Логика функционального следования[1]

В. И. Шалак

abstract. The aim of this paper is formulation of a notion of functional consequence and it's axiomatisation. Problem of completeness is still open.

Keywords: grounds of logic, functional consequence

Ни для кого не секрет, что наше интуитивное понимание и употребление в языке логической связки «если…, то…» отлично от смысла связки материальной импликации. Если бы это было не так, то в силу противоречивости естественного языка мы давно пришли бы к выводу, что Луна сделана из зеленого сыра. Недаром, объясняя студентам, что из ложных посылок в классической логике следует все что угодно, наталкиваешься на непонимание и недоверие. Стремление более точно эксплицировать условную связь и логическое следование привело к построению многих неклассических логик. Из них более всего на слуху релевантные логики. К сожалению, их семантика далека от прозрачности, что дает пищу для справедливой критики.

Помимо отношения релевантности интуитивное понимание условной связи имеет черты причинной или функциональной связи. В настоящей работе мы хотим сформулировать подход к построению логики на основе именно функционального понимания следования.

В первом приближении можно принять, что *из A функционально следует B, если и только если существует функция f, которая позволяет в каждой модели на основании значения формулы A вычислить значение формулы B.*

[1]Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 11-03-00761a.

Мы пока никак не конкретизировали язык и понятие модели, поскольку хотим, чтобы наше будущее определение было максимально общим.

Очевидно, что понятие функционального следования не совпадает с классическим. Если взять язык и семантику классической логики высказываний, то мы сразу получим ряд «парадоксальных» функциональных следований. Например, согласно нашему определению, из A следует $\neg A$, поскольку, если известно истинностное значение формулы A, то значение формулы $\neg A$ определяется однозначно. Это «парадоксально» лишь с точки зрения классической логики, но в обыденном употреблении языка примеры такого следования встречаются на каждом шагу. Если кому-либо сказать, что A — истинно, и спросить о значении $\neg A$, то в ответ мы услышим, что $\neg A$ — ложно. В данном случае речь идет не об утверждении, что имеет место $\neg A$, а лишь о том, что значение $\neg A$ легко вычислить, коль скоро известно значение A. В то же время функциональное понимание следования очевидным образом обладает и рядом полезных свойств, которыми не обладает классическая логика, например, оно блокирует следование $A \wedge \neg A \models B$.

Мы не хотим ограничиваться языком и семантикой классической логики, поскольку она была создана для решения совсем других задач. Вместо этого рассмотрим более абстрактный язык и более абстрактную семантику, которые, при необходимости, могут быть адаптированы для различных частных случаев.

Исходные символы

1. $x, y, z, \ldots \in Var$ — множество переменных языка;
2. $F^i, G^j, H^u, \ldots$ — множество связок языка, где i, j, u — индексы, указывающие на местность связок;
3. $), ($ — скобки.

Формулы

1. Каждая переменная языка есть формула;
2. Если $A_1, \ldots, A_i$ — формулы, а F^i — i-местная связка, то $F^i(A_1, \ldots, A_i)$ — формула;
3. Ничто другое формулой не является.

Модели

Моделью нашего языка будем называть пару $M = < D, I >$, где D — непустое множество, а I — функция интерпретации, сопоставляющая каждой логической связке F^i некоторую операцию $I(F^i) : D \times \ldots^i \times D \to D$.

Оценки

Множеством оценок Val в модели M будем называть множество всех функций из Var в D, т.е. $Val = D^{Var}$.

Значение формулы в модели

Для фиксированной модели $M = < D, I >$ значение формулы A при оценке $v \in Val$ определяется очевидным образом:

1. $|x|_v = v(x)$, если x — переменная;
2. $|F^i(A_1, \ldots, A_i)|_v = I(F^i)(|A_1|_v, \ldots, |A_i|_v)$.

Теперь мы готовы к тому, чтобы строго определить центральное понятие функционального следования $\Gamma \parallel= A$, где Γ — конечное множество формул, а A — формула. Ограничение лишь конечными множествами не является принципиальным и понятие следования может быть легко обобщено на бесконечный случай.

Из множества формул $\Gamma = \{B_1, \ldots, B_n\}$ ***функционально следует*** *формула A, если и только если для каждой модели M существует такая функция f, что для всякой оценки $v \in Val$ имеет место $|A|_v = f(|B_1|_v, \ldots, |B_n|_v)$.*

$$\{B_1, \ldots, B_n\} \parallel= A \;\Leftrightarrow\; \forall M \exists f \forall v (|A|_v = f(|B_1|_v, \ldots, |B_n|_v))$$

Легко проверить, что определенное нами отношение функционального следования удовлетворяет известным условиям Тарского:

1. Если $A \in \Gamma$, то $\Gamma \parallel= A$;
2. Если $\Gamma \parallel= A$ и $\Gamma \subseteq \Delta$, то $\Delta \parallel= A$;
3. Если $\Gamma \parallel= B$ и $\Gamma \cup \{B\} \parallel= A$, то $\Gamma \parallel= A$.

В дополнение к этому отношение функционального следования является структурным, т.е. из $\Gamma \Vert\!= A$ следует $e(\Gamma) \Vert\!= e(A)$, где e — подстановка на множестве формул языка.

Это означает, что определенное нами отношение следования задает логику в смысле Тарского.

Следующим естественным шагом должна стать аксиоматизация отношения функционального следования.

Правдоподобным кандидатом на аксиоматизацию являются следующие две схемы аксиом и одно правило:

$Ax.1$ $\Gamma \cup A \Vdash A$

$Ax.2$ $\Gamma \cup \{A_1, \ldots, A_n\} \Vdash F^n(A_1, \ldots, A_n)$ — для каждой связки F^n языка

Правило: $\Gamma \Vdash B$; $\Gamma \cup \{B\} \Vdash A \Rightarrow \Gamma \Vdash A$

Определенное так отношение $\Vdash$ тривиальным образом разрешимо. Существует простой синтаксический критерий, который позволяет определить, когда $\Gamma \Vdash A$ имеет место, а когда нет. Формулируется он следующим образом. Пусть $Vars(C)$ — множество всех переменных, входящих в формулу C. Тогда $\{B_1, \ldots, B_n\} \Vdash A$, если и только если существует такая формула C, что $Vars(C) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$, и формула A графически равна результату одновременной подстановки $C[B_1/x_1, \ldots, B_n/x_n]$.

Легко проверить, что для отношения $\Vdash$ имеет место теорема о непротиворечивости, т.е. если $\Gamma \Vdash A$, то $\Gamma \Vert\!= A$.

На вопрос о полноте предложенной аксиоматики относительно функционального следования ответить сложнее. Исходя из содержательного понимания следования, есть уверенность, что система полна, но доказать это пока не удается. Для иллюстрации сложностей, с которыми приходится сталкиваться, приведем пример.

Для простоты возьмем язык, в котором есть всего одна двухместная связка.

Пусть есть некоторая формула A. Если теорема о полноте имеет место, то $A \Vert\!= B$, если и только если B графически равна A, или является более сложной формулой, построенной путем одних лишь комбинаций двухместной связки и A. То есть существует такая формула C, что $Vars(C) = \{x\}$, и формула B графически равна C$[A/x]$. Но доказать это не удается.

Можно показать, что отношение $\|=$ обладает многими свойствами, подтверждающими полноту функциональной логики относительно предложенной семантики.

Например, если $A \|= B$, то $Var(A) = Var(B)$, как и должно быть в случае, если формула B графически равна результату некоторой подстановки $C[A/x]$.

Если посредством $Len(A)$ обозначить длину формулы A, т.е. число вхождений в нее различных переменных, то из $A = B$ следует, что $Len(B)$ кратно $Len(A)$, как и должно быть в случае, если формула B графически равна некоторой подстановке $C[A/x]$.

Если длина формулы A равна длине формулы B, то это, в случае полноты логики, может иметь место лишь тогда, когда формула A графически равна формуле B. Но этого доказать не получается.

Можно высказать предположение, что сложности, с которыми пришлось столкнуться, связаны с какими-то фундаментальными свойствами исследуемой проблемной области, хотя нельзя исключить и того, что решение окажется очень простым.

Вопрос о полноте построенного исчисления относительно функционального следования остается открытым.