Погружение классической пропозициональной логики в паралогики, родственные логике Par[1]

В. М. Попов

ABSTRACT. The work is carried out in the line with a study of connections between classical logic, on one hand, and non-classical logics, on the other hand. In the paper an effectively computable mapping is constructed that embeds classical propositional logic into any paralogic, which includes logic Par from [2] and has the same language with Par.

Keywords: classical propositional logic, paraconsistent logic, paracomplete logic, embedding map

Работа выполнена в русле изучения связей между классическими логиками, с одной стороны, и неклассическими логиками, с другой стороны. В статье построено эффективно вычислимое отображение, погружающее классическую пропозициональную логику в любую паралогику, которая включает логику Par из [2] и имеет с Par один и тот же язык.

Язык L всех рассматриваемых здесь логик есть стандартный пропозициональный язык, алфавиту которого принадлежат все следующие символы и только они: $\&$, $\vee$, $\supset$ (бинарные логические связки языка L), $\neg$ (унарная логическая связка языка L),) и ((технические символы языка L), $p_1, p_2, p_3, \ldots$ (пропозициональные переменные языка L). Допускаем применение обычных соглашений об опускании скобок в формулах языка L и используем «формула» вместо «формула языка L».

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №13-06-00147а.

Буквами A, B, C, и D обозначаем формулы. Логикой называем непустое множество формул, замкнутое относительно правила подстановки в L и правила модус поненс в L. Следуя [1] и [3], определим исчисления L_4, HPar, HPContPComp, HPCont и HPComp гильбертовского типа, которые являются аксиоматизациями интересующих нас логик. Язык всех этих исчислений есть L. Множество всех аксиом исчисления L_4 есть, согласно [1], множество всех тех и только тех формул, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих десяти видов: (1) $A \supset (B \supset A)$, (2) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$, (3) $(A\&B) \supset A$, (4) $(A\&B) \supset B$, (5) $A \supset (B \supset (A\&B))$, (6) $A \supset (A \vee B)$, (7) $A \supset (B \vee A)$, (8) $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$, (9) $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$, (10) $\neg\neg A \supset A$.

Множество всех аксиом исчисления HPar есть, согласно [3], множество всех тех и только тех формул, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих восемнадцати видов: (I) $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$, (II) $A \supset (A \vee B)$, (III) $A \supset (B \vee A)$, (IV) $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$, (V) $(A\&B) \supset A$, (VI) $(A\&B) \supset B$, (VII) $(C \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset (A\&B)))$, (VIII) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A\&B) \supset C)$, (IX) $((A\&B) \supset C) \supset (A \supset (B \supset C))$, (X) $((A \supset B) \supset A) \supset A$, (XI) $\neg(A \vee B) \supset (\neg A\&\neg B)$, (XII) $(\neg A\&\neg B) \supset \neg(A \vee B)$, (XIII) $\neg(A\&B) \supset (\neg A \vee \neg B)$, (XIV) $(\neg A \vee \neg B) \supset \neg(A\&B)$, (XV) $\neg(A \supset B) \supset (\neg A\&B)$, (XVI) $(\neg A\&B) \supset \neg(A \supset B)$, (XVII) $\neg\neg A \supset A$, (XVIII) $A \supset \neg\neg A$. Множество всех аксиом исчисления HPContPComp есть, согласно [3], множество всех тех и только тех формул, каждая из которых имеет хотя бы один из видов (I) – (XVIII) или имеет вид $(A\&\neg A) \supset (B \vee \neg B)$. Множество всех аксиом исчисления HPCont есть, согласно [3], множество всех тех и только тех формул, каждая из которых имеет хотя бы один из видов (I) – (XVIII) или имеет вид $(\mathrm{A} \vee \neg \mathrm{A})$. Множество всех аксиом исчисления HPComp есть, согласно [3], множество всех тех и только тех формул, каждая из которых имеет хотя бы один из видов (I) – (XVIII) или имеет вид $(A\&\neg A) \supset B$. Каждое из исчислений L_4, HPar, HPContPComp, HPCont, HPComp имеет единственное правило вывода — правило модус поненс в L. Для всякого исчисления И из {L_4, HPar, HPContPComp, HPCont, HPComp} обычным для исчислений гильбертовского типа образом строятся доказательства в И (И-доказательства) и стандартно определяются длина И-доказательства и доказуемая в И (И-доказуемая) формула. Из [1] известно, что исчисление L_4 аксиоматизирует множество всех классических тавтологий в языке L. Условимся обозначать это множество через ClP. Следуя [3], определяем Par как множество всех формул, доказуемых в HPar. Аналогично определяем PContPComp, PCont и PComp. Термины «паранепротиворечивая логика» и «параполная логика» далее используем в соответствии с их определениями, данными в [3]. Справедливы (см. [3]) следующие утверждения: (а) Par и PContPComp — различные логики, каждая из которых паранепротиворечива и параполна, (б) PCont есть паранепротиворечивая, но не параполная логика, (в) PComp есть параполная, но не паранепротиворечивая логика, (г) ClP есть логика, не являющаяся ни паранепротиворечивой логикой, ни параполной логикой, при этом всякая логика из {Par, PContPComp, PCont, PComp} включается в ClP. Множество ClP принято называть классической пропозициональной логикой в языке L. Таким образом, L_4 аксиоматизирует классическую пропозициональную логику в языке L. В свете утверждений (а), (б), (в) и (г) ясно, что Par, PContPComp, PCont и PComp являются паралогиками, а ClP не является (паралогикой называется логика, которая паранепротиворечива или параполна). Очевидно также, что все упомянутые паралогики включают Par. Но тогда, принимая во внимание, что логический интервал между Par и множеством всех формул равен (см. [3]) множеству {PContPComp, PCont, PComp, ClP}, получаем, что Par, PContPComp, PCont и PComp — это **все** паралогики, язык каждой из которых есть L и каждая из которых включает логику Par. Следует заметить, что логика PCont исследовалась Д. Батенсом в [7] и Л.И. Розоноэром в [4] и [5], а логика PComp (логика LPF по терминологии, используемой в [6]) исследовалась А. Авроном в [6].

Можно доказать, что существует единственное отображение f множества всех формул в себя, удовлетворяющее следующим условиям: (а) для всякой пропозициональной переменной q языка L $f(q) = (q \supset \neg(p_1 \supset p_1)) \supset \neg(p_1 \supset p_1)$, (b) для всяких формул F_1 и F_2 и всякой бинарной логической связки $*$ языка L $f(F_1 * F_2) = ((f(F_1) * f(F_2)) \supset \neg(p_1 \supset p_1)) \supset \neg(p_1 \supset p_1)$, (c) для всякой формулы F $f(\neg F) = f(F) \supset \neg(p_1 \supset p_1)$. Обозначаем это отображение через Ψ.

Очевидна следующая лемма 1.

Лемма 1. *Для всякой формулы F существует такая формула Q, что $\Psi(F)$ есть $Q \supset \neg(p_1 \supset p_1)$.*

Лемма 2. *В исчислении HPar доказуема всякая формула, имеющая хотя бы один из следующих одиннадцати видов:*

B1 $((A \supset (((B \supset A) \supset D) \supset D)) \supset D) \supset D$,

B2 $(((((A \supset (((B \supset (C \supset D)) \supset D) \supset D)) \supset D) \supset D) \supset ((((((A \supset B) \supset D) \supset D) \supset (((A \supset (C \supset D)) \supset D) \supset D)) \supset D) \supset D)) \supset D) \supset D$,

B3 $((((((A \supset D)\&B) \supset D) \supset D) \supset (A \supset D)) \supset D) \supset D$,

B4 $(((((A\&(B \supset D)) \supset D) \supset D) \supset (B \supset D)) \supset D) \supset D$,

B5 $((A \supset (((B \supset (((A\&B) \supset D) \supset D)) \supset D) \supset D)) \supset D) \supset D$,

B6 $((A \supset (((A \vee B) \supset D) \supset D)) \supset D) \supset D$,

B7 $((B \supset (((A \vee B) \supset D) \supset D)) \supset D) \supset D$,

B8 $(((((A \supset (C \supset D)) \supset D) \supset D) \supset ((((((B \supset (C \supset D)) \supset D) \supset D) \supset ((((((A \vee B) \supset D) \supset D) \supset (C \supset D)) \supset D) \supset D)) \supset D) \supset D)) \supset D) \supset D$,

B9 $(((((A \supset B) \supset D) \supset D) \supset ((((((A \supset (B \supset D)) \supset D) \supset D) \supset (A \supset D)) \supset D) \supset D)) \supset D) \supset D$,

B10 $(((((A \supset D) \supset D) \supset D) \supset (A \supset D)) \supset D) \supset D$,

B11 $(((A \supset (B \supset D)) \supset D) \supset D) \supset (A \supset (B \supset D))$.

Трудоемкое, но рутинное доказательство леммы 2 здесь не приводим.

Лемма 3. *Если F есть аксиома исчисления L_4, то $\Psi(F)$ есть HPar-доказуемая формула.*

Докажем лемму 3.

В свете определения исчисления L_4 ясно, что для доказательства леммы 3 достаточно доказать следующие утверждения (Л3.1) – (Л3.10).

Л3.1 Для всяких формул F_1 и F_2 $\Psi(F_1 \supset (F_2 \supset F_1))$ есть HPar-доказуемая формула.

Л3.2 Для всяких формул F_1, F_2 и F_3 $\Psi((F_1 \supset (F_2 \supset F_3)) \supset ((F_1 \supset F_2) \supset (F_1 \supset F_3)))$ есть HPar-доказуемая формула.

Л3.3 Для всяких формул F_1 и F_2 $\Psi((F_1 \& F_2) \supset F_1)$ есть HPar-доказуемая формула.

Л3.4 Для всяких формул F_1 и F_2 $\Psi((F_1 \& F_2) \supset F_2)$ есть HPar-доказуемая формула.

Л3.5 Для всяких формул F_1 и F_2 $\Psi(F_1 \supset (F_2 \supset (F_1 \& F_2)))$ есть HPar-доказуемая формула.

Л3.6 Для всяких формул F_1 и F_2 $\Psi(F_1 \supset (F_1 \vee F_2))$ есть HPar-доказуемая формула.

Л3.7 Для всяких формул F_1 и F_2 $\Psi(F_1 \supset (F_2 \vee F_1))$ есть HPar-доказуемая формула.

Л3.8 Для всяких формул F_1, F_2 и F_3 $\Psi((F_1 \supset F_3) \supset ((F_2 \supset F_3) \supset ((F_1 \vee F_2) \supset F_3)))$ есть HPar-доказуемая формула.

Л3.9 Для всяких формул F_1 и F_2 $\Psi((F_1 \supset F_2) \supset ((F_1 \supset \neg F_2) \supset \neg F_1))$ есть HPar-доказуемая формула.

Л3.10 Для всяких формул F_1 и F_2 $\Psi(\neg\neg F_1 \supset F_1)$ есть HPar-доказуемая формула.

Начнем с доказательства утверждения Л3.1. Допустим, что (Л3.1.1) $F_1^{'}$ и $F_2^{'}$ являются формулами. Очевидно, что верны утверждения (Л3.1.2), (Л3.1.3) и (Л3.1.4). (Л3.1.2) $\Psi((F_1^{'} \& F_2^{'}) \supset$

F_1') есть формула. (Л3.1.3) $\Psi(F_1')$, $\Psi(F_2')$ и $\neg(p_1 \supset p_1)$ являются формулами. (Л3.1.4) $\Psi((F_1' \& F_2') \supset F_1')$ есть $(\Psi(F_1') \supset (((\Psi(F_2') \supset \Psi(F_1')) \supset \neg(p_1 \supset p_1)) \supset \neg(p_1 \supset p_1)) \supset \neg(p_1 \supset p_1)$. Из утверждений (Л3.1.2), (Л3.1.3) и (Л3.1.4) вытекает утверждение (Л3.1.5). (Л3.1.5) $\Psi((F_1' \& F_2') \supset F_1')$ есть формула, имеющая вид (B1) $((A \supset (((B \supset A) \supset D) \supset D)) \supset D) \supset D$. Из утверждения (Л3.1.5) и леммы 2 вытекает, что $\Psi((F_1' \& F_2') \supset F_1')$ есть HPar-доказуемая формула. Снимая допущение (Л3.1.1) и обобщая, получаем, что для всяких формул F_1 и F_2 $\Psi((F_1 \& F_2) \supset F_1)$ есть HPar-доказуемая формула.

Утверждение (Л3.1) доказано.

Аналогично доказываются утверждения (Л3.5), (Л3.6), (Л3.7) и (Л3.9) (при доказательстве утверждения (Л3.5) опираемся на то, что $\Psi((F_1' \& F_2') \supset F_1')$, где F_1' и F_2' — формулы, является формулой вида (B5) $((A \supset (((B \supset (((A \& B) \supset D) \supset D)) \supset D) \supset D)) \supset D) \supset D$; при доказательстве утверждения (Л3.6) опираемся на то, что $\Psi(F_1' \supset (F_1' \vee F_2'))$, где F_1' и F_2' — формулы, является формулой вида (B6) $((A \supset (((A \vee B) \supset D) \supset D)) \supset D) \supset D$; при доказательстве утверждения (Л3.7) опираемся на то, что $\Psi(F_1' \supset (F_2' \vee F_1'))$, где F_1' и F_2' — формулы, является формулой вида (B7) $((B \supset (((A \vee B) \supset D) \supset D)) \supset D) \supset D$; при доказательстве утверждения (Л3.9) опираемся на то, что $\Psi((F_1' \supset F_2') \supset ((F_1' \supset \neg F_2') \supset \neg F_1'))$, где F_1' и F_2' — формулы, является формулой вида (B9) $(((((A \supset B) \supset D) \supset D) \supset ((((((A \supset (B \supset D)) \supset D) \supset D) \supset (A \supset D)) \supset D) \supset D)) \supset D) \supset D)$.

Докажем утверждение (Л3.2).

Допустим, что (Л3.2.1) F_1', F_2' и F_3' являются формулами. Очевидно, что верны утверждения (Л3.2.2), (Л3.2.3) и (Л3.2.4). (Л3.2.2) $\Psi((F_1' \supset (F_2' \supset F_3')) \supset ((F_1' \supset F_2') \supset (F_1' \supset F_3')))$ есть формула. (Л3.2.3) $\Psi(F_1')$, $\Psi(F_2')$ и $\Psi(F_3')$ и $\neg(p_1 \supset p_1)$ являются формулами. (Л3.2.4) $\Psi((F_1' \supset (F_2' \supset F_3')) \supset ((F_1' \supset F_2') \supset (F_1' \supset F_3')))$ есть $(((((\Psi(F_1') \supset ((\Psi(F_2') \supset (F_3')) \supset \neg(p_1 \supset p_1)) \supset \neg(p_1 \supset p_1))) \supset \neg(p_1 \supset p_1)) \supset \neg(p_1 \supset p_1)) \supset ((((((\Psi(F_1') \supset \Psi(F_2')) \supset \neg(p_1 \supset p_1)) \supset \neg(p_1 \supset p_1)) \supset (((\Psi(F_1') \supset \Psi(F_3')) \supset \neg(p_1 \supset p_1)) \supset \neg(p_1 \supset p_1))) \supset \neg(p_1 \supset p_1)) \supset \neg(p_1 \supset p_1))) \supset \neg(p_1 \supset p_1)) \supset \neg(p_1 \supset p_1)$. Из утверждения (Л3.2.1) и леммы 1 вытекает утверждение (Л3.2.5). (Л3.2.5) Существует такая формула Q, что $\Psi(F_3^{'})$ есть $Q \supset \neg(p_1 \supset p_1)$. Пусть (Л3.2.6) $Q^{'}$ есть формула и $\Psi(F_3^{'})$ есть $Q^{'} \supset \neg(p_1 \supset p_1)$. Из утверждений (Л3.2.4) и (Л3.2.6) вытекает утверждение (Л3.2.7). (Л3.2.7) $\Psi((F_1^{'} \supset (F_2^{'} \supset F_3^{'})) \supset ((F_1^{'} \supset F_2^{'}) \supset (F_1^{'} \supset F_3^{'})))$ есть $(((((\Psi(F_1^{'}) \supset ((\Psi(F_2^{'}) \supset (Q^{'} \supset \neg(p_1 \supset p_1))) \supset \neg(p_1 \supset p_1)) \supset \neg(p_1 \supset p_1))) \supset \neg(p_1 \supset p_1)) \supset \neg(p_1 \supset p_1)) \supset ((((((\Psi(F_1^{'}) \supset \Psi(F_2^{'})) \supset \neg(p_1 \supset p_1)) \supset \neg(p_1 \supset p_1)) \supset (((\Psi(F_1^{'}) \supset (Q^{'} \supset \neg(p_1 \supset p_1))) \supset \neg(p_1 \supset p_1)) \supset \neg(p_1 \supset p_1))) \supset (p_1 \supset p_1)) \supset \neg(p_1 \supset p_1))) \supset \neg(p_1 \supset p_1)) \supset \neg(p_1 \supset p_1)$. Следствием утверждений (Л3.2.2), (Л3.2.3), (Л3.2.6) и (Л3.2.7) является утверждение (Л3.2.8). (Л3.2.8) $\Psi((F_1^{'} \supset (F_2^{'} \supset F_3^{'})) \supset ((F_1^{'} \supset F_2^{'}) \supset (F_1^{'} \supset F_3^{'})))$ есть формула, имеющая вид (B2) $(((((A \supset (((B \supset (C \supset D)) \supset D) \supset D)) \supset D) \supset D) \supset ((((((A \supset B) \supset D) \supset D) \supset (((A \supset (C \supset D)) \supset D) \supset D)) \supset D) \supset D)) \supset D) \supset D$. Из утверждения (Л3.2.8) и леммы 2 вытекает, что $\Psi((F_1^{'} \supset (F_2^{'} \supset F_3^{'})) \supset ((F_1^{'} \supset F_2^{'}) \supset (F_1^{'} \supset F_3^{'})))$ есть HPar-доказуемая формула. Снимая допущение (Л3.2.1) и обобщая, получаем, что для всяких формул F_1, F_2 и F_3 $\Psi((F_1 \supset (F_2 \supset F_3)) \supset ((F_1 \supset F_2) \supset (F_1 \supset F_3)))$ есть HPar-доказуемая формула.

Утверждение (Л3.2) доказано.

Аналогично доказываются утверждения (Л3.3), (Л3.4), (Л3.8) и (Л3.10) (при доказательстве утверждения (Л3.3) опираемся на то, что $\Psi((F_1^{'} \& F_2^{'}) \supset F_1^{'})$, где $F_1^{'}$ и $F_2^{'}$ — формулы, является формулой вида (B3) $((((((A \supset D) \& B) \supset D) \supset D) \supset (A \supset D)) \supset D) \supset D$ (используем то, что $\Psi(F_1^{'})$ есть $Q \supset \neg(p_1 \supset p_1)$ для некоторой формулы Q); при доказательстве утверждения (Л3.4) опираемся на то, что $\Psi((F_1^{'} \& F_2^{'}) \supset F_2^{'})$, где $F_1^{'}$ и $F_2^{'}$ — формулы, является формулой вида (B4) $(((((A \& (B \supset D)) \supset D) \supset D) \supset (B \supset D)) \supset D) \supset D$ (используем то, что $\Psi(F_2^{'})$ есть $Q \supset \neg(p_1 \supset p_1)$ для некоторой формулы Q); при доказательстве утверждения (Л3.8) опираемся на то, что $\Psi((F_1^{'} \supset F_3^{'}) \supset ((F_2^{'} \supset F_3^{'}) \supset ((F_1^{'} \vee F_2^{'}) \supset F_3^{'})))$, где $F_1^{'}$, $F_2^{'}$ и $F_3^{'}$ — формулы, является формулой вида (B8) $(((((A \supset (C \supset D)) \supset D) \supset D) \supset ((((((B \supset (C \supset D)) \supset D) \supset D) \supset ((((((A \vee B) \supset D) \supset D) \supset (C \supset D)) \supset D) \supset D)) \supset D) \supset D)) \supset D) \supset D$ (используем то, что $\Psi(F_3^{'})$ есть $Q \supset \neg(p_1 \supset p_1)$ для некоторой формулы Q); при доказательстве утверждения (Л3.10) опираемся на то, что $\Psi(\neg\neg F_1' \supset F_1')$, где F_1' — формула, является формулой вида (B10) $(((((A \supset D) \supset D) \supset D) \supset (A \supset D)) \supset D) \supset D$ (используем то, что (F_1') есть $Q \supset \neg(p_1 \supset p_1)$ для некоторой формулы Q)).

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Для всяких формул F и U: если F и $F \supset U$ являются L_4-доказуемыми формулами, то U есть L_4-доказуемая формула.*

Лемма 5. *Для всяких формул F и U: если F и $F \supset U$ являются HPar-доказуемыми формулами, то U есть HPar-доказуемая формула.*

Стереотипные доказательства лемм 4 и 5 здесь не приводим.

Лемма 6. *Для всяких формул F и U: если $\Psi(F)$ и $\Psi(F \supset U)$ являются HPar-доказуемыми формулами, то $\Psi(U)$ есть HPar-доказуемая формула.*

Докажем лемму 6.

Допустим, что (6.1) F' и U' являются формулами. Допустим также, что (6.2) $\Psi(F')$ и $\Psi(F' \supset U')$ являются HPar-доказуемыми формулами. Из (6.1) и леммы 1 вытекает, что (6.3) существует такая формула Q, что $\Psi(U')$ есть $Q \supset \neg(p_1 \supset p_1)$. Пусть (6.4) Q' есть формула и $\Psi(U')$ есть $Q' \supset \neg(p_1 \supset p_1)$. Ясно, что (6.5) $\Psi(F' \supset U')$ есть $((\Psi(F') \supset (U')) \supset \neg(p_1 \supset p_1)) \supset \neg(p_1 \supset p_1)$. Из (6.4) и (6.5) вытекает, что (6.6) $\Psi(F' \supset U')$ есть $((\Psi(F') \supset (Q' \supset \neg(p_1 \supset p_1))) \supset \neg(p_1 \supset p_1)) \supset \neg(p_1 \supset p_1)$. Из (6.2) и (6.5) вытекает, что (6.7) $\Psi(F')$ и $((\Psi(F') \supset (Q' \supset \neg(p_1 \supset p_1))) \supset \neg(p_1 \supset p_1)) \supset \neg(p_1 \supset p_1)$ являются HPar-доказуемыми формулами. Очевидно, что (6.8) $(((\Psi(F') \supset (Q' \supset \neg(p_1 \supset p_1))) \supset \neg(p_1 \supset p_1)) \supset \neg(p_1 \supset p_1)) \supset (\Psi(F') \supset (Q' \supset \neg(p_1 \supset p_1)))$ есть формула вида (B11) $(((A \supset (B \supset D)) \supset D) \supset D) \supset (A \supset (B \supset D))$. Из (6.8) и леммы 2 вытекает, что (6.9) $(((\Psi(F') \supset (Q' \supset \neg(p_1 \supset p_1))) \supset \neg(p_1 \supset p_1)) \supset \neg(p_1 \supset p_1)) \supset (\Psi(F') \supset (Q' \supset \neg(p_1 \supset p_1)))$ есть HPar-доказуемая формула. Используя (6.7), (6.9) и лемму 5, получаем, что (6.10) $Q' \supset \neg(p_1 \supset p_1)$ есть HPar-доказуемая формула. Из (6.4) и (6.10) вытекает, что (6.11) $\Psi(U')$ есть HPar-доказуемая формула. Снимая допущения (6.1) и (6.2) и обобщая, получаем, что для всяких формул F и U: если $\Psi(F)$ и $\Psi(F \supset U)$ являются HPar-доказуемыми формулами, то $\Psi(U)$ есть HPar-доказуемая формула.

Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Для всякой L_4-доказуемой формулы F $\Psi(F)$ есть HPar-доказуемая формула.*

Простое доказательство леммы 7, опирающееся на леммы 3 и 6, здесь не приводим.

Лемма 8. *Для всякого исчисления И из {HPar, HPContPComp, HPCont, HPComp} и для всякой L_4-доказуемой формулы F $\Psi(F)$ есть И-доказуемая формула.*

Лемма 8 следует из леммы 7 и того, что для всякого И из {HPar, HPContPComp, HPCont, HPComp} всякая HPar-доказуемая формула есть И-доказуемая формула.

Лемма 9. *Для всякой формулы F: $F \supset \Psi(F)$ и $\Psi(F) \supset F$ являются L_4-доказуемыми формулами.*

Стереотипное индуктивное (индукцией по построению формулы) доказательство леммы 9 здесь не приводим.

Следствием того, что всякая логика Par, PContPComp, PCont и PComp включается в ClP, определений рассматриваемых логик и лемм 4, 8 и 9 является нижеследующая теорема о погружении.

Теорема. Для всякой логики Л из {Par, PContPComp, PCont, PComp} и для всякой формулы F: $F \in ClP$ тогда и только тогда, когда $\Psi(F) \in$ Л.

Итак, Ψ является отображением, погружающим классическую пропозициональную логику в каждую паралогику, язык которой есть L и в которую включается логика Par.

Литература

[1] *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. Наука, М.: 1971.

[2] *Попов В.М.* Секвенциальные формулировки паранепротиворечивых логических систем //Синтаксические и семантические исследования неэкстенсиональных логик. М.: Наука. 1989. С. 285–289.

[3] *Попов В.М.* Между Par и множеством всех формул // Шестые смирновские чтения по логике. Материалы международной научной конференции 17-19 июня 2009 г., Москва. М., 2009. С. 93–95.

[4] *Розоноэр Л.И.* О выявлении противоречий в формальных теориях. I // Автоматика и телемеханика. №6. 1983. С. 113–124.

[5] *Розоноэр Л.И.* О выявлении противоречий в формальных теориях. II // Автоматика и телемеханика. №7. 1983. С. 97–104.

[6] *Avron A.* Natural 3-valued Logics: Characterization and proof theory // Journal of Symbolic Logic, Vol. 56, 1991. P. 276–294.

[7] *Batens D.* Paraconsistent extensional propositional logic // Logique et Analyse, Vol. 23, 1980. P. 127–139.

References (transliteration)

[1] *Mendelson E.* Vvedenie v matematicheskuju logiku. Nauka, M.: 1971.

[2] *Popov V.M.* Sekvencial'nye formulirovki paraneprotivorechivyh logicheskih sistem //Sintaksicheskie i semanticheskie issledovanija nejekstensional'nyh logik. M.: Nauka. 1989. P. 285–289.

[3] *Popov V.M.* Mezhdu Par i mnozhestvom vseh formul // Shestye smirnovskie chtenija po logike. Materialy mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii 17-19 ijunja 2009 g., Moskva. M., 2009. P. 93–95.

[4] *Rosonoer L.I.* O vyjavlenii protivorechij v formal'nyh teorijah. I // Avtomatika i telemehanika. № 6. 1983. P. 113–124.

[5] *Rosonoer L.I.* O vyjavlenii protivorechij v formal'nyh teorijah. II // Avtomatika i telemehanika. № 7. 1983. P. 97–104.

[6] *Avron A.* Natural 3-valued Logics: Characterization and proof theory // Journal of Symbolic Logic, Vol. 56, 1991. P. 276–294.

[7] *Batens D.* Paraconsistent extensional propositional logic // Logique et Analyse, Vol. 23, 1980. P. 127–139.