstraction are analyzed in order to explain a phenomenon of spreading of the idealized and abstract objects throughout the scientific theories and their role in theories' construction and development.

*Keywords:* apodeictic knowledge, scientific theory, idealization, abstraction, concept

Проблема обоснования аподиктического знания состоит в выяснении его источников и того, что гарантирует его истинность. Этой проблемой, как известно, занимались многие философы. В Новое время — Юм, Лейбниц, Кант.

Из известных решений этой проблемы наибольшее распространение среди философов нашла, очевидно, концепция Канта, относящаяся прежде всего к знанию математическому. Некоторые философы и в настоящее время апеллируют в этом вопросе к Канту. Известно, что многие утверждения Канта отнюдь не отличаются научной ясностью и не являются проверяемыми каким-либо образом. В связи с этим заслуживает особого внимания попытка Е. Д. Смирновой [2] связать основные идеи кантовской гносеологии (и особенно те из них, которые относятся к обоснованию аподиктического знания) с известными идеями

---

<sup>1</sup>Помощь автору в работе над статьей оказывал А.А. Ильин, которым осуществлена ее подготовка к публикации.

Гильберта по обоснованию математического знания. По мнению Е. Д. Смирновой суть гильбертовской концепции состоит в особом методе познания, который он называет методом идеальных элементов. Е. Д. Смирнова считает, что сам этот метод является реализацией определенных идей Канта, а именно идей существования особых схем познания — так называемых (по Канту) схем чистого созерцания. Понятно, что задуманное в указанной работе Е. Д. Смирновой соединение философской концепции виднейшего философа, с одной стороны, и выдающегося математика — с другой, может быть весьма плодотворным. Однако, как нам представляется, те задачи, которые, по видимости, решаются, исходя из указанных идей Канта, могут быть решены без привлечения чисто умозрительных философских понятий чистого созерцания и его схем. К тому же возникают некоторые вопросы, связанные с упомянутым методом Гильберта. Ввиду особой важности проблемы обоснования аподиктического знания и особой ее трудности мы считаем полезным проанализировать концепцию, предлагаемую Е. Д. Смирновой, и показать (хотя бы частично), каким образом в самом действительном процессе познания возникает аподиктическое знание.

Обычно при обсуждении проблемы возникновения аподиктического знания вслед за Кантом сосредоточиваются на знании математическом и логическом. Существует даже мнение, что обоснование аподиктического знания в логике и математике равносильно обоснованию такового вообще для любых наук, что нам представляется неправильным, несмотря на то что роль математики в физике постоянно возрастает. Однако математические уравнения, в которых выражаются обычно законы естественных наук, требуют всегда определенной интерпретации и соответствующего научного объяснения. Последнее существенно в самом процессе обоснования аподиктичности законов соответствующей науки. Так, преобразования Лоренца первоначально связывали с физической теорией сжатия или, иначе, эфирного ветра (теория Фитцджеральда–Лоренца). Теперь, как мы знаем, они являются математическим выражением положений специальной теории относительности.

В самой концепции Канта основным является признание существования особых схем конструирования математических понятий и операций с ними – так называемых схем чистого созерцания. Именно в результате применения таких схем, по его мнению, в науке появляются числа, геометрические фигуры, другие математические объекты и понятия о них. При этом не выясняется, что представляют собой и, прежде всего, каким образом возникают эти схемы.

Мы намерены показать, что способ (схемы) образования интересующих нас знаний представляют собой просто известные в современной логике логические приемы познания (которые, само собой разумеется, не были известны во время Канта и потому соответствующие процессы представлялись как именно априорные, рационально необъяснимые схемы интеллектуальной деятельности).

Что касается Гильберта, то нам представляется его философская концепция в науке отнюдь не кантиантской, а скорее той, что обычно называют реалистической. Имеющиеся в тексте работы Гильберта [1] ссылки на Канта относятся к таким утверждениям последнего, которые не связаны с представлением ни о чистом созерцании, ни о его особых схемах, составляющих якобы основу формирования математического знания. Наоборот, Гильберт все время подчеркивает, что в процессе обоснования математического знания, в особенности теории чисел, мы исходим из фактов реального мира. Из того, например, что в мире мы нигде не наблюдаем бесконечно малых или бесконечно больших величин, что указывает на идеальный характер используемых в математике бесконечных множеств, трансфинитных чисел и других.

Прежде чем обратиться к Гильберту, полезно, очевидно, рассмотреть вопрос о том, каким более естественным образом можно объяснить появление в составе математического знания (речь идет прежде всего о теории чисел и геометрии) понятий числа и различных геометрических фигур, и вообще различного рода теоретических объектов не только в математике, но и в других, по крайней мере естественных, науках.

Для этого естественно различить виды теоретических объектов, при этом как раз в зависимости от способа их введения в научные теории<sup>2</sup>.

Теоретические объекты, естественно, противопоставляются объектам наблюдения. Различение тех и других осуществляется в зависимости от того, вводятся ли они в науку непосредственно, на основе показаний наших органов чувств (указывающих на их существование в действительности), или в результате некоторой мыслительной (теоретической) деятельности.

Одна из наиболее существенных задач теории состоит в объяснении сущности тех или иных предметов и явлений (в широком смысле, объектов познания вообще), которые, очевидно, при построении теории должны быть уже налицо.

Едва ли кто-то из ученых и философов, придерживающихся в своих теоретических построениях фактического положения дел как в повседневной жизни, так и в истории познания, станет отрицать, что при построении, например, теории молекулярно-кинетического строения вещества, объясняющей явления теплоты, испарения жидкостей, диффузии, броуновского движения и др., уже предполагается существование этих явлений, а также жидких, твердых, газообразных веществ, к которым они относятся. Таким образом, построение данной теории и, очевидно, любой другой начинается с рассмотрения неких уже данных объектов, то есть с объектов наблюдения.

Однако, стремясь объяснить те или иные явления, раскрыть механизмы тех или иных превращений, ученый предполагает существование некоторых скрытых от органов наших чувств объектов. Так, в упомянутой теории молекулярно-кинетического строения вещества предполагается существование молекул как основных составляющих всех физических тел. При объяснении более сложных, например, химических, а тем более — световых

---

<sup>2</sup>Кстати, сама классификация теоретических объектов и демонстрация их существования наряду с объектами наблюдений будет аргументом против распространенного в современной (постпозитивистской) философии мнения о неправомерности самого деления объектов познания и обозначающих их терминов языка на теоретические термины (и соответственно объекты) и термины (соответственно объекты) наблюдения.

явлений появляются электроны, атомные ядра и их составляющие, энергетические уровни электронов в атомах и т.п. По своему статусу, который придает объектам такого рода наука, — это реально существующие объекты, действительное существование которых, однако, является гипотетическим. Естественно считать их теоретическими, поскольку в науке они появляются как результаты мыслительной деятельности ученого. Конечно, предположение о существовании вводимых таким образом объектов не всегда оправдывается, как это случилось, например, с флогистоном, теплородом, эфиром и некоторыми другими допускаемыми сущностями. В таких случаях объекты, оказавшиеся фиктивными, исключаются из универсума теории.

Вторым видом теоретических объектов являются так называемые идеализированные предметы реальной действительности — абсолютно упругое тело, плоскость, лишенная трения, материальная точка и т.п. Они образуются посредством специальной логической операции — *идеализации*, состоящей в том, что те или иные реальные предметы действительности мысленно лишаются некоторых свойств или наделяются таковыми.

Этот процесс наделения или лишения предметов качествами связан с предельными переходами, например, плоскости могут иметь разные степени трения. Мысленно уменьшая трение, можно перейти к пределу — к понятию плоскости, лишенной всякого трения.

Абсолютно упругие тела возникают как результат наделения некоторых тел (интересующих ученого в том или ином исследовании) способностью полностью восстанавливать свои размеры и форму после снятия деформирующих усилий. Очевидно, что одновременно это означает лишение их способности сохранять деформирующие воздействия.

Абсолютно черное тело — результат лишения всегда присущей всякому телу в той или иной степени способности отражать какие-либо световые лучи (иначе говоря, наделение способностью поглощать все падающие на него лучи)<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup> Не следует путать идеализацию с абстрагированием. Тот и другой приемы приводят к тому, что некоторые конкретные предметы мы превращаем в абстрактные. Рассматривая, например, «человека вообще», мы отвлека-

Третий случай введения объектов в теорию — это применение приема так называемой *изолирующей абстракции*, результатом которого являются абстрактные объекты. Этот прием состоит в том, что некоторая характеристика (свойство, качество) мысленно отделяется от предмета и превращается в самостоятельный объект мысли посредством введения для него некоторого имени<sup>4</sup>. Таковыми являются объем, скорость движения тела, удельный вес, твердость, длина, масса, форма Земли, орбита ее вращения вокруг Солнца и т.п.

Наконец, большую роль в теориях играют идеальные объекты<sup>5</sup>. Идеальные — это такие объекты, которых (и даже каких-либо их прообразов), по нашим представлениям, нет в действительности, но которые изобретаются и вводятся с некоторыми целями инструментального характера. Иначе говоря, они вводятся каждый раз для достижения некоторых определенных связанных с построением теории целей. Для описания наблюдения мы вводим систему координат, координаты точки. Подобное назначение имеют земные и небесные параллели, меридианы, полюса. Для изображения сил и скоростей вводятся векторы. Во многих случаях идеальные объекты нужны в теории для

---

емся от того, является ли он мужчиной или женщиной, от того, какова его национальность, социальное положение, профессия. Но это не значит, что мы лишаем его, хотя бы мысленно, этих и других качеств. Мы оставляем просто открытыми указанные вопросы, то есть вопросы о наличии или отсутствии у него тех или иных качеств, которые в том или ином случае не представляются нам существенными. И утверждая что-то об этих *людях вообще*, то есть мысля их при этом абстрактно, мы утверждаем, что эти утверждения относятся к конкретным людям с реальными их свойствами. При идеализации же мы просто игнорируем какие-то качества и свойства предметов.

<sup>4</sup>Превращение некоторого процесса или явления в самостоятельный объект мысли всегда связано с введением имени для него. Объект — это всегда то, что поименовано. Лишь при наличии имени о нем может что-то утверждаться или отрицаться. Например, выражения «Волга впадает в Каспийское море», «Луна вращается вокруг Земли» описывают ситуации, которые не являются при этом объектами мысли. Но «впадение Волги в Каспийское море» и «вращение Луны вокруг Земли» — становятся таковыми.

<sup>5</sup>Мы не претендуем на то, что перечислили здесь все возможные виды теоретических объектов. Задача состояла в том, чтобы выделить по крайней мере основные из них.

придания ей определенной систематичности, устранения тех или иных исключений в ее формулировках. Так, в проективной геометрии появляются бесконечно удаленные точки и проходящая через них бесконечно удаленная прямая. Благодаря им появляется симметрия между утверждениями о прямых и точках. Для точек верно, что каждые две различные точки имеют общую прямую. Однако две прямые (даже лежащие в одной плоскости) могут не иметь общей точки. Возникает исключение в формулировке — «дыра» — в теории: две прямые на плоскости, *кроме* параллельных, имеют общую точку. Теперь — с введением бесконечных точек — и параллельные имеют общую точку, лежащую в бесконечности. В результате возникает симметрия, которую характеризуют как «принцип двойственности»: «Во всяком верном утверждении о соотношении между точками, как и о соотношении между прямыми, термины “точки” и “прямые” можно заменять друг на друга и утверждение останется верным».

Иногда идеальные объекты характеризуют как «строительные леса» теории (см. [2]). На самом деле, как мы видим, они чаще всего вводятся в уже построенную теорию (по крайней мере в случаях, когда цель их введения состоит в достижении большей систематизации и устранении упомянутых исключений в теории). Хотя отнюдь не всегда цель их введения состоит в этом. В ряде случаев они просто необходимы для построения теории, но не как строительные леса, которые можно убрать в какой-то момент, а как некоторая органически присущая теории ее часть. Нельзя представить себе астрономию без оси вращения небесной сферы, полюсов, параллелей и меридианов.

С указанным представлением о роли идеальных объектов связано положение об их элиминируемости из теории (согласно которому все идеальные объекты всегда могут быть устранены из теории так, что все утверждения о реальных объектах останутся истинными). Это утверждение нельзя считать правильным для всех объектов идеального характера. Ясно, что элиминация идеальных объектов в некоторых теориях вообще невозможна. Как можно представить себе географию и тем более астрономию без меридианов, параллелей и полюсов, арифметику без натурального ряда? Требования элиминируемости, очевидно, относятся к

таким идеальным объектам, которые вводятся для расширения теории, для обобщения ее утверждений.

К указанному перечню теоретических объектов (и соответственно терминов) следует добавить также диспозиционные признаки (предикаты), обозначающие способности предметов вести себя определенным образом в определенных ситуациях. Таковы — растворимость, электропроводность, пластичность, упругость и т.п. Их употребляют обычно как некие простые, чуть ли не наблюдаемые, характеристики вещей и явлений действительности. Между тем, они не только не даны в наблюдениях, но указывают даже на некоторые необходимые связи в действительности. Например, растворимость некоторого вещества означает, что если бы оно было погружено в воду, то необходимо растворилось бы. Растворение вещества — наблюдаемое явление. Растворимость как определенная способность тела не является наблюдаемой.

Что касается математики, то здесь мы имеем дело вообще лишь с теоретическими объектами. При этом с тремя их видами из указанных выше: с идеализированными, абстрактными и идеальными объектами.

К числу идеализированных относятся прежде всего различного рода геометрические фигуры и формы геометрических тел. Исходными для них являются, как нам представляется, те или иные фигуры и формы тел, наблюдаемые в действительности — данные самой природой и изобретенные людьми в процессе практической деятельности (круги на воде, по крайней мере близкие к треугольным и прямоугольным формы земельных участков, шарообразные формы камней, круговая форма полной Луны и видимого Солнца). Геометрические фигуры и формы вообще (по крайней мере некоторые исходные) являются результатами идеализации реально наблюдаемых. Конечно, многие формы изобретаются и самой геометрией, в особенности с возникновением аналитической геометрии. Идеализации состоят, во-первых, в доведении до нуля поперечных размеров реальных линий, ограничивающих наблюдаемые фигуры, а также в устранении случайных искривлений прямых линий или искажений, например, прямоугольных, треугольных или круговых



форм объектов. Геометрическая прямая линия, например, является как результат мысленного лишения поперечных размеров физических (вроде палки, трости, натянутой струны, луча света и т.д.) отрезков и мысленного продолжения их в обе стороны.

Существенно, однако, заметить, что по крайней мере основные геометрические фигуры не только являются результатами идеализации форм реально существующих предметов, но также результатом отвлечения от самих предметов и превращения их в самостоятельные предметы мысли. Таким образом, геометрические фигуры можно охарактеризовать как абстрактные и идеализированные объекты.

К числу идеальных объектов геометрии относятся бесконечно удаленные точки и прямые в проективной геометрии, системы координат в аналитической геометрии.

Абстрактные объекты суть площади, периметры фигур, стороны, высоты их и т.д. Но главное — таковыми являются сами геометрические фигуры и формы, поскольку они прежде всего являются определенными характеристиками материальных вещей, отвлеченными нашим сознанием от последних и превращенными в самостоятельные предметы нашего мышления. Пожалуй, наиболее яркими примерами абстрактных объектов математики являются целые положительные числа.

Кстати, аподиктичность геометрического знания обеспечивается не только идеальным характером рассматриваемых фигур, но и процессами абстрагирования от тех или иных особенностей конкретных фигур, например, геометрических треугольников (при доказательстве теоремы о сумме углов треугольника абстрагируемся от того с прямоугольным или тупоугольным треугольником мы имеем дело). Учитывается лишь наличие у треугольника некоторой совокупности признаков, общей для всех треугольников, совокупности, посредством которой выделяются треугольники из множества других фигур. Эти совокупности фиксируются в понятии треугольника («плоская геометрическая фигура, ограниченная тремя прямыми») и аналогично — в понятиях других фигур (окружности как геометрического места точек на плоскости, равноудаленных от некоторой одной точки,

и т.п.). Сами эти понятия возникают как результаты анализа и сравнения различных фигур того или иного вида. Таким образом, пользуясь терминологией Канта, но вопреки его мнению, геометрическое познание можно охарактеризовать не только как познание посредством образования понятий, но и как познание посредством понятий. Но явно противореча Канту, надо сказать, что фигуры геометрии и знания о них являются не результатами применения схем чистого созерцания, а результатами обработки того, что мы имеем в реальных процессах реального созерцания. Исходя из сказанного, естественно объясняется и то, каким образом геометрические знания могут применяться в расчетах площадей, периметров и других фигур различного рода самой реальной действительности. Для определения площадей соответствующих физических фигур мы должны каждый раз повторять тот же процесс идеализации их, то есть учитывать возможные отклонения их от идеализированных фигур геометрии и мысленно устранять эти отклонения. При этом правильность результатов расчетов находится в зависимости от того, насколько правомерно игнорировать отклонения реального предмета от идеализированного. Впрочем, наука дает нам также и методы введения в вычисления поправок, связанных с отступлением физических объектов от идеала. Более того, в науке в ряде случаев даются разные формулировки законов: с одной стороны, для идеализированных предметов; с другой — для реальных с определенными поправками. Для идеальных газов, например, имеет место уравнение Клапперона  $p v = R T$  (где  $p$  — давление на газ,  $v$  — его объем,  $R$  — газовая постоянная,  $T$  — абсолютная температура). В этом соотношении игнорируется влияние на величину давления  $p$  столкновений между молекулами и наличие у молекул определенных размеров, в чем и состоит идеализация газа. С учетом этих факторов возникает уравнение Ван-дер-Ваальса  $(p + a/v^2)(v - b) = R T$ , где  $a/v^2$  — упомянутая поправка на  $p$ , а  $b$  — совокупный объем молекул в грамм-молекуле газа. Последнее уравнение относится уже к реальным газам. Уже этот пример опровергает распространенное представление о том, что объектами изучения научных теорий являются не предметы и явления реальной действительности, а некоторые абстрактные

объекты — результаты определенных логических обработок объектов реальной действительности (это также опровергает представление Ю. А. Петрова, что физическая реальность включает только некие абстрактные объекты, заданные определениями).

Целые положительные числа арифметики — типичные примеры абстрактных объектов, поскольку их реальными прообразами являются количественные характеристики (мощности) реальных множеств предметов (согласно известному определению натурального числа или, точнее, целого положительного, оно представляет собой то общее, что есть во всех эквивалентных множествах). Натуральные числа возникают за счет добавления идеального объекта, каковым является ноль, связанный также с идеальным объектом — пустым множеством. В самой действительности мы, конечно, не встречаем пустых множеств и тем более не задумываемся об их количественных характеристиках.

Конечно, идеальными объектами теории чисел являются введенные Кантором трансфинитные числа. Идеальным объектом арифметики является также натуральный ряд.

Впрочем, сами множества, как они понимаются в математике, являются результатом существенной идеализации реально существующих. Элементы реально существующих множеств — отдельные деревья, люди, составляющие те или иные коллективы, — находятся обычно в разных местах пространства и часто даже существуют в разное время. Математические множества возникают как результат мысленного «собрания» таких предметов воедино. Отвлекаясь от пространственных и временных положений предметов реальных множеств, математика мыслит их как некоторые наличные или, по крайней мере, частично фиксированные совокупности.

Существенно заметить, что некоторые философы, в том числе логики (и, возможно, даже большинство таковых), не признают существования множеств в реальной действительности. С этой точкой зрения невозможно согласиться. Как можно отрицать существование в действительности классов, совокупностей — или, иначе говоря, именно множеств — в том или ином отношении однородных предметов, а также тот факт, что эти совокупно-

сти сплошь и рядом становятся объектами нашей мысли? Разве не является вполне осмысленным утверждение о том, что множество людей на Земном шаре в настоящее время по своей численности превышает пять миллиардов? Что множество деревьев некоторого лесного массива численно уменьшается, когда происходит их вырубка? Не признавая существования множеств в реальной действительности, мы не имеем возможности даже, например, объяснить, что представляет собой общее имя: «дерево», «человек» и т.п. «Дерево» не является именем некоторого отдельного, объединенного предмета. Это есть знак для любого предмета из множества деревьев (то есть своего рода переменная естественного языка, возможными значениями которой являются элементы множества деревьев). Если множества, как понятия математики, не являются идеализацией некоторых объектов реальной действительности, то их нужно признать идеальными объектами. Но тогда теория множеств целиком является теорией, относящейся к идеальным объектам. Едва ли в такой теории вообще могла бы быть какая-то надобность. Как мы видели, идеальные объекты играют в теории определенную инструментальную роль и вводятся всегда как дополнение к другим объектам, составляющим предмет изучения теории (как было указано, существует даже концепция элиминированности идеальных объектов из теории, но что можно элиминировать из теории, если она не содержит ничего кроме идеальных элементов?).

Большую роль в теории чисел играет, как известно, понятие бесконечного множества. Гильберт наряду с натуральным рядом считает его типичным идеальным объектом как арифметики, так и теории множеств, исходя из того, что в действительности, как он подчеркивает, вообще нет актуальной бесконечности. Бесконечно малые математического анализа, как выяснил Вейерштрасс, представляют собой лишь потенциальные бесконечности (бесконечно уменьшаемые величины). Бесконечно большие пространства окружающего мира (которые можно представить как бесконечно большие множества единиц измерения), согласно Гильберту, — это лишь неправильные представления, к которым приводит нас Евклидова геометрия. Сам мир, согласно современным представлениям науки, как подчеркива-

ет Гильберт, не бесконечен, а лишь неограничен и правильно описывается римановой геометрией (см. [1]). Но с точки зрения происхождения такого объекта, как бесконечное множество, его скорее можно было бы охарактеризовать как идеализированный объект действительности. Он является результатом идеализации множеств, количество элементов которых практически не поддается учету. Таковы, например, открытые множества (множество растений, птиц, людей), или множества, имеющие хотя и определенное, но не доступное учету количество элементов (каковым, по-видимому, является количество электронов или позитронов в мире). Именно такие множества мы мысленно наделяем мощностями, не выразимыми каким-либо натуральным числом. Однако речь идет здесь о счетных бесконечных, и при этом понимаемых как потенциально бесконечные, множествах. Актуально же бесконечные множества, как счетные, так и несчетные, являются явно идеальными элементами, продуктами самого математического мышления. Таковыми являются, конечно, бесконечные множества точек в любом отрезке прямой (равномощное множеству точек в любом квадрате) и действительные числа, понимаемые как актуально бесконечные десятичные дроби, как и само множество действительных чисел. Введение объектов такого рода полезно для упрощения наших рассуждений, в которых речь идет о каких-то предметах с учетом их числовых характеристик любой конечной мощности (например, длины формул, длины выводов при применении математической индукции, бесконечные последовательности Тарского в семантике классической логики предикатов).

Гильберт обращает внимание на то, что исходными объектами теории чисел являются множества, составленные из единиц, или «палочек» ( $|$ ,  $||$ ,  $|||$  ...). Он характеризует эти совокупности как числовые знаки, точнее, рассматривает их как сами числа, подчеркивая, что они ничего не обозначают, за ними нет никаких объектов, знаками которых они могли бы считаться; они — объекты содержательно-наглядных конструкций и только. Операции с ними (прибавление одного множества к другому или наоборот — исключение из множества какой-то его части) рассматриваются как операции с числами. Однако упомянутые

множества скорее представляют собой результаты идеализации математических (а в конечном счете — реальных, поскольку, как мы видели, сами математические представляют собой идеализации реальных) множеств за счет лишения их элементов всяческих качественных различий и особенностей. В результате такой идеализации сохраняется и по существу явно выделяется именно то свойство множества, которое мы называем его мощностью. Отвлечение этого свойства от той или иной указанной совокупности и превращение его в самостоятельный объект с введением для него имени приводит к тому, что мы называем целыми положительными числами. Вместе с этим возникает операция счета и известные операции с числами, осуществляемые как некоторые акты мышления. Впрочем, указанное представление множеств как совокупностей «палочек», как свидетельствует литература, посвященная философии и истории математики, изобретено не математиками. Оно возникло в практических отношениях между людьми. Известно, что купец, не имеющий еще понятия числа, представлял совокупностями палочек информацию о множестве штук товара, которое он должен был получить взамен проданного. Кстати, специальным прибором образования таких (в данном случае «костяшковых») множеств, причем не только из разряда единиц, но и более высоких разрядов чисел, были известные (видимо, только старшему поколению) счеты, в которых роль палочек играли костяшки. Существенно заметить, что употребляя счеты для образования таких множеств, осуществлялись процессы указанной выше идеализации реальных множеств за счет игнорирования некоторых фактических различий между отдельными предметами — костяшками счет. Впрочем, изображая множество палочек, мы также игнорируем возможные их искривления, различия в их толщинах или длинах. Подобная идеализация в употреблении письменных знаков естественного и особенно формализованных языков носит даже специальное название в теории алгоритмов — «абстракция отождествления».

Довольно часто в литературе указанный способ представления количественной информации с помощью совокупности палочек называют счетом и утверждают при этом, что счет пред-

шествовал появлению числа. Однако счета в строгом смысле этого слова здесь нет, поскольку счет предполагает употребление имен чисел. Е. Д. Смирнова высказывает сомнение относительно указанной характеристики множеств палочек Гильберта как объектов, которые ничего не обозначают и за которыми нет никаких других объектов, представителями которых они могли бы считаться. При таком представлении, как считает она, действия с числами надо было бы понимать как операции эмпирического характера, а саму элементарную теорию чисел «как эмпирическую науку об определенном рода вещах-знаках и их соотношениях» [2, с. 110]. По ее мнению, указанные множества палочек – это не сами числа, а коды чисел как идеальных объектов. Сами же числа возникают именно в результате чистого схематизирования, то есть применения схем чистого созерцания согласно Канту: «... гильбертовские числовые знаки |, || и т.д. как эмпирические созерцания представляют собой единичные объекты, но, связанные с конструированием понятия конечного числа, они должны репрезентировать общее (“общезначимость”) для всех возможных вещей (созерцаний), подпадающих под это понятие, — они репрезентируют мысленные объекты и определенные конструирующие операции с ними» [2, с. 110]. По нашему мнению, каждое из упомянутых множеств действительно репрезентирует нечто общее, а именно все равнозначные ему множества, причем таким образом, что то, что является общим для всех этих множеств, а именно их мощность, представлено в таком множестве в «оголенном виде». Таким образом, согласно нашему представлению, эти гильбертовские якобы знаки являются не кодами чисел, а явными изображениями их. Для появления самого числа как самостоятельного объекта мысли нужно отвлечение его от этого множества, что — по крайней мере явным образом — осуществляется введением его имени. Общее понятие целого числа возникает, очевидно, тем же способом, как и понятие дерева, растения — путем отвлечения от индивидуальных различий отдельных чисел и выделения именно того общего для них, что они являются мощностями эквивалентных множеств. Что касается опасения Е. Д. Смирновой, что при гильбертовской трактовке целых положительных чисел теория чисел мо-

жет превратиться в эмпирическую науку, мы предложили бы сказать следующее.

В основе своей, по происхождению, теория чисел действительно является эмпирической, хотя бы потому, что ее исходные операции (сложения, вычитания и другие) осуществляются вначале как определенные действия физического характера (упомянутое выше сложение множеств, удаление из множества некоторой его части). Теоретичность эта теория приобретает уже при появлении имен чисел, а тем самым — при введении в нее заведомо теоретических объектов, каковыми являются числа. При появлении этих знаков (имен чисел) числовые операции сложения, вычитания могут, как мы уже говорили, осуществляться как мыслительные действия с числами. Однако момент эмпиричности остается на начальной стадии развития теории чисел. Он состоит в эмпирическом способе установления результатов упомянутых операций. Откуда мы, например, можем узнать вначале, что  $2 + 3 = 5$  (равенство понимаем как совпадение предметов левой и правой части, точнее — как указание на то, что имена левой и правой части обозначают один и тот же объект)? Ясно, что мы должны взять для этого палочковые множества мощностей 2 и 3, реально или мысленно сложить их и усмотреть, что полученное множество имеет мощность именно 5. Сам Кант, как известно, характеризуя высказывания указанного типа как синтетические априори, указывает по существу именно такой способ их установления, подчеркивая, что для установления того, что  $5 + 7 = 12$ , необходимы процессы построения объектов 5, 7 и присоединения одного к другому. Для формирования элементарной теории чисел необходима таблица сложения, как и таблица умножения для чисел, по крайней мере в пределах десятка, которая может быть получена только указанным эмпирическим образом (ссылка на схемы чистого созерцания здесь абсолютно ничего не объясняет). На это указывает, собственно, и Гильберт, говоря, что «в математике предметом нашего рассмотрения являются конкретные знаки сами по себе, облик которых . . . непосредственно ясен и может быть впоследствии узнаваем» [1, с. 351] (имея в виду упомянутые ранее палочковые множества, которые он называет числовыми зна-



ками). Более того, положение об эмпирическом происхождении теории чисел он распространяет на любое научное познание. Возражая против попыток (Фреге, Дедекинда) выведения математики из логики (соглашаясь с мнением Канта, что математика имеет собственное, отличное от логики, содержание), Гильберт пишет: «... кое-что дано в нашем представлении в качестве предварительного условия для применения логических выводов и для выполнения логических операций: определенные, внелогические, конкретные объекты, которые имеются в созерцании до всякого мышления в качестве непосредственных переживаний (то есть, очевидно, ощущений, чувственных восприятий; как мы видели, мысль состоит в том, что даже объекты математики являются физически ощущаемыми. — *Прим. авт.*). Для того, чтобы логические выводы были надежны, эти объекты должны быть обозримы полностью во всех частях; их показания, их отличие, их следование, расположение одного из них наряду с другим дается непосредственно наглядно, одновременно с самими объектами, как нечто такое, что не может быть сведено к чему-либо другому и не нуждается в таком сведении. Это — та основная философская установка, которую я считаю обязательной как для математики, так и вообще для всякого научного мышления, понимания и общения и без которой совершенно невозможна умственная деятельность» [1, с. 351].

Интересно, что эти же высказывания Гильберта цитирует и Е. Д. Смирнова, но как подтверждение того, что в понимании природы математического знания и в обосновании его аподиктичности он придерживается кантовской концепции. Суть концепции Гильберта она усматривает в том, что математическое познание он понимает в соответствии с Кантом не как «познание посредством понятий», а как «конструирование понятий». Однако, как мы отмечали выше, математика не только конструирует понятия, но и пользуется ими. Можно ли отрицать познавательную роль таких понятий математики, как натуральное, рациональное, действительное, простое и т.п. числа, треугольник, прямоугольный треугольник, окружность и т.п.? Они играют такую же роль, как понятия химического элемента, молекулы, атома, скорости, ускорения и т.д. и т.п. в химии, физике. Осуществ-

ляя «познание посредством понятий», эти, как и другие, науки естественно предварительно конструируют их, как это делает и математика.

Познание «как конструирование понятий» и «посредством понятий» — это различие логического характера. Философский вопрос, которого также касается Гильберт, — это вопрос об источниках и природе математического знания. И здесь Гильберт принципиально расходится с Кантом.

Философская концепция Гильберта является явно реалистической (которой, как правило, придерживаются ученые-естествоиспытатели). Если нужны дополнительные подтверждения этого, то можно сослаться на следующие высказывания того же Гильберта: «... я не нуждаюсь ни, как Кронекер, в господе боге, ни, как Пуанкаре, в предположении об особой способности нашего разума, ни, как Брауэр, в первоначальной интуиции, наконец, ни, как Рассел и Уайтхед, в аксиомах бесконечности, редукции (сводимости) или полноты, которые являются подлинными гипотезами содержательного характера и, сверх того, вовсе не правдоподобными» [1, с. 388]. Судя по этому и учитывая уже изложенное выше, естественно предположить, что Гильберт согласился бы с тем, что он также не нуждается в гипотезах Канта о существовании чистого созерцания и особых его познавательных схем.

Философские расхождения Гильберта с Кантом явно замечает и сама Е. Д. Смирнова.

По поводу приведенных высказываний Гильберта у нее возникает вопрос, о котором мы уже говорили в другой связи: «... не превращаются ли в таком случае (согласно указанным взглядам Гильберта. — *Прим. авт.*) действительные предложения математики (то есть предложения, в которых утверждается нечто о реальных объектах математики. — *Прим. авт.*) (например, арифметические законы) просто в эмпирические утверждения, пусть о конструктивных, но объектах наглядного созерцания? Но тогда, соответственно, мы возвращаемся к проблеме обоснования аподиктического характера математического знания» [2, с. 109].

Расхождения Гильберта с Кантом, которые Е. Д. Смирнова представляет себе как кажущиеся отступления от Канта, она характеризует даже как некоторую «загадку» и утверждает, что «...ключ к объяснению этой гильбертовской загадки в трактовке подлинных объектов математики следует искать именно в кантовской идее схематизма чистого созерцания» [2, с. 110]. Согласно которой «...для конструирования понятия требуется не эмпирическое созерцание (подчеркнуто нами. — *Авт.*), которое, стало быть, как созерцание есть единый объект, но тем не менее, будучи конструированием понятия (общего представления), должно выразить в представлении общезначимость для всех возможных созерцаний, подходящих под одно и то же понятие» (цит. по [2, с. 110]). Здесь опять-таки вполне явным образом выявляется отличие философской концепции Гильберта от кантовской: Гильберт имеет в виду обычное эмпирическое созерцание, то есть естественное чувственное восприятие как основу математических понятий; Кант же, наоборот, подчеркивает, что созерцание, которое он имеет в виду в качестве источника математического знания, не является эмпирическим.

Конечно, Гильберт не считает теорию чисел, даже элементарную, эмпирической наукой, хотя бы потому, что она имеет дело с теоретическими, абстрактными объектами. Эмпиричность по происхождению, это не есть эмпиричность науки в целом. Начинается все с эмпирических вещей. В дальнейшем теория расширяется и становится явно теоретичной хотя бы за счет установления того, что число может состоять из единиц различных разрядов. Переносим первоначальную таблицу сложения также на числа десятков, сотен и так далее, мы получаем методы сложения (как и вычитания, умножения) для любых целых положительных чисел. Дальнейший процесс построения теории чисел состоит, как мы знаем, во введении новых видов чисел, установлении законов операций с ними (причем всегда так, чтобы операции с числами низших типов сохранялись при переходе к высшим как их частные случаи). Полезно заметить, что некоторые из вновь вводимых типов чисел относятся к числу идеальных объектов теории (явно таковыми являются мнимые числа, а вместе с тем и комплексные с непустой мнимой частью). Дальше, как

известно, появляется алгебра. Первоначально — как обобщение теории чисел, а затем как самостоятельная, весьма абстрактная ветвь математики. С развитием теории все большую роль играет мышление. В теории чисел — в основном дедуктивные выводы. И в этих процессах мышления, как подчеркивает Гильберт, в теорию могут проникать (и в действительности проникают) некоторые идеальные элементы, появление которых чревато противоречиями. Так, по мнению Гильберта, употребление так называемых частных экзистенциальных высказываний типа «существует натуральное число с некоторым свойством  $P$ » означает бесконечную дизъюнкцию: единица обладает свойством  $P$ , или двойка обладает свойством  $P$ , или тройка и т.д. и т.п. То есть натуральный ряд, первоначально понимаемый как потенциально бесконечное множество, превращается в актуально бесконечное множество. Аналогичное превращение потенциальной бесконечности в актуальную, как считает Гильберт и другие математики (см., например, Клини — «Введение в метаматематику» [3, с. 150–159]), происходит при применении к числам того же натурального ряда (и вообще к элементам потенциально бесконечного множества) закона исключенного третьего, то есть в результате применения высказываний типа «для всякого натурального числа  $x$  верно  $P(x)$  или не- $P(x)$ ». По видимости это действительно так<sup>6</sup>, поскольку речь идет о всяком натуральном

<sup>6</sup>Возможно и другое истолкование указанных высказываний: «Для всякого натурального числа  $x$ , какое бы мы ни взяли, идя по натуральному ряду, верно  $P(x)$  или не- $P(x)$ ». На такое именно истолкование, как представляется автору, наводит существующее понимание квантификации в классическом исчислении предикатов в сочетании с принципом предметности в употреблении знаков. Согласно принципу предметности утверждения о любом объекте предполагают использование его имени. В силу этого «Для всякого предмета  $x$  из некоторой области  $D \dots$ » следует понимать, как «Для всякого предмета  $x$  из некоторой области  $D$ , обозначенного каким-нибудь (любым) именем  $a, \dots$ », а «Существует предмет  $x$  в области  $D \dots$ » — как «Существует предмет  $x$  в области  $D$ , обозначенный некоторым (определенным) именем  $a, \dots$ » (данное истолкование кванторов общности и существования естественно назвать референциально-подстановочным в отличие от противопоставляемых друг другу референциального и подстановочного истолкований). Обычно мы не учитываем наличие кванторов по именам в классической квантификации, но его полезно принимать во внимание, например, для устранения парадокса кван-

числе, то есть предполагается, что все элементы натурального ряда имеются налицо. С проникновением же актуально бесконечных множеств в теорию чисел (и математику вообще) в математике возникают противоречия.

Идея Гильберта состоит в том, чтобы не отказываясь от высказываний указанного вида и вообще от каких-либо оправдавших себя в применениях к конечным множествам предметов логических средств, строить математику так, чтобы все идеальные объекты оказывались под строгим контролем нашего разума. Как известно, метод, который предлагает Гильберт, называют финитизмом. Суть его состоит в том, чтобы свести все наши рассуждения к операциям с конечными и конструктивными объектами и с обозримыми конечными множествами таковых (как мы начинали элементарную теорию чисел), с функциями, имеющими конечные области определений, и определенные значения для любого из элементов таких множеств и т.д. Для высших разделов математики, где решающую роль играет мышление, подразумевается возможность формализации всех рассуждений, сведение рассуждений к операциям с реальными объектами — с исходными символами некоторого специального формализованного языка, с его формулами как конечными последовательностями символов, и доказательствами как конечными последовательностями формул. При этом, как считает Гильберт, в случае возникновения противоречия, оно всегда может быть выявлено и соответствующим образом устранено из теории. Кстати, Гильберт характеризует этот свой предлагаемый метод как метод идеальных элементов, называя формулы формализован-

---

тификации в модальных контекстах, сформулированного Куайном. Куайн, возражая против возможности квантификации модальных контекстов, показывает, что применение экзистенциальной квантификации к истинным высказываниям «Вечерняя звезда необходимо равна Вечерней звезде и не необходимо равна Утренней» и «Утренняя звезда не необходимо равна Вечерней и необходимо равна Утренней» приводит соответственно к « $\exists x(\Box(x = \text{Вечерняя звезда}) \& \neg\Box(x = \text{Утренняя звезда}))$ » и « $\exists x(\neg\Box(x = \text{Вечерняя звезда}) \& \Box(x = \text{Утренняя звезда}))$ ». Таким образом, имея один предмет (Вечернюю звезду, которая одновременно является и Утренней), то есть Венеру, мы получаем два различных предмета. Легко увидеть, что парадокс исчезает при предложенной референциально-подстановочной трактовке кванторов.

ных, а иногда, по-видимому, и полуформализованных языков (результатов отвлечения от значений дескриптивных терминов теории, но с сохранением значений логических связок, как это имеет место в языках абстрактных алгебраических теорий, а также в формализованной самим Гильбертом геометрии Евклида, в которой логика рассуждений остается неформализованной) идеальными высказываниями [1, с. 358]. Однако получается так, что этот метод включает две совершенно разнородные части: одна состоит в том, что в теорию вводятся некоторые идеальные объекты; другая — формализация теории — наоборот, означает полное отвлечение от содержания теории или, по крайней мере, от конкретных содержаний ее высказываний.

Дело, очевидно, в том, что сами формулы формализованных языков и операции с ними, по-видимому, рассматриваются Гильбертом как объекты изучения математики (видимо, в этом суть того направления, которое называют формалистическим направлением в математике), а не как средства формализации ее утверждений. И как объекты изучения математики они подобны идеальным объектам, вопрос о которых рассматривался ранее, поскольку, как и те, вводятся в теорию для ее усовершенствования. Однако, если предмет математики таков (то есть включает формулы, операции с ними, отношения между ними), тогда утверждения о них (то есть по существу метаутверждения по отношению к формализованному языку) опять-таки являются истинными или ложными. Известно, что в настоящее время различают математику как формальную науку (по Карнапу — теоретическая математика) и как содержательную, науку о количественных отношениях и пространственных формах, например, геометрию в традиционном понимании и так далее (по Карнапу — прикладная теория). Однако и в формальной ее предметом не являются формулы самого языка и отношения между ними; она — по одной версии — вообще не имеет никакого предмета и приобретает его лишь при той или иной интерпретации ее формализованного языка. Так, согласно Расселу, в математике мы не знаем о чем говорим, что говорим и истинно ли то, что говорим. По другой версии (Бурбаки) — это совокупность содержательных теорий о различного вида струк-

турах, и опять-таки, значит не о формулах ее языка (кстати, утверждения Карнапа о том, что высказывания теоретической математики аналитически истинны, справедливы лишь при второй из указанных ее трактовок). Но при этом высказывания этой теоретической математики нельзя отождествлять с формулами ее языка. Последние являются лишь предикатами общих ее высказываний ([6, часть II, глава IV, параграф 15]. Между тем, в работе «Обоснования математики» [1, с. 366] Гильберт прямо говорит, что именно формулы и отношения между ними наряду со знаками, которые он рассматривал раньше в качестве исходных для теории чисел (множества, состоящие из палочек), являются предметом математики. Но если это так, то фактически, по крайней мере на определенном этапе (на этапе формализации рассуждения в некоторых уже сложившихся теориях математики), математика сводится к логике, ибо все, что касается формул формализованных языков и отношений между ними, относится именно к логике.

Из того, что переход к формализации рассуждений Гильберт характеризует как применение метода идеальных элементов и особенно в связи с тем, что он вводит здесь термин «идеальное высказывание», Е. Д. Смирнова делает вывод о том, что Гильберт вообще делит все предложения теории на реальные и идеальные. Реальные, как она истолковывает Гильберта, относятся к реальным предметам теории, идеальные — к идеальным ее элементам. Но поскольку формулы формализованного языка, называемые Гильбертом идеальными высказываниями, не имеют истинностных значений, не имеют никаких определенных содержаний (смыслов), то таким же образом трактуются ею, опять-таки якобы в согласии с Гильбертом, утверждения об идеальных элементах теории.

Однако, если в одном случае, когда мы имеем дело не с высказываниями, а с неинтерпретированными (или только логически интерпретированными) формулами, не имеет вообще смысла говорить о каких-то истинностных значениях этих языковых образований, и к тому же эти так называемые идеальные высказывания, то есть формулы формализованного языка, не являются предметами самой теории. Иное дело, когда высказывание отно-

сится к идеальным объектам теории. Сомнительно, например, что надо считать лишёнными истинностного значения и вообще бессмысленными такие высказывания, как «Натуральный ряд есть бесконечное множество», «Каждая бесконечно удаленная точка (в проективной геометрии) является результатом пересечения двух параллельных линий» или «Полуса небесной сферы являются точками, в которых небесная ось пересекает эту сферу». Гильберт, например, говорит, что с введением бесконечно удаленных точек в геометрию плоскости теоремой становится утверждение о том, что каждые две прямые имеют одну общую точку. И едва ли Гильберт согласился бы различать в одной и той же теореме часть, имеющую истинностное значение («Всякие две прямые на плоскости, кроме параллельных имеют общую точку»), и другую — лишённую такового («Параллельные прямые имеют общую — бесконечно удаленную точку»). В таком случае мы просто не имели бы упомянутой Гильбертом теоремы.

Едва ли математик или физик согласился бы с тем, что приведенное выше высказывание о натуральном ряде, о полусах небесной сферы, о бесконечно удаленной точке, как пересечении параллельных прямых, имеют тот же статус, как, например, высказывания «флогистон есть жидкость», «эфир упруг или не упруг». С уверенностью можно сказать, что в настоящее время любой физик назовет два последних высказывания просто бессмысленными, а это означает, что они не имеют истинностных значений даже несмотря на то, что второе из них является по своей форме аналитически истинным (и согласно существующему определению аналитических утверждений является таковым, что явно указывает на необходимость определенного уточнения этого определения). И, конечно, он будет отличать их по типу от высказывания «абсолютно черное тело поглощает все лучи» и «абсолютно упругая жидкость несжимаема» и т.п. Теплород, флогистон исключены из сферы рассмотрения физики и потому рассуждения о них действительно не имеют смысла. Те, кто не отличает высказывания с пустыми субъектами от высказываний об идеальных, идеализированных или абстрактных объектах (не существующих в действительности, но допускаемых



учеными в свой универсум рассуждения), должен бы подумать хотя бы над тем, почему математик не возражает против рассуждений о бесконечных, пустых множествах, о мнимых числах и т.д., но наверняка охарактеризует как бессмысленные такие, например, как: «Все простые числа, которые делятся на 4, являются четными» или «Всякое число, которое делится на ноль, можно делить на ноль» (хотя последние являются аналитическими, а значит, логически необходимыми согласно распространенному понятию аналитичности).

Как было отмечено ранее, некоторые философы считают, что в реальной действительности не существует множеств, и тем самым признают множества математики не результатами идеализации некоторых реальных объектов, а идеальными объектами. Если кто-то (а такие, как нам известно, существуют) придерживается указанного взгляда относительно статуса высказываний об идеальных элементах, то есть считает их лишенными истинностных значений и какого-либо содержания, то он должен признать лишенными истинностных значений и содержания все утверждения математической теории множеств.

С философской и специально логической точки зрения существенно отметить, что с введением идеальных объектов в универсум некоторой теории тем или иным образом устанавливаются и условия истинности или ложности относящихся к ним высказываний. Приписываемые таким высказываниям истинностные значения, конечно, отличаются от тех, какие имеют высказывания, относящиеся к реально существующим предметам или явлениям. На первый взгляд дело представляется так, что они вводятся по соглашению. Некоторый момент конвенциональности здесь, конечно, имеется, однако нет произвола в установлении истинностных значений интересующих нас высказываний. Условия их истинности зависят от других утверждений теории. Точнее говоря, высказывания, относящиеся к идеальным объектам, должны согласоваться в теории со всеми другими ее утверждениями.

Истинность или ложность высказываний об идеальных предметах можно установить исходя из известной схемы Тарского:  $T\langle A \rangle$  е.т.е.  $A$  (Истинно высказывание « $A$ », е.т.е. в действитель-

ности — в мире — есть ситуация, которую описывает это высказывание). Мы берем эту схему здесь в несколько упрощенном виде, как она употребляется обычно в философской литературе. Однако одно уточнение следует ввести уже в данном случае. Дело в том, что в указанной формулировке не определенной является ссылка на действительность вообще (или на мир вообще). Если речь идет о реальном мире или действительности, то надо учитывать, что он изменчив, и то, что истинно в одно время, может оказаться неистинным в другое. Например, утверждение, что Земля вращается вокруг Солнца, не является, конечно, истинным, если иметь в виду мир, каким он был несколько миллиардов лет тому назад, когда не было еще ни Солнца, ни Земли. Поэтому — в определении истинности — надо иметь в виду не мир вообще, а те или иные временные срезы, состояния мира, рассматривая их естественным образом (по крайней мере с логической и гносеологической точек зрения) как различные миры. К тому же наши высказывания могут относиться не только к тем или иным состояниям реального мира, но и к миру геометрических фигур (универсум геометрии), чисел (универсум теории чисел), а также к мирам древнегреческой или иной мифологии, художественных произведений и так далее. Обычно в логике, когда говорят о возможных мирах, имеют в виду вообще множество определенных объектов, к которым могут относиться наши высказывания (универсум — предметная область того или иного рассуждения или теории), а также множество свойств и отношений между этими объектами, наличие или отсутствие которых может утверждаться в высказывании, с указанием того, какие из таких высказываний истинны или ложны в данном мире. Кстати, мир физики, в котором наряду с объектами реальной действительности существуют упомянутые результаты теоретической деятельности — идеализированные, абстрактные и идеальные объекты, надо, конечно, отличать даже от того или иного среза реального мира<sup>7</sup>. Учитывая сказанное, схему Тар-

---

<sup>7</sup>В работе Ю. А. Петрова [5], содержащей интересный основательный анализ отношения теории к действительности, утверждается, что именно мир, содержащий идеализированные, идеальные, как и абстрактные предметы, и есть то, что в науке, точнее в естествознании (у Ю. А. Петрова —

ского следует, очевидно, формулировать так: *Истинно высказывание «А» в некотором мире  $\alpha$ , е.т.е. в этом мире существует положение дел, описываемое этим высказыванием.* В таком случае, истинные высказывания об идеальных объектах некоторой теории, введенных ею в свой универсум, действительно описывают какие-то ситуации, существующие в этом мире.

При этом следует различать два понятия существования: существование объекта в некотором универсуме (мире) и реальное его существование в действительном мире.

Пользуясь языком символической логики предикатов, существование некоторого идеального (или идеализированного, абстрактного) объекта  $a$  в универсуме — предметной области — некоторой теории можно выразить в виде  $\exists x(x = a)$ . Таким образом, существование в области выражается с помощью квантора существования « $\exists$ », тогда как существование некоторого предмета  $a$  в реальной действительности выражается посредством некоторого предикатного символа, положим, « $E$ ». Например, утверждение, что Луна существует в реальной действительности, запишется в виде  $E(\text{Луна})$ . Утверждение вида  $\exists x(x = a)$  не истинны, например, если « $a$ » обозначает теплород, флогистон, эфир и тому подобные объекты, исключенные из универсума физики. Но для идеального (идеализированного, абстрактного, то есть не существующего реально) предмета физики в той или иной теории не истинно утверждение  $E(a)$ . Ложно, например  $E(\text{тройка})$  или  $E(\text{Северный полюс небесной сферы})$  и т.п. Конечно, сам универсум некоторого утверждения может представлять собой множество предметов реальной действительности (например, растений, животных и т.д.). В этом случае для любого предмета  $a$  « $\exists x(x = a)$ » эквивалентно « $E(a)$ ».

---

в физике), имеется в виду под физической реальностью, и именно она и является непосредственным предметом физики, тогда как объективная реальность, по его мнению, есть опосредованный ее предмет. Едва ли такое словупотребление и представление о предмете науки можно считать удачным, поскольку «физическая реальность» в смысле Ю. А. Петрова сама уже есть результат определенных познавательных процессов, относящихся к реальной действительности, которая и является, таким образом, непосредственным предметом физики. По Ю. А. Петрову получается, что физика сама создает свой предмет непосредственного изучения.

Гносеологически существенно учитывать наличие определенных соответствий между высказываниями об абстрактных и идеализированных объектах, образованных посредством логической обработки предметов реального мира, истинных в соответствующих мирах (включающих эти объекты), и высказываниями относительно этих исходных предметов реального мира. Например, результаты расчетов на основе законов динамики точки справедливы также — с определенной степенью точности — для предметов реальной действительности, которые приняты за материальные точки, при условии, конечно, что такие идеализации для них допустимы.

Таким образом, по крайней мере, какие-то результаты рассуждений об абстрактных и идеализированных объектах в конечном счете так или иначе относятся к предметам реального мира.

Мы подробно остановились на вопросе об истинностном статусе высказываний об идеальных предметах действительности, поскольку этот вопрос имеет весьма принципиальное значение. Трактовка этих высказываний как лишенных истинностных значений и реального смысла ведет к отождествлению их с высказываниями, содержащими пустые термины (такими, как упоминавшиеся уже «флогистон», «теплород», а также «вечный двигатель» и тем более «круглый квадрат» и т.п.). Таким образом, оправдывается употребление в науке высказываний с пустыми терминами в качестве субъектов. Однако, как мы видим (см. [7]), допущение последних в научных рассуждениях приводит ко многим трудностям и даже к парадоксам, например, к парадоксу «Лжец» в известной современной предложенной А. Тарским его формулировке.

Остается теперь перейти непосредственно к основной проблеме — к проблеме обоснования аподиктичности теоретического знания. Точнее, речь пойдет о выяснении источников и способов получения аподиктического знания в науке, оснований для утверждений такого рода. Выяснение, например, того, как обеспечивается аподиктичность арифметического знания, если исходные утверждения теории чисел получают указанным выше эмпирическим образом. Утверждения вида  $5+7 = 12$  Кант назы-

вал, как известно, синтетическими априори. В связи с этим здесь возникает ряд вопросов. Во-первых, является ли знание синтетическое априори по Канту необходимым (аподиктическим), является ли сама аподиктичность некоторого знания синонимом — или по крайней мере условием — его достоверности (истинности)? Читая философскую литературу, нетрудно заметить, что аподиктичность нередко отождествляется с достоверностью. На такое отождествление наводит название статей вроде «Обоснование аподиктического знания», которое естественно понимать как выявление того, что аподиктическое знание науки является достоверным. Однако это отождествление нельзя признать правильным. К тому же сам термин «знание» употребляют не в строгом эпистемологическом смысле (в котором предложение, выражающее некоторое знание, по определению является истинным). Имеют в виду просто полученные наукой на том или ином этапе ее развития сведения о тех или иных ситуациях, выражаемые в форме высказываний или совокупностей таковых. В таком случае аподиктическое знание — это знание, выраженное в высказываниях необходимого характера или в совокупностях таковых. Высказывания такого типа, как и все другие, могут быть истинными и ложными. Если некто утверждает, что на такой-то кафедре такого-то учебного заведения имеется 15 сотрудников (высказывание ассерторического, не необходимого, характера), то он может быть прав, но утверждая, что на этой кафедре необходимо имеется 15 сотрудников, скорее всего ошибается. Собственно, примеры такого рода в массовом количестве дает нам сама наука. Несомненно, утверждения евклидовой геометрии, ньютоновой механики являются аподиктическими, хотя аподиктичность их часто лишь подразумевается и не формулируется явно. Но с современной точки зрения многие из них являются не только неточными, но и просто ложными. Напомним замечание Гильберта о том, как подводит нас в ряде случаев евклидова геометрия. По вопросу об истинностном статусе упомянутых высказываний и о возможности их уточнений, при которых они могут использоваться в практической деятельности, см. [8], а также [6, часть II, глава IV, параграф 16]. Кстати, согласно Канту, все высказывания евклидовой гео-

метрии, как, очевидно, и классической механики, получаются по схемам чистого созерцания, и наука показывает нам, насколько эти схемы — если они действительно существуют — оказываются ненадежными.

Сам Гильберт, как нам представляется, в рассматриваемой статье занят не обоснованием аподиктичности математического знания, а выяснением условий его достоверности — впрочем, он сам вполне ясно об этом говорит в ряде случаев. Хотя, как выяснилось позже, предложенный им метод построения математики — характеризуемый как концепция финитизма, — обеспечивающий, по его мнению, достоверность математического знания, оказался недостаточным; в настоящее время в качестве более широкой методологической основы математики рассматривается конструктивизм как обобщение финитной точки зрения. Финитизм предполагает наглядность, возможность чувственного созерцания рассматриваемых предметов, конструктивизм не включает этого требования. Хотя более или менее ясного определения конструктивности объектов не существует, но, например, к числу конструктивных объектов относят трансфинитные числа, предполагая, очевидно, что мы отдаем себе каждый раз отчет, о чем именно мы говорим, употребляя имя такого числа, поскольку имеем вполне определенное описание построения ряда трансфинитных чисел. Однако конструктивность предмета наряду с определенной его заданностью предполагает, что он не исчезает в процессе нашего рассуждения и не изменяется в результате того, что в процессе рассуждения мы что-то о нем утверждаем или отрицаем. В этом смысле явно неконструктивным является, например, такой предмет, как множество всех множеств. Если мы имеем действительность, состоящую, положим, из двух объектов « $a$ », « $b$ », то множество всех имеющихся здесь множеств (исключая для простоты пустые) будет  $\{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ . Однако, поскольку теперь появилось новое множество, его надо включить в качестве элемента множества всех множеств. Вновь образованное — также надо включать в качестве элемента полученного предмета. Таким образом, нет никакого определенного предмета, на который указывали бы слова «множество всех множеств» (и, видимо, именно эта неконструктивность объекта, а

не актуальная бесконечность — как иногда считают — является причиной известного парадокса Кантора). Впрочем, как показывает сам парадокс, связанный с понятием мощности множества, такого объекта просто не существует, поскольку он является противоречивым. Аналогично дело обстоит и с множеством всех нормальных множеств в известной формулировке парадокса Рассела. Противоречивость объекта (указывающая также на несуществование такового) возникает в силу специфики самого свойства множества быть нормальным. В применении к вещам реальной действительности (например, к индивидам) оно состоит в способности множества не сохранять то свойство своих элементов, по которому они обобщаются в данное множество. Нормальность множества коров состоит в том, что само оно не является коровой, множество деревьев — не дерево и т.д. В применении же к нормальным множествам свойство нормальности состоит в способности обобщающего их множества не сохранять указанное свойство не сохраняя свойства своих элементов. Что означает сохранять свойство своих элементов, то есть быть ненормальным (таким образом, по видимости, одно и то же свойство, примененное к объектам одного типа, становится даже по существу противоположным для объектов другого типа, что, собственно, и привело Рассела к формулировке теории типов).

Теперь, очевидно, все наши вопросы сводятся к выяснению того, что означает необходимость и как возникает необходимое знание. Сразу заметим, что есть два основных вида необходимости: логическая и онтологическая. Относительно логической необходимости ограничимся пока некоторыми предварительными ее характеристиками. Высказывание *A* логически необходимо, если оно необходимо в силу своей логической формы (независимо от конкретных значений составляющих его дескриптивных терминов). Логическая необходимость высказывания совпадает с его аналитичностью. Последнее имеет место, если высказывание истинно только в силу определений его дескриптивных или только логических терминов. Причем когда речь идет о случае аналитической истинности в силу определения дескриптивных терминов, то в установлении истинности высказывания

играют роль только логические структуры этих определений (и в конечном счете высказывание истинно или не истинно независимо от значения дескриптивных терминов). Что касается онтологической необходимости, то сразу надо оговориться, что это понятие никак нельзя считать выясненным в логике. Многие видные представители логики вообще считали, что существует только логическая необходимость. Лишь в последнее время все чаще подчеркивается существование онтологической, и начинаются исследования этой категории познания в логике. В философии при попытках определения необходимости, и прежде всего именно онтологической, ограничиваются чаще всего метафорами вроде того, что это нечто «устойчивое», «прочно сидящее», «повторяющееся», или чисто психологически — «нечто имеющее место в действительности так, что нельзя помыслить иначе», или, наконец, «то, что не может быть по-другому» (хотя само «не может быть» обычно употребляется как синоним необходимого) и т.п. В большинстве случаев, когда речь идет об онтологической необходимости, имеется в виду отношение строгой детерминированности одного явления, свойства или ситуации другим (явлением, свойством, ситуацией). Свойство треугольника, состоящее в том, что сумма внутренних углов его составляет 180 градусов, является необходимым для всех треугольников, так как детерминировано совокупностью признаков, определяющих треугольник. Свойство электропроводности морской воды также необходимо принадлежит ей, поскольку детерминировано наличием в ней примесей, прежде всего в виде солей (в силу которых в воде возникают положительно заряженные частицы — ионы). Есть, однако, и такие случаи онтологической необходимости, где отсутствует (или по крайней мере по видимости отсутствует) детерминированность одного чем-то другим. Необходимость в этих случаях имеет, если так можно выразиться, отрицательный характер: необходимо  $p$  (высказывание  $p$ , а в конечном счете ситуация, которую оно описывает), потому что невозможно не- $p$ . Такой характер, по-видимому, имеют фундаментальные законы науки. Логически, два только что упомянутых вида необходимости являются эквивалентными («необходимо  $p$ » эквивалентно «невозможно не- $p$ »), но гносеологически



различение позитивной и негативной форм необходимости существенно хотя бы в силу различия способов выявления, то есть способов получения соответствующего знания. Необходимость как строгую детерминированность — необходимость позитивной формы — мы познаем, используя знания сущности явлений (того, например, что теплота — это движение молекул, температура — средняя скорость этого движения и т.п.), то есть на основе существующих теорий посредством дедуктивных выводов так называемого релевантного характера.

Например, то, что всякий газ при нагревании необходимо расширяется, получаем из знания того, что всякое скопление газа есть совокупность хаотически и независимо друг от друга движущихся молекул, и что нагревание газа есть увеличение скорости движения, а тем самым и средней скорости движения его молекул, и что расширение есть результат увеличения расстояния между молекулами, которое наступает как раз в силу увеличения их скоростей. Таким образом, просто устанавливается как одно явление — нагревание порождает другое — расширение для любого скопления газа. По крайней мере, так образуется знание, которое называют качественными динамическими законами науки.

Сложнее обстоит дело с объяснением возникновения необходимости отрицательной формы и с так называемыми «фундаментальными» законами науки, которые, как нам представляется, имеют обычно именно эту форму. Необходимость как невозможность чего-то («невозможно  $p$ ») возникает, очевидно, в результате анализа возможных причин, по которым вместо имеющейся ситуации не- $p$  могла бы оказаться  $p$ . По каким причинам могло бы оказаться, что  $2 + 3$  не равно 5? Очевидно, что такой причиной могла бы быть природа самих элементов — множеств с мощностью 2 и с мощностью 3. Но устанавливая результат  $2 + 3 = 5$ , мы пользуемся идеализированными множествами, лишая элементы реальных множеств всяких качественных различий, отождествляя их по крайней мере по упомянутому принципу абстракции. К этому надо добавить, что элементы эти в конечном счете представляют собой конструктивные предметы (не рассыпающиеся, не испаряющиеся, не сливающиеся между со-

бой при операциях с ними, различимые между собой пространственно, без чего невозможен их счет). Цель идеализации предметов и явлений действительности в том, собственно, и состоит, чтобы устранить всякие причины, которые бы изменяли те или иные соотношения, устанавливаемые для идеальных объектов. Именно в силу того, что мы не находим причин, по которым  $2 + 3$  в каком-то случае было бы отлично от числа 5, мы считаем высказывание  $2 + 3 = 5$  необходимым.

Проведя, например, прямую между двумя точками и мысленно идеализируя ее, устанавливаем, что она — кратчайшее расстояние между этими точками. При этом считаем это высказывание необходимым, поскольку всякая мысленно проведенная другая линия, соединяющая эти точки, оказывается не прямой и более длинной (кстати, здесь как раз мы имеем случай, когда наше заключение о необходимости оказывается ложным; в силу ограниченности пространства, в котором мы оперируем, не замечаем, что линия, принимаемая нами за прямую, не оказывается в действительности таковой).

В отличие от случая с « $2+3$ » мы пользуемся здесь более сложными идеализациями — мысленным продолжением, например, прямых отрезков неограниченно в обе стороны. Это выводит нас далеко за пределы того, что мы имеем в опыте, того, что можно наблюдать. Результатами таких именно действий нашего интеллекта оказываются неточности, а строго говоря, просто неистинность некоторых утверждений Евклидовой геометрии, механики Ньютона и др. Этим обусловлено обычное в науке уточнение формулировок законов физики, смена одних теорий другими согласно известному принципу соответствия (см. [8]).

Впрочем, возможность ошибок при установлении аподиктического знания не всегда связана с идеализациями. Существенно именно то, что процесс формирования такого знания включает анализ возможных причин отклонения от того, что мы наблюдаем. Известно, что до формулировки закона сохранения массы-энергии существовали в физике два отдельных закона — сохранения массы и сохранения энергии. Выражающие их предложения считались необходимыми потому именно, что нельзя было усмотреть, каким образом могла бы бесследно исчезнуть

энергия или масса некоторого тела. И отнюдь не случайно, что каждый раз, когда казалось, что энергия или масса исчезают бесследно, ученые упорно перепроверяли опыты и стремились показать, за счет чего именно происходят эти потери. Тем не менее, тот и другой закон в отдельности оказались неверными, поскольку открылась возможность уменьшения массы некоторого тела с потерей им какой-то энергии, например, внутриядерной. И истинным в настоящее время рассматривается закон сохранения массы и энергии, объединяющий оба указанных.

Как известно, Кант характеризовал высказывания типа « $2 + 3 = 5$ », « $5 + 7 = 12$ », теоремы геометрии и, судя по всему, также и динамические законы физики, как синтетические суждения априори. Карнап [4, с. 242] разъясняет, что под этим термином Кант имел в виду «... тот вид знания, который непосредственно не зависит от опыта, но зависит от него в генетическом или психологическом смысле». Едва ли это утверждение Карнапа точно передает Канта. Вспомним, например, слова Канта о том, что мы могли бы прийти к понятию треугольника, даже если бы треугольников вообще не существовало в природе. Если мы правы в приведенных трактовках способов получения аподиктического знания, то оно, конечно, является синтетическим, но отнюдь не свободным от опыта (даже непосредственно — по терминологии Карнапа). Однако не является и чисто опытным, поскольку включает результаты определенного логического анализа и не извлекается непосредственно из наблюдения.

Таким образом, оно в каком-то смысле «синтетическое неопытное», но не «синтетическое априорное». Мысль наша в конечном счете состоит в том, что всякое знание в конечном счете является опытным. И это, как нам представляется, подчеркивает Гильберт. Однако крайними, а поэтому неправильными, являются точки зрения как философского эмпиризма, так и рационализма. Аподиктическое знание, как мы стремились показать, не является ни результатом просто наблюдений, ни результатом чистой деятельности нашего разума (или врожденными истинами); оно не является также проявлением неких мифических схем чистого созерцания Канта. Знания этого ви-

да суть результаты наблюдений и определенной теоретической деятельности.

Нелишне добавить к этому, что иногда знание обсуждаемого — аподиктического — типа появляется просто на основе интуиции. На это указывают, например, два способа обобщений: один индуктивный, при котором общее суждение типа «Все  $S$  есть  $P$ » возникает в результате наблюдений того или иного достаточно большого количества предметов класса  $S$ . При другом — общее суждение может возникать на основе интуитивно «улавливаемой» необходимой связи между  $S$  и  $P$ . Так, химику достаточно один или два раза заметить, что кислота окрашивает лакмусовую бумажку в красный цвет, а щелочь — в синий, или, что смесь водорода и кислорода (гремучий газ) при нагревании взрывается, чтобы сформулировать общее суждение, что всякая кислота (и при этом — в любом случае) окрашивает лакмусовую бумажку в красный цвет, а щелочь — также любая и в любом случае — в синий, что смесь водорода и кислорода взрывоопасна. Интуиция в этом случае состоит, очевидно, в «усмотрении» того, что щелочь и кислота, как и лакмусовая бумажка, обладают какими-то свойствами, в силу которых происходит наблюдаемое явление окрашивания бумажки, и что водород и кислород также имеют некоторые свойства, благодаря которым смесь того и другого при определенной температуре взрывается (превращаясь в воду).

Пожалуй, одним из наиболее ярких примеров интуитивно познаваемой невозможности дает логика, запрещая признавать одновременно истинными некоторое высказывание  $A$  и его отрицание  $\neg A$  на том основании, что ни в каком реально возможном мире не может существовать одновременно ситуация, которая утверждается в  $A$ , и противоположная ей, утверждаемая в  $\neg A$ . Последнее, а именно невозможность сосуществования указанных ситуаций, не доказывается никакими рассуждениями. Она не может быть обоснована ссылкой на какой-то закон логики. В классической логике известный закон непротиворечия: «Неверно, что  $A$  и  $\neg A$ », — не запрещает противоречий в действительности, поскольку эквивалентен « $A$  или  $\neg A$ ». В интуиционистской логике « $A$  или  $\neg A$ » не следует из «Неверно, что

А и не-А», но тому, кто попытался бы доказать, что в действительности не может быть противоречивых ситуаций ссылкой на закон непротиворечия интуиционистской логики, можно было бы возразить, а почему, именно, мы считаем такое утверждение законом. В конечном счете, мы не можем обойтись здесь без ссылки на интуицию. Кстати, ссылка на опыт была бы несостоятельна, поскольку в опыте, наоборот, часто кажется, что совместимы противоречащие друг другу ситуации. Такая кажимость возникает всякий раз, когда мы не учитываем, что отрицание А осуществляется в каком-то другом смысле, чем утверждение А; или же явления рассматриваются не в том отношении, не в то время и т.п. Так, часто говорим, что данный человек добрый и недобрый, имея в виду доброту и недоброту в разных смыслах, считая проявлением недоброты поступок, неприятный для кого-то, но принципиальный с точки зрения высших принципов человечества.

### Литература

- [1] *Гильберт Д.* Основания геометрии. М.-Л.: Изд-во техн.-теорет. лит., 1948.
- [2] *Смирнова Е. Д.* Метод идеальных элементов и обоснование аподиктического знания // Гуманитарная наука в России: Соросовские лауреаты, 1996.
- [3] *Клини С. К.* Введение в метаматематику. М.: Иностран.лит., 1957.
- [4] *Карнап Р.* Философские основания физики. М.: Прогресс, 1971.
- [5] *Петров Ю.А.* Гносеологический подход к эффектизации понятия физической реальности // Вестник Московского Университета. Серия 7. Философия. 1996. № 3. С. 29–40.
- [6] *Войшвилло Е.К.* Понятие как форма мышления. М.: Изд-во МГУ, 1989.
- [7] *Войшвилло Е.К.* Проблема непустоты субъектов высказываний (суждений) // Логика и В.Е.К. М.: Современные тетради, 2003.
- [8] *Войшвилло Е.К.* Принцип соответствия как форма развития знаний и понятие относительной истины. Критика концепции несоизмеримости сменяющих друг друга теорий // Логика и В.Е.К. М.: Современные тетради, 2003.

**References (transliteration)**

- [1] *Gil'bert D.* Osnovaniya geometrii. M.-L.: Izd-vo tehn.-teoret. lit. 1948.
- [2] *Smirnova E.D.* Metod ideal'nyh elementov i obosnovanie apodikticheskogo znaniya // Gumanitarnaja nauka v Rossii: Sorovskie laureaty. 1996.
- [3] *Klini S.K.* Vvedenie v metamatematiku. M.: Inostr. lit.,1957.
- [4] *Karnap R.* Filosofskie osnovaniya fiziki. M.: Progress, 1971.
- [5] *Petrov Ju.A.* Gnoseologicheskij podhod k effektivizacii ponjatija fizicheskoy real'nosti // Vestnik Moskovskogo universiteta. Serija 7. Filosofija, 1996. № 3. S. 29–40.
- [6] *Vojshvillo E.K.* Ponjatie kak forma myshlenija. M.: Izd-vo MGU, 1989.
- [7] *Vojshvillo E.K.* Problema nepustoty sub'ektov vyskazyvanij (suzhdenij) // Logika i V.E.K. M.: Sovremennye tetradi, 2003.
- [8] *Vojshvillo E.K.* Princip sootvetstvija kak forma razvitija znaniy i ponjatie odnositel'noj istiny. Kritika koncepcii nesoizmerimosti smenjajushhij drug druga teorij // Logika i V.E.K. M.: Sovremennye tetradi, 2003.