Бесконечнозначная логика Лукасевича и критерии наличия фактор-семантики у многозначных логик

Н. Н. Преловский

abstract. The article deals with a special kind of bivalent semantics for multi-valued logics, called factor-semantics. A concept of *local factor-semantics* is introduced while constructing matrices $\mathfrak{K}$ and $\mathfrak{K}'$, isomorphic to the standard rational-valued matrix for infinite-valued logic of Łukasiewicz.

Keywords: logics of Łukasiewicz, factor-semantics, logical matrices, isomorphism, local factor-semantics

А.С. Карпенко (см. [1, с. 311–315]) описывает построение особого впервые рассмотренного им в [3] типа бивалентных семантик для различных многозначных логических систем, включающих конечнозначные логики Лукасевича $Ł_n$ и конечнозначные логики Клини K_n. Данный тип бивалентных семантик получил название «фактор-семантик».

Суть фактор-семантики в первом приближении сводится к отказу от интерпретации пропозициональных логических формул неклассическими логическими значениями, рассматриваемыми в качестве не имеющих внутренней структуры элементов соответствующей алгебры, и переходу к интерпретации формул на множестве классов, образованных конечными или бесконечными последовательностями классических истинностных значений T и F (в дальнейшем — TF-последовательностями).

Несмотря на внесение столь радикальных изменений в определения семантических понятий, А.С. Карпенко доказал, что получающиеся в результате всех преобразований структуры изоморфны исходным логическим матрицам, являющимся характеристическими для соответствующих логик. Образующие фактор-семантики логические матрицы в дальнейшем часто будут называться фактор-матрицами, в отличие от исходных характеристических матриц.

Изоморфизм двух объектов является очень сильным свойством, и во многих контекстах может означать математическую неразличимость практически «всех» свойств этих объектов. В случае конечнозначных логических матриц, например, изоморфизм матриц $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ (символически будем обозначать этот факт выражением $\mathfrak{M}_1 \equiv \mathfrak{M}_2$) гарантирует совпадение классов тавтологий $E(\mathfrak{M}_1)$ и $E(\mathfrak{M}_2)$ в этих матрицах, а также совпадение соответствующих этим матрицам логических систем, полученных добавлением к обеим матрицам того или иного определения логического следования. Между множествами-носителями M_1 и M_2 этих матриц может быть установлено взаимнооднозначное соответствие $\varphi : M_1 \mapsto M_2$, гарантирующее выполнение равенства $|M_1| = |M_2|$, а также совпадение табличных определений соответствующих связок с точностью до переименования элементов множеств-носителей. Таким образом, отвлечение от способов задания изоморфных объектов (в данном случае придется отвлечься от внутренней структуры элементов матриц, соответствующих фактор-семантикам) ведет к невозможности их практического различения.

Но такая обусловленная изоморфизмом неразличимость сохраняется лишь при рассмотрении фактор-семантик в узком контексте логик, для которых фактор-семантики уже построены и наличие отношения изоморфизма (что эквивалентно наличию сохраняющего связки взаимнооднозначного отображения φ) между соответствующими матрицами уже доказано.

Возникает вопрос о том, какие многозначные логики могут иметь фактор-семантики, а какие — нет. Всегда ли возможно построение фактор-семантики, изоморфной исходной логической матрице, или же в некоторых случаях изоморфизм является слишком большой «роскошью», и тогда свойства соответствующей фактор-семантике матрицы (в некотором смысле, такая матрица, конечно, уже не может считаться точной семантикой для заданной исходной матрицей логики) могут совпадать лишь с некоторыми из свойств исходной матрицы, а с другими ее свойствами могут и не совпадать? Или же в некоторых случаях возможно добиться изоморфизма с исходными матрицами, но за счет сохранения лишь отдельных черт фактор-семантики и одновременной утраты других ее черт?

Ответ на первый из этих вопросов требует выявления логических матриц, для которых не могут быть построены фактор-семантики, и такие матрицы существуют. В частности, в [1] отмечается, что циклическое отрицание логик Поста P_n не может быть выражено через покомпонентные булевы операции. С другой стороны, для любой конечнозначной логики процесс построения соответствующей фактор-семантики, если она существует, может быть алгоритмизирован. Для этого необходимо и достаточно рассмотреть множество всех отношений $R(\alpha, \beta)$ между особым образом заданными $TF-$последовательностями α и β из всевозможных классов эквивалентности $[\alpha]$ и $[\beta]$ (это возможно с учетом конечности множеств всех бинарных отношений и всех отношений эквивалентности, заданных на конечном множестве). В случае бесконечнозначной логики, ситуация изменяется, рассмотрению некоторых предварительных результатов в этом направлении и посвящена данная статья.

Приведем формальное определение фактор-семантик на примере n-значных логик Лукасевича $Ł_n$.

С булевой алгеброй

$$\mathcal{A}^B =< B^s, \neg^+, \supset^+>$$

ассоциируется логическая матрица

$$\mathfrak{M}_s^C =< B^s, \neg^+, \supset^+, \{T^s\} > .$$

Эта логическая матрица представляет собой s-кратное прямое произведение двузначной характеристической для классической логики матрицы

$$\mathfrak{M}_2^C =< \{T, F\}, \neg, \supset, \{T\} >$$

на саму себя (то есть декартову s-ю степень данной матрицы).

Таким образом, любой элемент $\alpha \in B^s$ есть последовательность компонентов T и F, состоящая из s вхождений этих компонентов, то есть α есть $< a_1, ..., a_s >$, где $\forall i \leq s(a_i \in \{T, F\})$.

Через $\eta(\alpha)$ обозначается число компонентов α, равных T. Определим на элементах B^s следующее отношение эквивалентности. Так, для всяких α, β в B^s будем говорить, что $\alpha \cong \beta$, если $\eta(\alpha) = \eta(\beta)$. Рассмотрим фактор-множество $B^s/\cong$ множества B^s по отношению $\cong$. Очевидно, что

$$|B^s/\cong| = s + 1.$$

Если $\alpha \in B^s$, обозначим, соответствующий α класс эквивалентности через $[\alpha]$. На множестве $B^s/\cong$ определим операции $\neg^{\text{Ł}_{s+1}}$ и $\rightarrow^{\text{Ł}_{s+1}}$:

$$\neg^{\text{Ł}_{s+1}}[\alpha] = [\neg^+\alpha],$$

$$[\alpha] \rightarrow^{\text{Ł}_{s+1}} [\beta] = [\alpha' \supset^+ \beta'],$$

где $\alpha, \beta \in B^s/\cong$, $\alpha' \in [\alpha]$, $\beta' \in [\beta]$ и $R(\alpha', \beta')$, причем отношение R определяется следующим образом:

$$R(< a_1, ..., a_s >, < b_1, ..., b_s >)$$

имеет место, если и только если выполняется одно из следующих условий:

1. $\forall i \leq s(a_i = T \Rightarrow b_i = T)$, если $\eta(\alpha) \leq \eta(\beta)$;

2. $\forall i \leq s(b_i = T \Rightarrow a_i = T)$, если $\eta(\alpha) > \eta(\beta)$.

Таким образом, получена матрица

$$\mathfrak{N}^{\text{Ł}}_{s+1} =< B^s/\cong, \neg^{\text{Ł}_{s+1}}, \rightarrow^{\text{Ł}_{s+1}}, \{[T^s]\} > .$$

Данная матрица, согласно теореме 3 (см. [1, с. 312]), изоморфна характеристической для n-значной логики Лукасевича Ł_n матрице:

$$\mathfrak{M}^{\text{Ł}}_n =< V_n, \sim, \rightarrow, \{1\} >$$

при $n = s + 1$, где $V_n = \{0, \frac{1}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\}$, а для всех $v, v_1, v_2 \in V_n$ выполняется $\sim v = 1 - v$, и $v_1 \to v_2 = 1$, если $v_1 \leq v_2$; в противном случае: $v_1 \to v_2 = 1 - v_1 + v_2$.

Возникает вопрос, можно ли построить аналогичным образом фактор-семантику для бесконечнозначной логики Лукасевича $Ł_\infty$.

Отметим, что определение матрицы $\mathfrak{M}^{Ł}_\infty$, являющейся характеристической для бесконечнозначной логики Лукасевича, отличается от определения матрицы $\mathfrak{M}^{Ł}_n$ лишь тем, что множество V_n заменяется на множество всех рациональных или действительных чисел в интервале $[0;1]$, а определения соответствующих функций остаются неизменными с поправкой на новое множество значений. Выбор рациональнозначного или действительнозначного интервала во многих контекстах оказывается несущественным, поскольку класс тавтологий $Ł_\infty$ является инвариантным относительно данного выбора.При переходе к рассмотрению фактор-семантики бесконечнозначной логики Лукасевича это различение приобретает значимый характер.

А.С. Карпенко была построена фактор-матрица, являющаяся характеристической для бесконечнозначной логики $Ł_\Sigma$ (см. [2, с. 269–272] и [1, с. 315–318], множество тавтологий которой представляет собой расширение множества тавтологий логики $Ł_\infty$. Ниже будет осуществлено построение матриц, одна из которых совпадает с $Ł_\infty$ по классу тавтологий, а две других — изоморфны счетной характеристической матрице $Ł_\infty$, то есть матрице $\mathfrak{M}^{Ł}_\infty$, множество-носитель которой представляет собой множество всех рациональных чисел из интервала $[0;1]$.

С этой целью рассмотрим логические матрицы:

$\mathfrak{M}_1 =< M_1, f_1, ..., f_n, D_1 >$ и $\mathfrak{M}_2 =< M_2, g_1, ..., g_n, D_2 >$.

В дальнейшем будем считать, что соответствующие матрицы имеют одинаковую сигнатуру.

Произведением матриц $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ будем называть логическую матрицу

$$\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2 =< M_1 \times M_2, F_1, ..., F_n, D_1 \times D_2 >,$$

где «$\times$» означает декартово произведение соответствующих множеств, а $F_1, ..., F_n$ – следующим образом определенные функции:

$$\forall m_1, ..., m_i \in M_1, k_1, ..., k_i \in M_2, j \in \{1, ..., n\}$$

$$F_j(< m_1, k_1 >, ..., < m_i, k_i >) =< f_j(m_1, ..., m_i), g_j(k_1, ..., k_i) > .$$

Хорошо известен результат, согласно которому множество тавтологий бесконечнозначной логики Лукасевича является пересечением множеств тавтологий конечнозначных логик Лукасевича, то есть:

$$E(\mathfrak{M}^{\text{Ł}}_{\infty}) = \bigcap_{1}^{\infty} E(\mathfrak{M}^{\text{Ł}}_{i+1}).$$

Операция произведения матриц является в логическом инструментарии аналогом теоретико-множественного пересечения множеств тавтологий, поскольку, как показал Н. Решер в [4]:

$$E(\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2) = E(\mathfrak{M}_1) \cap E(\mathfrak{M}_2).$$

Так как операция произведения матриц и результат Н. Решера тривиально обобщаются на случай счетного множества матриц, можно сделать следующее заключение:

$$E(\mathfrak{M}^{\text{Ł}}_{\infty}) = E(\bigotimes_{1}^{\infty} \mathfrak{N}^{\text{Ł}}_{i+1}).$$

Значит, произведение всех фактор-матриц для конечнозначных логик Лукасевича в силу их изоморфизма с исходными матрицами соответствующих логик даст матрицу, совпадающую по классу тавтологий с бесконечнозначной логикой Лукасевича.

Эта матрица имеет следующий вид:

$$\bigotimes_{1}^{\infty} \mathfrak{N}^{\text{Ł}}_{i+1} =$$

$$\left\langle \{< [\alpha_1], [\alpha_2], ... >: [\alpha_i] \in B^i/\cong\}, \neg^{\text{Ł}}_{\otimes}, \rightarrow^{\text{Ł}}_{\otimes}, \{< [T], [TT], [TTT], ... >\} \right\rangle,$$

где $\neg^{\text{Ł}}_{\otimes}(<[\alpha_1],[\alpha_2],...>) =<\neg^{\text{Ł}_2}([\alpha_1]),\neg^{\text{Ł}_3}([\alpha_2]),...>$, а

$$<[\alpha_1],[\alpha_2],...>\rightarrow^{\text{Ł}}_{\otimes}<[\beta_1],[\beta_2],...>=$$

$$<[\alpha_1]\rightarrow^{\text{Ł}_2}[\beta_1],[\alpha_2]\rightarrow^{\text{Ł}_3}[\beta_2],...>.$$

Однако данная матрица, по всей видимости, в силу приводимых ниже причин не может использоваться в построении искомой фактор-семантики для бесконечнозначной логики Лукасевича.

Рассмотрим отношение эквивалентности между элементами $<[\alpha_1],[\alpha_2],...>$ и $<[\beta_1],[\beta_2],...>$, принадлежащими множеству-носителю данной матрицы: $<[\alpha_1],[\alpha_2],...>\cong<[\beta_1],[\beta_2],...>\Leftrightarrow \forall i\in\mathbb{N}(\eta(\alpha_i)=\eta(\beta_i))$.

Это отношение представляется наиболее интуитивно приемлемым кандидатом на роль отношения эквивалентности, порождающего соответствующее разбиение множества элементов матрицы.

Эквивалентными в этом случае являются, например, элементы $<[T],[TF],[TFT],...>$ и $<[T],[FT],[FTT],...>$, если положить, что каждая, начиная со второй, из бесконечного числа TF-последовательностей в соответствующем компоненте каждого из элементов содержит в точности по одному вхождению F. То есть элементы рассматриваемой матрицы эквивалентны, если и только если они содержат в точности одни и те же классы эквивалентности на каждой из кортежных позиций. Полученное таким образом разбиение на классы является тривиальным, поскольку каждый элемент эквивалентен лишь самому себе с точностью до выбора представителя для обозначения «внутреннего» класса эквивалентности на соответствующей кортежной позиции. А именно, выполняется:

$$\bigotimes_{1}^{\infty}\mathfrak{N}^{\text{Ł}}_{i+1}/\cong\ \equiv\bigotimes_{1}^{\infty}\mathfrak{N}^{\text{Ł}}_{i+1}.$$

Таким образом, можно заключить, что операция произведения фактор-матриц не сохраняет свойство «быть фактор-матрицей».

Однако компоненты элементов соответствующих матриц не обязательно должны представлять собой классы эквивалентности. Рассмотрим множество

$$B^{\infty} = B \times B^2 \times B^3 \times ...$$

B^{∞} представляет собой множество всех бесконечных последовательностей, состоящих из всевозможных конечных TF-последовательностей. Мощность множества B^{∞} есть континуум, и в связи с этим оно является «слишком большим», чтобы определить на нем счетную фактор-матрицу для бесконечнозначной логики Лукасевича. Будем считать, что каждая конечная TF-последовательность внутри элементов множества B^{∞} сопоставлена *весу* W этой последовательности, определенному для всякого s и для всякой последовательности $< a_1, ..., a_s >\in B^s$ следующим образом:

$$W(< a_1, ..., a_s >) = \frac{\eta(< a_1, ..., a_s >)}{s}.$$

Рассмотрим все такие суммы $\Sigma_1^{\infty} W(< a_1, ..., a_i >)$, где $1 \leq i < \omega$, а $< a_1, ..., a_i >$ — i-е TF-последовательности в некотором $\alpha \in B^{\infty}$. С их помощью определим множество $B_*^{\infty} \subset B^{\infty}$ такое, что: $\forall \alpha \in B^{\infty}$ выполняется $\alpha \in B_*^{\infty}$, если $\Sigma_1^{\infty} W(< a_1, ..., a_i >)$ находится в интервале $[0; 1]$ и является неотрицательным рациональным числом, то есть может быть выражено дробью вида $\frac{m}{n}$, где m — неотрицательное целое число, n — натуральное число, а $< a_1, ..., a_i >\in \alpha$ для всякого $i \in \{1, 2, ...\}$.

Установим на множестве B_*^{∞} отношение эквивалентности таким образом, что для всяких α и β из B_*^{∞} выполняется, что $\alpha \cong \beta$, если и только если

$$\Sigma_1^{\infty} W(< a_1, ..., a_i >) = \Sigma_1^{\infty} W(< b_1, ..., b_j >),$$

где i и j пробегают по всем конечным TF-последовательностям в α и β, соответственно.

Определим матрицу

$$\mathfrak{K} = \left\langle B_*^{\infty} / \cong, \neg^{\mathfrak{K}}, \rightarrow^{\mathfrak{K}}, \{[<< T >, < FF >, < FFF >, ... >]\} \right\rangle,$$

где $B^{\infty}_{*}/\cong$ есть результат разбиения множества B^{∞}_{*} по отношению эквивалентности $\cong$, $[<< T >, < FF >, < FFF >, ... >]$ есть класс элементов множества B^{∞}_{*} (то есть элемент множества $B^{\infty}_{*}/\cong$), эквивалентных последовательности $<< T >, < FF >, < FFF >, ... >$, в которой первое вхождение T является единственным, то есть класс всех таких последовательностей $\alpha =<< a_{11} >, < a_{21}, a_{22} >, < a_{31}, a_{32}, a_{33} >, ... >$ из B^{∞}_{*}, что $\Sigma^{\infty}_{1} W(< a_{i1}, ..., a_{ii} >) = 1$.

Связки $\neg^{\mathfrak{K}}$ и $\rightarrow^{\mathfrak{K}}$ определяются следующим образом:

-
$$\neg^{\mathfrak{K}}([<< a_{11} >, < a_{21}, a_{22} >, < a_{31}, a_{32}, a_{33} >, ... >]) =$$
$$[<< a'_{11} >, < a'_{21}, a'_{22} >, ..., \neg^{+} < a'_{i1}, ..., a'_{ii} >, ... >],$$
где правая часть равенства представляет собой класс последовательностей, эквивалентных последовательности, все компоненты которой, кроме $\neg^{+} < a'_{i1}, ..., a'_{ii} >$, состоят только из вхождений F (в частности, если $i \neq 2$, то $< a'_{21}, a'_{22} >=< FF >$), а $< a'_{i1}, ..., a'_{ii} >$ есть такой компонент, что:
$$W(< a'_{i1}, ..., a'_{ii} >) =$$
$$W(< a_{11} >) + W(< a_{21}, a_{22} >) + W(< a_{31}, a_{32}, a_{33} >) + ... =$$
$$\frac{\eta(< a'_{i1}, ..., a'_{ii} >)}{i}.$$

-
$$[<< a_{11} >, < a_{21}, a_{22} >, < a_{31}, a_{32}, a_{33} >, ... >] \rightarrow^{\mathfrak{K}}$$
$$[<< b_{11} >, < b_{21}, b_{22} >, < b_{31}, b_{32}, b_{33} >, ... >] =$$
$$[<< a'_{11} >, < a'_{21}, a'_{22} >, ...,$$
$$< a'_{i1}, ..., a'_{ii} > \supset^{+} < b'_{i1}, ..., b'_{ii} >, ... >],$$
где правая часть равенства представляет класс последовательностей, эквивалентных последовательности, все компоненты
$$< a'_{11} >, < a'_{21}, a'_{22} >, ...,$$

$$< a'_{(i-1),1}, ..., a'_{(i-1),(i-1)} >, < a'_{(i+1),1}, ..., a'_{(i+1),(i+1)} >, ...$$

которой состоят лишь из вхождений F, а
$< a'_{i1}, ..., a'_{ii} > \supset^+ < b'_{i1}, ..., b'_{ii} >$ есть такой компонент, что:

$$W(< a'_{i1}, ..., a'_{ii} >) =$$

$$W(< a_{11} >) + W(< a_{21}, a_{22} >) + W(< a_{31}, a_{32}, a_{33} >) + ... =$$

$$\frac{\eta(< a'_{i1}, ..., a'_{ii} >)}{i};$$

и

$$W(< b'_{i1}, ..., b'_{ii} >) =$$

$$W(< b_{11} >) + W(< b_{21}, b_{22} >) + W(< b_{31}, b_{32}, b_{33} >) + ... =$$

$$\frac{\eta(< b'_{i1}, ..., b'_{ii} >)}{i};$$

и в соответствующей конечнозначной фактор-матрице $\mathfrak{N}^{\text{Ł}}_{i+1}$ имеет место:

$$R(< a'_{i1}, ..., a'_{ii} >, < b'_{i1}, ..., b'_{ii} >).$$

Матрица $\mathfrak{K}$ изоморфна счетной матрице $\mathfrak{M}^{\text{Ł}}_{\infty}$, являющейся характеристической для бесконечнозначной логики Лукасевича Ł_{∞}. Доказательство этого утверждения существенно опирается на изоморфизм между конечнозначными фактор-матрицами $\mathfrak{N}^{\text{Ł}}_{s+1}$ и n-значными матрицами логик Лукасевича Ł_n, в которых $n = s + 1$. Докажем соответствующую теорему.

Теорема 1. *Матрица* $\mathfrak{K}$ *изоморфна матрице* $\mathfrak{M}^{\text{Ł}}_{\infty} = \langle [0;1], \sim, \to, \{1\} \rangle$, *где* $[0;1] \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

Доказательство. Определим отображение $\varphi : B^{\infty}_{*} / \cong \mapsto [0;1]$, что для всякого $[\alpha]$ в $B^{\infty}_{*} / \cong$ выполняется:

$$\varphi([\alpha]) = \Sigma^{\infty}_{1} W(< a_{i1}, ..., a_{ii} >),$$

где i пробегает по индексам в соответствующих конечных последовательностях из α. Данное отображение в силу определения множества $B^{\infty}_{*} / \cong$ является взаимнооднозначным. Покажем теперь, что изоморфизм имеет место, то есть:

- $\varphi(\neg^{\mathfrak{K}}([\alpha])) =\sim \varphi([\alpha])$;
- $\varphi([\alpha] \to^{\mathfrak{K}} [\beta]) = \varphi([\alpha]) \to \varphi([\beta])$.

Рассмотрим первое равенство. Допустим, что $[\alpha]$ есть $[<< a_{11} >, < a_{21}, a_{22} >, < a_{31}, a_{32}, a_{33} >, ... >]$. Тогда, по определению, выполняется следующее равенство:

$$\neg^{\mathfrak{K}}([\alpha]) = [<< a'_{11} >, < a'_{21}, a'_{22} >, ..., \neg^{+} < a'_{i1}, ..., a'_{ii} >, ... >],$$

где все конечные последовательности из списка

$$< a'_{11} >, < a'_{21}, a'_{22} >, ...,$$

$$< a'_{(i-1),1}, ..., a'_{(i-1),(i-1)} >, < a'_{(i+1),1}, ..., a'_{(i+1),(i+1)} >, ...$$

содержат лишь вхождения F, а

$$W(< a'_{i1}, ..., a'_{ii} >) =$$

$$W(< a_{11} >) + W(< a_{21}, a_{22} >) + W(< a_{31}, a_{32}, a_{33} >) + ... =$$

$$\frac{\eta(< a'_{i1}, ..., a'_{ii} >)}{i}.$$

Поэтому:

$$\varphi([<< a'_{11} >, < a'_{21}, a'_{22} >, ..., \neg^{+} < a'_{i1}, ..., a'_{ii} >, ... >]) =$$

$$\frac{i - \eta(< a'_{i1}, ..., a'_{ii} >)}{i} = 1 - \frac{\eta(< a'_{i1}, ..., a'_{ii} >)}{i} =$$

$$1 - W(< a_{11} >) - W(< a_{21}, a_{22} >) - W(< a_{31}, a_{32}, a_{33} >) - ... =$$

$$1 - \varphi([<< a_{11} >, < a_{21}, a_{22} >, < a_{31}, a_{32}, a_{33} >, ... >]) =\sim \varphi([\alpha]).$$

Таким образом, первое равенство доказано.

Рассмотрим теперь второе равенство. Выберем для доказательства компоненты $< a'_{i1}, ..., a'_{ii} >$ и $< b'_{i1}, ..., b'_{ii} >$ соответствующей последовательности

$$<< a'_{11} >, < a'_{21}, a'_{22} >, ..., < a'_{i1}, ..., a'_{ii} > \supset^{+} < b'_{i1}, ..., b'_{ii} >, ... >,$$

удовлетворяющие условиям из определения связки $\to^{\mathfrak{K}}$ в $\mathfrak{K}$. Такие компоненты существуют в силу определений матриц $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{N}^{\mathbf{L}}_{i+1}$ и того, что два любых рациональных числа могут быть представлены в виде дробей с общим знаменателем.

Возможны два случая.

1. $W(< a'_{i1}, ..., a'_{ii} >) \leq W(< b'_{i1}, ..., b'_{ii} >)$. В этом случае очевидно, что правая часть второго равенства есть 1. Далее:

$$[\alpha] \to^{\mathfrak{K}} [\beta] =$$

$$[<< a'_{11} >, ..., < a'_{(i-1),1}, ..., a'_{(i-1),(i-1)} >,$$

$$< \underbrace{T...T}_{i} >, < a'_{(i+1),1}, ..., a'_{(i+1),(i+1)} >, ... >] =$$

$$[<< T >, < FF >, < FFF >, ... >].$$

Значит, $\varphi([\alpha] \to^{\mathfrak{K}} [\beta]) = W(< T >) = 1$. Что и дает требующееся доказательство первого случая.

2. $W(< a'_{i1}, ..., a'_{ii} >) > W(< b'_{i1}, ..., b'_{ii} >)$. Тогда правая часть равенства в силу определения φ и $\to$ равняется $1 - W(< a'_{i1}, ..., a'_{ii} >) + W(< b'_{i1}, ..., b'_{ii} >)$. Но, согласно определению $\to^{\mathfrak{K}}$ и $\supset^{+}$, а также поскольку имеет место

$$R(< a'_{i1}, ..., a'_{ii} >, < b'_{i1}, ..., b'_{ii} >),$$

то число вхождений T в $< a'_{i1}, ..., a'_{ii} > \supset^{+} < b'_{i1}, ..., b'_{ii} >$ есть

$$\eta(< b'_{i1}, ..., b'_{ii} >) + (i - \eta(< a'_{i1}, ..., a'_{ii} >)).$$

Значит:

$$W(< a'_{i1}, ..., a'_{ii} > \supset^{+} < b'_{i1}, ..., b'_{ii} >) =$$

$$\frac{\eta(< b'_{i1}, ..., b'_{ii} >) + (i - \eta(< a'_{i1}, ..., a'_{ii} >))}{i} =$$

$$1 - \frac{\eta(< a'_{i1}, ..., a'_{ii} >)}{i} + \frac{\eta(< b'_{i1}, ..., b'_{ii} >)}{i}.$$

То есть $\varphi([\alpha] \to^{\mathfrak{K}} [\beta])$ в этом случае также равняется $1 - W(< a'_{i1}, ..., a'_{ii} >) + W(< b'_{i1}, ..., b'_{ii} >)$. Что дает искомое доказательство второго случая.

□

Матрица $\mathfrak{K}$ не является фактор-семантикой для бесконечнозначной логики Лукасевича, однако она имеет локальные черты фактор-семантики, поскольку при определении связки $\to^{\mathfrak{K}}$ потребовалось использовать отношение R соответствующей конечнозначной фактор-матрицы $\mathfrak{N}^{\mathbf{L}}_{i+1}$. Такая семантика может быть названа *локальной фактор-семантикой.*

Отметим, что взятие сумм весов конечных TF-последовательностей легко распространяется и на соответствующее подмножество элементов матрицы $\bigotimes_1^\infty \mathfrak{N}^{\mathbf{L}}_{i+1}$. А именно, назовем *весом* W' компонента $[\alpha_j]$ в элементе $< [\alpha_1], ..., [\alpha_j], ... >$ матрицы $\bigotimes_1^\infty \mathfrak{N}^{\mathbf{L}}_{i+1}$ значение $W(< a_1, ..., a_j >)$ при каком-нибудь $< a_1, ..., a_j >$ из $[\alpha_j]$.

Определим теперь множество

$$B' \subset \{< [\alpha_1], [\alpha_2], ... >: [\alpha_i] \in B^i / \cong\},$$

что всякая последовательность $< [\alpha_1], [\alpha_2], ... >$ из $\bigotimes_1^\infty \mathfrak{N}^{\mathbf{L}}_{i+1}$ содержится в B', если и только если $\Sigma_1^\infty W'([\alpha_j])$ есть рациональное число из интервала $[0; 1]$.

Тогда $< [\alpha_1], [\alpha_2], ... > \cong < [\beta_1], [\beta_2], ... >$, если и только если:

$$\Sigma_1^\infty W'([\alpha_i]) = \Sigma_1^\infty W'([\beta_j]),$$

где i и j пробегают по всем индексам компонентов $< [\alpha_1], [\alpha_2], ... >$ и $< [\beta_1], [\beta_2], ... >$, соответственно.

Рассмотрим матрицу

$$\mathfrak{K}' = \left\langle B' / \cong, \neg^{\mathfrak{K}'}, \to^{\mathfrak{K}'}, \{[< [T], [FF], [FFF], ... >]\} \right\rangle,$$

где $B' / \cong$ есть результат разбиения множества B' по отношению эквивалентности $\cong$, а $[< [T], [FF], [FFF], ... >]$ есть класс последовательностей из B', эквивалентных последовательности, все компоненты которой, за исключением первого, содержат лишь вхождения F, а первый компонент есть $[T]$, то есть класс таких последовательностей $< [\alpha_1], [\alpha_2], ... >$, что $\Sigma_1^\infty W'([\alpha_i]) = 1$.

Связки $\neg^{\mathfrak{K}'}$ и $\to^{\mathfrak{K}'}$ определяются следующим образом:

- $\neg^{\mathfrak{K}'}([< [\alpha_1], [\alpha_2], ... >]) = [< [\alpha'_1], [\alpha'_2], ..., [\neg^+ \alpha'_j], ... >]$, где правая часть равенства означает класс последовательностей, эквивалентных последовательности, в которой все компоненты

$$[\alpha'_1], [\alpha'_2], ..., [\alpha'_{j-1}], [\alpha'_{j+1}], ...$$

содержат лишь вхождения F, а $[\alpha'_j]$ таково, что $W'([\alpha'_j]) = \Sigma_1^\infty W'([\alpha_i])$, где i пробегает по всем индексам компонентов последовательности $< [\alpha_1], [\alpha_2], ... >$.

-
$$[< [\alpha_1], [\alpha_2], ... >] \to^{\mathfrak{K}'} [< [\beta_1], [\beta_2], ... >] =$$
$$[< [\alpha^*_1], [\alpha^*_2], ..., [\alpha^*_j \supset^+ \beta^*_j], ... >],$$

  где правая часть равенства означает класс последовательностей, эквивалентных последовательности, в которой все компоненты

$$[\alpha^*_1], [\alpha^*_2], ..., [\alpha^*_{j-1}], [\alpha^*_{j+1}], ...$$

  содержат только вхождения F, а $[\alpha^*_j]$ и $[\beta^*_j]$ таковы, что $W'([\alpha^*_j]) = \Sigma_1^\infty W'([\alpha_i])$, $W'([\beta^*_j]) = \Sigma_1^\infty W'([\beta_i])$, где i пробегает по всем индексам компонентов последовательностей $< [\alpha_1], [\alpha_2], ... >$ и $< [\beta_1], [\beta_2], ... >$, соответственно; а также в фактор-матрице $\mathfrak{N}^{\text{Ł}}_{j+1}$ соответствующей конечнозначной логики Лукасевича выполняется $R(\alpha^*_j, \beta^*_j)$.

Матрица $\mathfrak{K}'$ также изоморфна матрице $\mathfrak{M}^{\text{Ł}}_\infty$ с рациональнозначным множеством-носителем. Докажем соответствующую теорему.

Теорема 2. *Матрица $\mathfrak{K}'$ изоморфна матрице* $\mathfrak{M}^{\text{Ł}}_\infty = \langle [0;1], \sim, \to, \{1\} \rangle$, *где* $[0;1] \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

Доказательство. Определим отображение $\varphi : B'/\cong \mapsto [0;1]$, что для всякого $[< [\alpha_1], [\alpha_2] >, ...]$ в $B'/\cong$ выполняется:

$$\varphi([< [\alpha_1], [\alpha_2], ... >]) = \Sigma_1^\infty W'([\alpha_i]),$$

где i пробегает по всем индексам соответствующих «внутренних» классов эквивалентности из $[\alpha_1], [\alpha_2], ...$

Данное отображение в силу определения множества $B'/\cong$ является взаимнооднозначным. Покажем теперь, что изоморфизм имеет место, то есть выполняются два равенства:

- $\varphi(\neg^{\mathfrak{K}'}([<[\alpha_1],[\alpha_2],...>])) =\sim \varphi([<[\alpha_1],[\alpha_2],...>]);$
- $\varphi([<[\alpha_1],[\alpha_2],...>] \to^{\mathfrak{K}'} [<[\beta_1],[\beta_2],...>]) =$

$$\varphi([<[\alpha_1],[\alpha_2],...>]) \to \varphi([<[\beta_1],[\beta_2],...>]).$$

Рассмотрим первое из этих двух равенств. Верно следующее:

$$\neg^{\mathfrak{K}'}([<[\alpha_1],[\alpha_2],...>]) = [<[\alpha'_1],[\alpha'_2],...,[\neg^+\alpha'_j],...>],$$

где стоящее справа выражение удовлетворяет условиям определения $\neg^{\mathfrak{K}'}$.

Тогда:

$$\varphi([<[\alpha'_1],[\alpha'_2],...,[\neg^+\alpha'_j],...>]) =$$

$$W'([\neg^+\alpha'_j]) = 1 - W'([\alpha'_j]) = 1 - \Sigma_1^\infty W'([\alpha_i]) =$$

$$1 - \varphi([<[\alpha_1],[\alpha_2],...>]) =\sim \varphi([<[\alpha_1],[\alpha_2],...>]).$$

Что и дает искомое доказательство первого равенства.

Рассмотрим второе равенство. Выберем для доказательства классы эквивалентности $[\alpha_j^*]$ и $[\beta_j^*]$, удовлетворяющие условиям из определения связки $\to^{\mathfrak{K}'}$ в $\mathfrak{K}'$. Такие классы существуют в силу определений матриц $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{N}_{j+1}^{\mathbf{L}}$ и того, что два любых рациональных числа могут быть представлены в виде дробей с общим знаменателем.

Возможны два случая.

1. $W([\alpha_j^*]) \leq W([\beta_j^*])$. В этом случае очевидно, что правая часть второго равенства есть 1. Далее:

$$\varphi([<[\alpha_1],[\alpha_2],...>] \to^{\mathfrak{K}'} [<[\beta_1],[\beta_2],...>]) =$$

$$W([\alpha_j^* \supset^+ \beta_j^*]) = 1,$$

   что дает искомое доказательство данного случая.

2. $W([\alpha_j^*]) > W([\beta_j^*])$. Тогда правая часть второго равенства в силу определения φ и $\to$ есть $1-W([\alpha_j^*])+W([\beta_j^*])$. Левая же часть второго равенства есть в этом случае:

$$\frac{j-\eta(\alpha_j^*)+\eta(\beta_j^*)}{j} = 1-W([\alpha_j^*])+W([\beta_j^*]),$$

что завершает доказательство теоремы.

□

Полученная матрица $\mathfrak{K}'$ также имеет локальные черты фактор-семантики и может рассматриваться в качестве *локальной фактор-семантики* для $Ł_\infty$. Более того, процедуру построения матрицы $\mathfrak{K}'$ можно рассматривать в качестве особой операции над логическими матрицами, которая может быть применена и к более широкому классу логик.

Отношение изоморфизма логических матриц обладает следующим свойством:

$$\mathfrak{M}_1 \equiv \mathfrak{N} \,\&\, \mathfrak{M}_2 \equiv \mathfrak{N} \Rightarrow \mathfrak{M}_1 \equiv \mathfrak{M}_2.$$

Поэтому теоремы 1 и 2 позволяют вывести следствие.

Следствие 1. Матрица $\mathfrak{K}$ изоморфна матрице $\mathfrak{K}'$.

Доказательство. Доказательство непосредственно следует из теорем 1 и 2 и вышеприведенного свойства отношения изоморфизма логических матриц. □

Возвращаясь к поставленным в начале статьи вопросам, можно заключить, что бесконечнозначные логики, совпадающие по классу тавтологий с пересечением классов тавтологий некоторой бесконечной последовательности конечнозначных логик, каждая из которых имеет фактор-семантику, могут иметь «локальные фактор-семантики», построенные с использованием процедур, аналогичных рассмотренным в теоремах 1 и 2. Причем, результирующие матрицы будут изоморфны исходным бесконечнозначным логическим матрицам.

Литература

[1] *Карпенко А.С.* Развитие многозначной логики. М.: Издательство ЛКИ, 2010.

[2] *Карпенко А.С.* Логики Лукасевича и простые числа. М.: Наука, 2000.

[3] *Karpenko A.S.* Factor-Semantics for n-valued Logics // Studia Logica. 42(2/3). 1983. P. 179–185.

[4] *Rescher N.* Many-Valued Logic. New York: McGraw Hill, 1969.

References (transliteration)

[1] *Karpenko A.S.* Razvitie mnogoznachnoj logiki. M.: Izdatel'stvo LKI, 2010.

[2] *Karpenko A.S.* Logiki Lukasevicha i prostye chisla. M.: Nauka, 2000.

[3] *Karpenko A.S.* Factor-Semantics for n-valued Logics // Studia Logica. 42(2/3). 1983. P. 179–185.

[4] *Rescher N.* Many-Valued Logic. New York: McGraw Hill, 1969.