Интерполяционная теорема для простой паранормальной логики $Int_{0,\omega}$[1]

В. М. Попов

abstract. A proof of interpolation theorem for simple paranormal logic $Int_{0,\omega}$ is proposed.

Keywords: quasi-elementary formula, paranormal logic, interpolation theorem

Предлагается доказательство интерполяционной теоремы для простой паранормальной логики $Int_{0,\omega}$.

Определяем язык L как пропозициональный язык, алфавиту которого принадлежат только $\&, \vee, \supset$ (бинарные логические связки языка L), $\neg$ (унарная логическая связка языка L),), ((технические символы языка L), p_1, p_2, p_3, $\ldots$ (пропозициональные переменные языка L). Принимаем сокращение «пп» для выражения «пропозициональная переменная языка L». Определение L-формулы обычно: (1) всякая пп есть L-формула, (2) если A и B есть L-формулы, то $(A\&B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(\neg A)$ есть L-формулы, (3) ничто другое не есть L-формула. Условимся, что $\mathbf{N}$ есть множество всех целых положительных чисел и для всякой L-формулы A $W(A)$ есть множество всех пп, входящих в A. Квазиэлементарной L-формулой называем L-формулу, в которую не входят ни $\&$, ни $\vee$, ни $\supset$. Очевидно, что для всякой квазиэлементарной L-формулы E число всех вхождений связки $\neg$ в E есть целое неотрицательное число (называем это число длиной квазиэлементарной L-формулы E). Ясно, что для всякой пп p и всякого n из $\mathbf{N}$ существует единственная квазиэлементарная L-формула A, удовлетворяющая условию: p входит в A и число всех вхождений связки $\neg$ в A равно n. Для всякой пп

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №10-06-00224а.

p и всякого n из $\mathbf{N}$ обозначаем через $(\neg^{(n)}p)$ квазиэлементарную L-формулу, в которую входит p и число всех вхождений связки $\neg$ в которую равно n. Следуя [1], определяем исчисления $HInt_{0,0}$ и $HInt_{0,\omega}$ гильбертовского типа. Язык этих исчислений есть L. Множеству всех аксиом исчисления $HInt_{0,0}$ принадлежат все те и только те L-формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих видов (здесь A, B и C — формулы):

(I) $((A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)))$,
(II) $(A \supset (A \vee B))$,
(III) $(B \supset (A \vee B))$,
(IV) $((A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C)))$,
(V) $((A \& B) \supset A)$,
(VI) $((A \& B) \supset B)$,
(VII) $((C \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset (A \& B))))$,
(VIII) $((A \supset (B \supset C)) \supset ((A \& B) \supset C))$,
(IX) $(((A \& B) \supset C) \supset (A \supset (B \supset C)))$,
(X,0) $((\neg B) \supset (B \supset A))$,
(XI,0) $((B \supset (\neg(A \supset A))) \supset (\neg B))$.

Множеству всех аксиом исчисления $HInt_{0,\omega}$ принадлежат все те и только те L-формулы, каждая из которых имеет вид (X,0) $((\neg D) \supset (D \supset A))$ или (XI,ω) $((D \supset (\neg(A \supset A))) \supset (\neg D))$ (где A есть L-формула, а D есть L-формула, не являющаяся квазиэлементарной L-формулой), или имеет хотя бы один из видов (I)–(IX). Правило modus ponens в L является единственным правилом исчисления $HInt_{0,0}$ и единственным правилом исчисления $HInt_{0,\omega}$. Доказательства в $HInt_{0,0}$ ($HInt_{0,0}$-доказательства) и доказательства в $HInt_{0,\omega}$ ($HInt_{0,\omega}$-доказательства) строятся обычным для исчислений гильбертовского типа образом. Стандартно определяются длина $HInt_{0,0}$-доказательства, длина $HInt_{0,\omega}$-доказательства, $HInt_{0,0}$-доказуемая L-формула и $HInt_{0,\omega}$-доказуемая L-формула. Для всякой L-формулы A запись «$HInt_{0,0} \vdash A$» означает, что A есть $HInt_{0,0}$-доказуемая L-формула, а запись «$HInt_{0,\omega} \vdash A$» — что A есть $HInt_{0,\omega}$-доказуемая L-формула. Обозначаем множество всех $HInt_{0,0}$-доказуемых L-формул через $Int_{0,0}$, а множество всех $HInt_{0,\omega}$-доказуемых L-формул — через $Int_{0,\omega}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно доказать, что (**1**) $Int_{0,0}$ и $Int_{0,\omega}$ являются логиками в L (в смысле [1]), то есть являются непустыми множествами L-формул, каждое из которых замкнуто относительно modus ponens в L и относительно подстановки L-формулы в L-формулу вместо пп, и (**2**) $Int_{0,\omega}$ строго включается в $Int_{0,0}$. При этом, согласно [1]: (**а**) $Int_{0,0}$ равно множеству всех интуиционистских тавтологий в языке L, то есть $Int_{0,0}$ является интуиционистской логикой в языке L, (**б**) $Int_{0,\omega}$ есть простая паранормальная логика.

Интерполяционная теорема (первоначально доказанная в [4] для классической логики предикатов) доказана в [3] для интуиционистской логики предикатов. С помощью интерполяционной теоремы для интуиционистской логики предикатов можно обосновать следующую интерполяционную теорему для интуиционистской логики в языке L (то есть для $Int_{0,0}$).

Для всяких L-формул A и B: если $(A \supset B)$ есть интуиционистская тавтология в языке L и $W(A) \cap W(B) \neq \oslash$, то существует такая L-формула C, что $(A \supset C)$ и $(C \supset B)$ являются интуиционистскими тавтологиями в языке L и $W(C) \subseteq W(A) \cap W(B)$.

Цель предлагаемой работы — доказательство интерполяционной теоремы для $Int_{0,\omega}$.

ТЕОРЕМА (Интерполяционная теорема для $Int_{0,\omega}$). *Для всяких L-формул A и B: если $(A \supset B) \in Int_{0,\omega}$ и $W(A) \cap W(B) \neq \varnothing$, то существует такая L-формула C, что $(A \supset C) \in Int_{0,\omega}$, $(C \supset B) \in Int_{0,\omega}$ и $W(C) \subseteq W(A) \cap W(B)$.*

Доказательство. В предлагаемом здесь доказательстве интерполяционной теоремы для $Int_{0,\omega}$ использованы нижеследующие леммы (0)–(12).

Условимся, что для всякого n из $\mathbf{N}$, для всяких попарно различных пп $q_1,\ldots,q_n$ и всяких A, $B_1,\ldots,B_n$, являющихся L-формулами, $[q_1 \ldots q_n/B_1 \ldots B_n](A)$ обозначает результат одновременной подстановки L-формул $B_1,\ldots,B_n$ в L-формулу A вместо пп $q_1,\ldots,q_n$ соответственно.

ЛЕММА 0. *Для всякого n из $\mathbf{N}$, для всяких попарно различных пп $q_1,\ldots,q_n$ и для всяких L-формул A, $B_1,\ldots,B_n$: если $HInt_{0,\omega} \vdash A$, то $HInt_{0,\omega} \vdash [q_1 \ldots q_n/B_1 \ldots B_n](A)$.*

Лемма 0 доказана индукцией по длине $HInt_{0,\omega}$-доказательства.

Доказана также следующая лемма 1.

ЛЕММА 1. *Существует единственное отображение ψ множества всех L-формул в себя, удовлетворяющее условиям: (1) для всякой пп q верно, что $\psi(q) = q$, (2) для всякой пп q верно, что $\psi((\neg q)) = (\neg(q\&q))$, (3) для всякой L-формулы A, не являющейся пп, верно, что $\psi((\neg A)) = (\neg\psi(A))$, (4) для всяких L-формул A и B и для всякой бинарной логической связки $\bullet$ языка L верно, что $\psi((A \bullet B)) = (\psi(A) \bullet \psi(B))$.*

Отображение, существование и единственность которого утверждается в лемме 1, обозначаем через dub. Опираясь на лемму 1, можно доказать (индукцией по длине $HInt_{0,0}$-доказательства) лемму 2.

ЛЕММА 2. *Для всякой L-формулы A: если $HInt_{0,0} \vdash A$, то $HInt_{0,\omega} \vdash dub(A)$.*

Определение: негативно-регулярной L-формулой называем такую L-формулу A, в которую не входит ни одна L-формула вида $(\neg q)$, где q есть пп.

ЛЕММА 3. *Для всякой негативно-регулярной L-формулы A верно, что $dub(A) = A$.*

Лемма 3 доказана индукцией по построению L-формулы.

ЛЕММА 4. *Для всякой L-формулы A верно, что $W(dub(A)) = W(A)$.*

Лемма 4 доказана индукцией по построению L-формулы.

Доказана также следующая лемма 5.

ЛЕММА 5. *Пусть F есть L-формула, $n \in \boldsymbol{N}$, $q_1,\ldots,q_n$ есть попарно различные пп, $W(F) = \{q_1, \ldots, q_n\}$, k есть наибольшее целое положительное число в $\{u|u \in \boldsymbol{N}$ и существует такая пп q, что $(\neg^{(u)}q)$ входит в $F\}$, и $r_1^1, \ldots, r_1^k, \ldots, r_n^1, \ldots, r_n^k$ есть попарно различные пп, ни одна из которых не принадлежит множеству $\{q_1, \ldots, q_n\}$. Тогда существует единственное отображение φ множества всех L-формул в себя, удовлетворяющее условиям:*

(a) для всякой пп p верно, что $\varphi(p) = p$,

(b) для всякого m из $\boldsymbol{N}$ и для всякой пп, не принадлежащей множеству $\{q_1, \ldots, q_n\}$, верно, что $\varphi((\neg^{(m)}p)) = (\neg^{(m)}p)$,

(c) *для всякого такого* m *из* $\boldsymbol{N}$, *что* $m > q$, *и для всякого* i *из* $\{1, \ldots, n\}$ *верно, что* $\varphi((\neg^{(m)} q_i)) = (\neg \varphi((\neg^{(m-1)} q_i)))$,

(d) *для всякого такого* m *из* $\boldsymbol{N}$, *что* $m \leq k$, *и для всякого* i *из* $\{1, \ldots, n\}$ *верно что* $\varphi((\neg^{(m)} q_i)) = r_i^m$,

(e) *для всякой* L*-формулы* A, *не являющейся квазиэлементарной* L*-формулой, верно, что* $\varphi((\neg A)) = (\neg \varphi(A))$,

(f) *для всяких* L*-формул* A *и* B *и для всякой бинарной логической связки* $\bullet$ *языка* L *верно, что* $(\varphi(A \bullet B)) = (\varphi(A) \bullet \varphi(B))$.

ЛЕММА 6. *Пусть* F *есть* L*-формула,* $n \in \boldsymbol{N}$, $q_1,\ldots,q_n$ *есть попарно различные пп,* $W(F) = \{q_1, \ldots, q_n\}$, k *есть наибольшее целое положительное число в* $\{u | u \in \boldsymbol{N}$ *и существует такая пп* q, *что* $(\neg^{(u)} q)$ *входит в* $F\}$, $r_1^1, \ldots, r_1^k, \ldots, r_n^1, \ldots, r_n^k$ *есть попарно различные пп, ни одна из которых не принадлежит множеству* $\{q_1, \ldots, q_n\}$, *а* φ *есть отображение множества всех* L*-формул в себя, удовлетворяющее условиям (a)–(f), сформулированным в лемме 5. Тогда для всякой* L*-формулы* A: *если* $HInt_{0,\omega} \vdash A$, *то* $HInt_{0,0} \vdash \varphi(A)$.

Лемма 6 доказана индукцией по длине $HInt_{0,\omega}$-доказательства.

ЛЕММА 7. *В условиях леммы 6 верно, что* $\varphi(A)$ *есть квазиэлементарная* L*-формула для всякой квазиэлементарной* L*-формулы* A.

Доказательство леммы 7, базирующееся на использовании определения отображения φ, тривиально.

ЛЕММА 8. *В условиях леммы 6 верно, что для всякой* L*-формулы* A: *если* $W(A) \subseteq \{q_1, \ldots, q_n\}$ *и длина всякой квазиэлементарной* L*-формулы, входящей в* A, *не больше* k, *то всякая квазиэлементарная* L*-формула, входящая в* $\varphi(A)$, *является пп.*

Лемма 8 доказана индукцией по построению L-формулы.

ЛЕММА 9. *В условиях леммы 6 верно, что для всякой* L*-формулы* A: *если* $W(A) \subseteq \{q_1, \ldots, q_n\}$ *и длина всякой квазиэлементарной* L*-формулы, входящей в* A, *не больше* k, *то* $[r_1^1 \ldots r_1^k \ldots r_n^1 \ldots r_n^k / (\neg^{(1)} q_1) \ldots (\neg^{(k)} q_1) \ldots (\neg^{(1)} q_n) \ldots (\neg^{(k)} q_n)](\varphi(A)) = A$.

Лемма 9 доказана индукцией по построению L-формулы.

ЛЕММА 10. *В условиях леммы 6 верно, что для всякой L-формулы A: если $W(A) \subseteq \{q_1, \ldots, q_n\}$, длина всякой квазиэлементарной L-формулы, входящей в A, не больше k и $HInt_{0,0} \vdash \varphi(A)$, то $HInt_{0,\omega} \vdash A$.*

Лемма 10 доказана с использованием лемм 0, 2, 3, 8 и 9.

ЛЕММА 11. *Для всяких L-формул A и B: если $(A \supset B)$ есть интуиционистская тавтология в языке L и $W(A) \cap W(B) \neq \varnothing$, то существует такая L-формула C, что выполняются следующие условия: (а) $(A \supset C)$ и $(C \supset B)$ являются интуиционистскими тавтологиями в языке L, (б) $W(C) \subseteq W(A) \cap W(B)$, (в) C есть негативно-регулярная L-формула.*

Доказательство леммы 11 проведено с использованием (1) интерполяционной теоремы для интуиционистской логики в языке L (формулировка этой теоремы приведена выше), (2) утверждения о том, что для всякой пп q L-формула $((q \supset (q\&q))\&((q\&q) \supset q))$ является интуиционистской тавтологией в языке L, и (3) следующей теоремы об эквивалентной замене: если A и B есть такие L-формулы, что $((A \supset B)\&(B \supset A))$ есть интуиционистская тавтология в L, то для всякой L-формулы M, в которую входит A, интуиционистской тавтологией в языке L является $((M \supset M')\&(M' \supset M))$, где M' есть результат замены в M некоторых вхождений L-формулы A вхождениями L-формулы B.

ЛЕММА 12. *В условиях леммы 6 верно, что для всякой L-формулы A, входящей в F, $\varphi(A)$ есть негативно-регулярная L-формула.*

Доказательство.

Лемма 12 вытекает из нижеследующих подлеммы 1 и подлеммы 2.

ПОДЛЕММА 1. В условиях леммы 6 верно, что: (1) всякая пп p, входящая в F, такова, что $\varphi(p)$ есть негативно-регулярная L-формула, (2) всякие L-формулы A и B, входящие в F, таковы, что если $\varphi(A)$ и $\varphi(B)$ есть негативно-регулярные L-формулы и $(A\&B)$ входит в F, то $\varphi((A\&B))$ есть негативно-регулярная L-формула, (3) всякие L-формулы A и B, входящие в F, таковы, что если $\varphi(A)$ и $\varphi(B)$ есть негативно-регулярные L-формулы и

$(A \vee B)$ входит в F, то $\varphi((A \vee B))$ есть негативно-регулярная L-формула, (4) всякие L-формулы A и B, входящие в F, таковы, что если $\varphi(A)$ и $\varphi(B)$ есть негативно-регулярные L-формулы и $(A \supset B)$ входит в F, то $\varphi((A \supset B))$ есть негативно-регулярная L-формула, (5) всякая L-формула A, входящая в F, такова, что если $\varphi(A)$ есть негативно-регулярная L-формула и $(\neg A)$ входит в F, то $\varphi((\neg A))$ есть негативно-регулярная L-формула.

ПОДЛЕММА 2. Для всякой L-формулы F и для всякого множества P L-формул: **если (1)** всякая пп, входящая в F, принадлежит P, **(2)** всякие L-формулы A и B, входящие в F, таковы, что если они принадлежат P и $(A\&B)$ входит в F, то $(A\&B) \in P$, **(3)** всякие L-формулы A и B, входящие в F, таковы, что если они принадлежат P и $(A \vee B)$ входит в F, то $(A \vee B) \in P$, **(4)** всякие L-формулы A и B, входящие в F, таковы, что если они принадлежат P и $(A \supset B)$ входит в F, то $(A \supset B) \in P$, и **(5)** всякая L-формула A, входящая в F, такова, что если $A \in P$ и $(\neg A)$ входит в F, **то** $(\neg A) \in P$, то всякая L-формула, входящая в F, принадлежит P.

Q.E.D.

Доказательство интерполяционной теоремы для $Int_{0,\omega}$.

(1) A_0 и B_0 есть L-формулы (допущение).

(2) $(A_0 \supset B_0) \in Int_{0,\omega}$ и $W(A_0) \cap W(B_0) \neq \varnothing$ (допущение). Индукцией по построению L-формулы можно доказать, что

(3) для всякой L-формулы G верно, что $W(G)$ есть непустое конечное множество пп.

(4) $(A_0 \supset B_0)$ есть L-формула (из (1), по определению L-формулы).

(5) $W((A_0 \supset B_0))$ есть непустое конечное множество пп (из (3) и (4)). Пусть

(6) $n \in \mathbf{N}$, $q_1, \ldots, q_n$ есть попарно различные пп, $W((A \supset B)) = \{q_1, \ldots, q_n\}$. Допустим, что

(7) не существует такое u из $\mathbf{N}$, что для некоторой пп p $(\neg^{(u)} p)$ входит в $(A_0 \supset B_0)$.

(8) $(A_0 \supset B_0) \in Int_{0,0}$ (из того, что $(A_0 \supset B_0) \in Int_{0,\omega}$ (см. (2)), и того, что $I_{0,\omega} \subseteq Int_{0,0}$ (см. замечание)).

(9) Существует такая L-формула C, что $((A_0 \supset C) \in Int_{0,0}$, $(C \supset B_0) \in Int_{0,0}$ и $W(C) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$ (из (1) и того, что

$W(A_0) \cap W(B_0) \neq \varnothing$ (см. (2)), по интерполяционной теореме для $Int_{0,0}$). Пусть

(10) C_0 есть L-формула, $(A_0 \supset C_0) \in Int_{0,0}$, $(C_0 \supset B_0) \in Int_{0,0}$ и $W(C_0) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$. Опираясь на (10) и определение множества $Int_{0,0}$, получаем, что

(11) $HInt_{0,0} \vdash (A_0 \supset C_0)$ и $HInt_{0,0} \vdash (C_0 \supset B_0)$.

(12) $HInt_{0,\omega} \vdash dub((A_0 \supset C_0))$ и $HInt_{0,\omega} \vdash dub((C_0 \supset B_0))$ (из (11) и того, что $(A_0 \supset C_0)$ и $(C_0 \supset B_0)$ есть L-формулы, по лемме 2).

(13) $HInt_{0,\omega} \vdash (dub(A_0) \supset dub(C_0))$ и $HInt_{0,\omega} \vdash (dub(C_0) \supset dub(B_0))$ (из (12), по определению dub и по лемме 1). В свете (7) ясно, что

(14) не существует такое u из $\mathbf{N}$, что для некоторой пп p $(\neg^{(u)}p)$ входит в A_0, и не существует такое u из $\mathbf{N}$, что для некоторой пп p $(\neg^{(u)}p)$ входит в B_0.

(15) $dub(A_0) = A_0$ и $dub(B_0) = B_0$ (из (1) и (14), по лемме 3).

(16) $HInt_{0,\omega} \vdash (A_0 \supset dub(C_0))$ и $HInt_{0,\omega} \vdash (dub(C_0) \supset B_0)$ (из (13) и (15)).

(17) $W(dub(C_0)) = W(C_0)$ (из того, что C_0 есть L-формула (см. (10)), по лемме 4).

(18) $W(dub(C_0)) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$ (из того, что $W(C_0) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$ (см. (10)), и (17)).

(19) Существует такая L-формула C, что $HInt_{0,\omega} \vdash (A_0 \supset C)$, $HInt_{0,\omega} \vdash (C \supset B_0)$ и $W(C) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$ (из (16), (18) и того, что $dub(C_0)$ есть L-формула). Снимая допущение (7), получаем, что

(20) если не существует такое u из $\mathbf{N}$, что для некоторого i из $\{1, \ldots, n\}$ $(\neg^{(u)}q_i)$ входит в $(A_0 \supset B_0)$, то существует такая L-формула C, что $HInt_{0,\omega} \vdash (A_0 \supset C)$, $HInt_{0,\omega} \vdash (C \supset B_0)$ и $W(C) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$. Допустим, что

(21) существует такое u из $\mathbf{N}$, что для некоторой пп p $(\neg^{(u)}p)$ входит в $(A_0 \supset B_0)$.

(22) $\{u | u \in \mathbf{N}$ и существует такая пп p, что $(\neg^{(u)}p)$ входит в $(A_0 \supset B_0)\} \neq \varnothing$ (из (21)). Ясно, что

(23) $\{u | u \in \mathbf{N}$ и существует такая пп p, что $(\neg^{(u)}p)$ входит в $(A_0 \supset B_0)\}$ есть конечное множество. Опираясь на (22) и (23), получаем, что

(24) в $\{u | u \in \mathbf{N}$ и существует такая пп p, что $(\neg^{(u)}p)$ входит в

$(A_0 \supset B_0)\}$ существует наибольшее целое положительное число. Пусть

(25) k есть наибольшее целое положительное число в $\{u|u \in \mathbf{N}$ и существует такая пп p, что $(\neg^{(u)}p)$ входит в $(A_0 \supset B_0)\}$. Учитывая, что множество $\{q_1, \ldots, q_n\}$ конечно, а множество всех пп бесконечно, положим, что

(26) $r_1^1, \ldots, r_1^k, \ldots, r_n^1, \ldots, r_n^k$ есть попарно различные пп, ни одна из которых не принадлежит множеству $\{q_1, \ldots, q_n\}$.

(27) Существует единственное отображение φ множества всех L-формул в себя, удовлетворяющее условиям (a), (b), (c), (d), (e) и (f), сформулированным в лемме 5 (из (4), (6), (25) и (26), по лемме 5). Пусть

(28) φ_0 есть отображение множества всех L-формул в себя, удовлетворяющее условиям: (a$'$) для всякой пп p верно, что $\varphi_0(p) = p$, (b$'$) для всякого m из $\mathbf{N}$ и для всякой пп, не принадлежащей множеству $\{q_1, \ldots, q_n\}$, верно, что $\varphi_0((\neg^{(m)}p)) = (\neg^{(m)}p)$, (c$'$) для всякого такого m из $\mathbf{N}$, что $m > k$, и для всякого i из $\{1, \ldots, n\}$ верно, что $\varphi_0((\neg^{(m)}q_i)) = (\neg\varphi_0((\neg^{(m)}q_i)))$, (d$'$) для всякого такого m из $\mathbf{N}$, что $m \leq k$, и для всякого i из $\{1, \ldots, n\}$ верно, что $\varphi_0((\neg^{(m)}q_i)) = r_i^m$, (e$'$) для всякой L-формулы A, не являющейся квазиэлементарной L-формулой, верно, что $\varphi_0((\neg A)) = (\neg\varphi_0(A))$, (f$'$) для всяких L-формул A и B и для всякой бинарной логической связки $\bullet$ языка L верно, что $\varphi_0((A \bullet B)) = (\varphi_0(A) \bullet \varphi_0(B))$.

(29) $HInt_{0,0} \vdash \varphi_0((A_0 \supset B_0))$ (из (4), (6), (25), (26) и (28), по лемме 6).

(30) $\varphi_0((A_0 \supset B_0)) = (\varphi_0(A_0) \supset \varphi_0(B_0))$ (из (1) и пункта (f$'$) утверждения (28)).

(31) $HInt_{0,0} \vdash (\varphi_0(A_0) \supset \varphi_0(B_0))$ (из (29) и (30)).

(32) Если $W(\varphi_0(A_0)) \cap W(\varphi_0(B_0)) = \varnothing$, то существует такая L-формула C, что $HInt_{0,\omega} \vdash (A_0 \supset C)$, $HInt_{0,\omega} \vdash (C \supset B_0)$ и $W(C) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$.

Докажем утверждение (32).

(32.1) $W(\varphi_0(A_0)) \cap W(\varphi_0(B_0)) = \varnothing$ (допущение). Известно, что верно следующее утверждение (32.2).

(32.2) Для всяких L-формул A и B: если $(A \supset B)$ есть интуиционистская тавтология в L и $W(A) \cap W(B) = \varnothing$, то $(\neg A)$ есть интуиционистская тавтология в L или B есть интуиционистская тавтология в L. Опираясь на утверждения (31), (32.1) и (32.2), получаем, что

(32.3) $(\neg\varphi_0(A_0))$ есть интуиционистская тавтология в L или $(\varphi_0(B_0))$ есть интуиционистская тавтология в L.

(32.4) $(\neg\varphi_0(A_0))$ есть интуиционистская тавтология в L (допущение). Отсюда и из того, что ни одна интуиционистская тавтология в L не является квазиэлементарной L-формулой, получаем, что

(32.5) $(\neg\varphi_0(A_0))$ не есть квазиэлементарная L-формула.

(32.6) $\varphi_0(A_0)$ не есть квазиэлементарная L-формула (из (32.5), по определению квазиэлементарной L-формулы).

(32.7) A_0 не есть квазиэлементарная L-формула (из (1), (4), (6), (25), (26), (28) и (32.6), по лемме 7).

(32.8) $\varphi_0((\neg A_0)) = (\neg\varphi_0(A_0))$ (из (1), (32.7) и пункта (c$'$) утверждения (28)).

(32.9) $\varphi_0((\neg A_0))$ есть интуиционистская тавтология в L (из (32.4) и (32.8)). В свете утверждения (6) ясно, что

(32.10) $W((\neg A_0)) \subseteq \{q_1, \ldots, q_n\}$. Опираясь на (25) и (32.7), получаем, что

(32.11) длина всякой квазиэлементарной L-формулы, входящей в $(\neg A_0)$, не больше k.

(32.12) $Int_{0,\omega} \vdash (\neg A_0)$ (из того, что $(\neg A_0)$ есть L-формула, (4), (6), (25), (26), (28), (32.9), (32.10) и (32.11), по лемме 10). Вспомнив, что $W(A_0) \cap W(B_0) = \varnothing$, положим, что

(32.13) $x \in W(A_0) \cap W(B_0)$. Понятно, что тогда

(32.14) x есть пропозициональная переменная языка L и

(32.15) $(\neg(x \supset x))$ есть L-формула. Используя утверждение (1), (32.7), (32.15), определение L-формулы и определение аксиомы исчисления $HInt_{0,\omega}$, получаем, что

(32.16) $((\neg A_0) \supset (A_0 \supset (\neg(x \supset x))))$ есть аксиома исчисления $HInt_{0,\omega}$. Но тогда ясно, что

(32.17) $HInt_{0,\omega} \vdash ((\neg A_0) \supset (A_0 \supset (\neg(x \supset x))))$. Опираясь на утверждения (32.12) и (32.17), получаем, что

(32.18) $HInt_{0,\omega} \vdash (A_0 \supset (\neg(x \supset x)))$. Простое доказательство нижеследующего утверждения (32.19) не приводим.

(32.19) $HInt_{0,\omega} \vdash ((\neg(x \supset x)) \supset B_0)$.

(32.20) $W((\neg(x \supset x))) = \{x\}$ (из (32.14) и (32.15), по определению W).

(32.21) Существует такая L-формула C, что: $HInt_{0,\omega} \vdash (A_0 \supset C)$, $HInt_{0,\omega} \vdash (C \supset B_0)$ и $W(C) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$ (из (32.13), (32.15), (32.18), (32.19) и (32.20)). Снимая допущение (32.4), получаем, что

(32.22) если $(\neg\varphi_0(A_0))$ есть интуиционистская тавтология в L, то существует такая L-формула C, что: $HInt_{0,\omega} \vdash (A_0 \supset C)$, $HInt_{0,\omega} \vdash (C \supset B_0)$ и $W(C) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$.

(32.23) $\varphi_0(B_0)$ есть интуиционистская тавтология в L (допущение). В свете утверждения (6) очевидно, что

(32.24) $W(\varphi_0(B_0)) \subseteq \{q_1, \dots, q_n\}$. Опираясь на утверждение (25), получаем, что

(32.25) длина всякой квазиэлементарной L-формулы, входящей в B_0, не больше k.

(32.26) $HInt_{0,\omega} \vdash B_0$ (из (1), (4), (16), (25), (26), (28), (32.23), (32.24) и (32. 25) по лемме 10). Учитывая, что $W(A_0) \cap W(B_0) \neq \varnothing$, положим, что

(32.27) $y \in W(A_0) \cap W(B_0)$. Разумеется, тогда

(32.28) y есть пп и

(32.29) $(y \supset y)$ есть L-формула. Опираясь на утверждения (32.26) и (32. 29), нетрудно доказать, что

(32.30) $HInt_{0,\omega} \vdash ((y \supset y) \supset B_0)$. Можно доказать также, что

(32.31) $HInt_{0,\omega} \vdash (A_0 \supset (y \supset y))$.

(32.32) $W((y \supset y)) = \{y\}$ (из (32.28) и (32.29), по определению W).

(32.33) Существует такая L-формула C, что: $HInt_{0,\omega} \vdash (A_0 \supset C)$, $HInt_{0,\omega} \vdash (C \supset B_0)$ и $W(C) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$ (из (32.27), (32.29), (32.30), (32. 31) и (32.32)). Снимая допущение (32.23), получаем, что

(32.34) если $\varphi_0(B_0)$ есть интуиционистская тавтология в L, то существует такая L-формула C, что: $HInt_{0,\omega} \vdash (A_0 \supset C)$, $HInt_{0,\omega} \vdash (C \supset B_0)$ и $W(C) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$.

(32.35) Существует такая L-формула C, что: $HInt_{0,\omega} \vdash (A_0 \supset C)$, $HInt_{0,\omega} \vdash (C \supset B_0)$ и $W(C) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$ (из (32.3), (32.23) и (32.34)). Снимая допущение (32.1), получаем, что если $W(\varphi_0(A_0)) \cap W(\varphi_0(B_0)) = \varnothing$, то существует такая L-формула C, что: $HInt_{0,\omega} \vdash (A_0 \supset C)$, $HInt_{0,\omega} \vdash (C \supset B_0)$ и $W(C) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$.

Утверждение (32) доказано.

(33) Если $W(\varphi_0(A_0)) \cap W(\varphi_0(B_0)) \neq \varnothing$, то существует такая L-формула C, что: $HInt_{0,\omega} \vdash (A_0 \supset C)$, $HInt_{0,\omega} \vdash (C \supset B_0)$ и $W(C) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$.

Докажем утверждение (33).

(33.1) $W(\varphi_0(A_0)) \cap W(\varphi_0(B_0)) \neq \varnothing$ (допущение). Ясно, что

(33.2) $\varphi_0(A_0)$ и $\varphi_0(B_0)$ являются L-формулами.

(33.3) $(\varphi_0(A_0) \supset \varphi_0(B_0)) \in Int_{0,0}$ (из 31), по определению множества $Int_{0,0}$).

(33.4) $(\varphi_0(A_0) \supset \varphi_0(B_0))$ есть интуиционистская тавтология в языке L (из (33.3) и того, что $Int_{0,0}$ есть множество всех интуиционистских тавтологий в языке L).

(33.5) Существует такая L-формула C, что: $(\varphi_0(A_0) \supset C)$ и $(C \supset \varphi_0(B_0))$ есть интуиционистские тавтологии в L, $W(C) \subseteq W(\varphi_0(A_0)) \cap W(\varphi_0(B_0))$ и C есть негативно-регулярная L-формула (из (33.1), (33.2) и (33.4), по лемме 11). Пусть

(33.6) C_0 есть L-формула, $(\varphi_0(A_0) \supset C_0)$ и $(C_0 \supset \varphi_0(B_0))$ есть интуиционистские тавтологии в L, $W(C_0) \subseteq W(\varphi_0(A_0)) \cap W(\varphi_0(B_0))$ и C есть негативно-регулярная L-формула.

(33.7) $(\varphi_0(A_0) \supset C_0) \in Int_{0,0}$ и $(C_0 \supset \varphi_0(B_0)) \in Int_{0,0}$ (из (33.6) и того, что $Int_{0,0}$ есть множество всех интуиционистских тавтологий в языке L).

(33.8) $(\varphi_0(A_0) \supset C_0)$ и $(C_0 \supset \varphi_0(B_0))$ являются $HInt_{0,0}$-доказуемыми L-формулами (из (33.7), по соглашению об обозначении).

(33.9) $HInt_{0,0} \vdash (\varphi_0(A_0) \supset C_0)$ и $HInt_{0,0} \vdash (C_0 \supset \varphi_0(B_0))$ (из (33.8), по соглашению об использовании «$HInt_{0,0} \vdash$»).

(33.10) $HInt_{0,\omega} \vdash dub((\varphi_0(A_0) \supset C_0))$ и $HInt_{0,\omega} \vdash dub((C_0 \supset \varphi_0(B_0)))$ (из (33.9), по лемме 2).

(33.11) $HInt_{0,\omega} \vdash (dub(\varphi_0(A_0)) \supset dub(C_0)$ и $HInt_{0,\omega} \vdash (dub(C_0) \supset dub(\varphi_0(B_0)))$ (из (33.10), по лемме 1).

(33.12) $dub(C_0) = C_0$ (из(33.6), по лемме 3). Очевидно, что

(33.13) L-формулы A_0 и B_0 входят в L-формулу $(A_0 \supset B_0)$.

(33.14) $\varphi_0(A_0)$ и $\varphi_0(B_0)$ есть негативно-регулярные L-формулы (из (1), (4), (6), (25), (26), (28) и (33.13), по лемме 12).

(33.15) $dub(\varphi_0(A_0)) = \varphi_0(A_0)$ и $dub(\varphi_0(B_0)) = \varphi_0(B_0)$(из (33.14), по лемме 3).

(33.16) $HInt_{0,\omega} \vdash (\varphi_0(A_0) \supset C_0)$ и $HInt_{0,\omega} \vdash (C_0 \supset \varphi_0(B_0))$ (из (33.11), (33.12) и (33.15)). Понятно, что

(33.17) произведение k на n есть целое положительное число, $r_1^1, \ldots, r_1^k, \ldots, r_n^1, \ldots, r_n^k$ есть попарно различные пп, а $(\neg^{(1)}q_1), \ldots, (\neg^{(k)}q_1), \ldots, (\neg^{(1)}q_n), \ldots, (\neg^{(k)}q_n)$ есть L-формулы. Условившись вместо «$[r_1^1 \ldots r_1^k \ldots r_n^1 \ldots r_n^k \,/\, (\neg^{(1)}q_1) \ldots (\neg^{(k)}q_1) \ldots (\neg^{(1)}q_n) \ldots (\neg^{(k)}q_n)]$» использовать «$S$» и опираясь на (33.16) и (33.17), получаем по лемме 0, что

(33.18) $HInt_{0,\omega} \vdash S((\varphi_0(A_0) \supset C_0))$ и $HInt_{0,\omega} \vdash S((C_0 \supset \varphi_0(B_0)))$. Используя дистрибутивность S относительно импликации $\supset$, получаем, что

(33.19) L-формула $S((\varphi_0(A_0)) \supset C_0)$ есть L-формула $(S(\varphi_0(A_0)) \supset S(C_0))$, а L-формула $S((C_0 \supset \varphi_0(B_0)))$ есть L-формула $(S(C_0) \supset S(\varphi_0(B_0)))$.

(33.20) $HInt_{0,\omega} \vdash (S(\varphi_0(A_0)) \supset S(C_0))$ и $HInt_{0,\omega} \vdash (S(C_0) \supset S(\varphi_0(B_0)))$ (из (33.18) и (33.19), по соглашению об использовании «S»). В свете утверждений (6) и (25) ясно, что

(33.21) $W(A_0) \subseteq \{q_1, \ldots, q_n\}$, $W(B_0) \subseteq \{q_1, \ldots, q_n\}$, длина всякой квазиэлементарной L-формулы, входящей в A_0, не больше k, длина всякой квазиэлементарной L-формулы, входящей в B_0, не больше k.

(33.22) $S(\varphi_0(A_0)) = A_0$ и $S(\varphi_0(B_0)) = B_0$ (из (4), (6), (25), (26), (28) и (33.21), по лемме 9).

(33.23) $HInt_{0,\omega} \vdash (A_0 \supset S(C_0))$ и $HInt_{0,\omega} \vdash (S(C_0) \supset B_0)$ (из (33.20) и (33.22)).

(33.24) $W(C_0) \subseteq W(\varphi_0(A_0)) \cap W(\varphi_0(B_0))$ (из(33.6)).

(33.25) $W(C_0) \subseteq W(\varphi_0(A_0))$ и $W(C_0) \subseteq W(\varphi_0(B_0))$ (из (33.24)). Очевидно следующее утверждение

(33.26), имеющее семиотический характер. (33.26) Для всякого m из $\mathbf{N}$, для всяких L-формул A, B, $C_1,\ldots,C_m$ и для всяких попарно различных пп $s_1,\ldots,s_m$: если $W(A) \subseteq W(B)$, то $W([s_1 \ldots s_m \,/\, C_1 \ldots C_m](A)) \subseteq W([s_1 \ldots s_m \,/\, C_1 \ldots C_m](B))$.

(33.27) $W(S(C_0)) \subseteq W(S(\varphi_0(A_0)))$ и $W(S(C_0)) \subseteq W(S(\varphi_0(B_0)))$ (из (33.2), (33.6), (33.17), (33.25) и (33.26)).

(33.28) $W(S(C_0)) \subseteq W(A_0)$ и $W(S(C_0)) \subseteq W(B_0)$ (из (33.22) и (33.27)).

(33.29) $W(S(C_0)) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$ (из (33.28)).

(33.30) Существует такая L-формула C, что: $HInt_{0,\omega} \vdash (A_0 \supset C)$, $HInt_{0,\omega} \vdash (C \supset B_0)$ и $W(C) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$ (из того, что $S(C_0)$ есть L-формула, и утверждений (33.23) и (33.29)). Снимая допущение (33.1), получаем, что если $W(\varphi_0(A_0)) \cap W(\varphi_0(B_0)) \neq \varnothing$, то существует такая L-формула C, что: $HInt_{0,\omega} \vdash (A_0 \supset C)$, $HInt_{0,\omega} \vdash (C \supset B_0)$ и $W(C) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$.

Утверждение (33) доказано.

(34) Существует такая L-формула C, что: $HInt_{0,\omega} \vdash (A_0 \supset C)$, $HInt_{0,\omega} \vdash (C \supset B_0)$ и $W(C) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$ (из (32) и (33)). Снимая допущение (21), получаем, что

(35) если существует такое u из $\mathbf{N}$, что для некоторой пп p $(\neg^{(u)}p)$ входит в $(A_0 \supset B_0)$, то существует такая L-формула C, что: $HInt_{0,\omega} \vdash (A_0 \supset C)$, $HInt_{0,\omega} \vdash (C \supset B_0)$ и $W(C) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$.

(36) Существует такая L-формула C, что: $HInt_{0,\omega} \vdash (A_0 \supset C)$, $HInt_{0,\omega} \vdash (C \supset B_0)$ и $W(C) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$ (из (20) и (35)). Опираясь на (36) и соглашение об обозначении, получаем, что

(37) существует такая L-формула C, что: $(A_0 \supset C) \in Int_{0,\omega}$, $(C \supset B_0) \in Int_{0,\omega}$ и $W(C) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$. Снимая допущения (1) и (2) и обобщая, получаем, что для всяких L-формул A и B: если $(A \supset B) \in Int_{0,\omega}$ и $W(A) \cap W(B) \neq \varnothing$, то существует такая формула C, что $(A \supset C) \in Int_{0,\omega}$, $(C \supset B) \in Int_{0,\omega}$ и $W(C) \subseteq W(A) \cap W(B)$.

Интерполяционная теорема для $Int_{0,\omega}$ доказана.

Q.E.D.

Литература

[1] *Попов В.М.* Секвенциальные аксиоматизации простых паралогик //Логические исследования. Вып. 16. Центр гуманитарных инициатив, М.; СПб., 2010. С. 205–220.

[2] *Смирнов В.А.* Формальный вывод и логические исчисления. М., 1972.

[3] *Шютте К.* Интерполяционная теорема для интуиционистской логики предикатов //Математическая теория логического вывода. М., 1967. С. 285–295.

[4] *Craig W.* Linear reasoning. A new form of the Herbrand-Gentzen theorem //Journal of Symbolic Logic. 1957. Vol. 22. P. 250–268.

Замечание. В публикации В.М. Попова «Секвенциальная аксиоматизация паранормальной логики $PContPComp$» (Логические исследования. Вып. 17. С. 240–245) на стр. 243–244 в формулировке правила ВОКЛ, в формулировке правила ВИП и в формулировке ВОИП имеются опечатки. Правильные формулировки этих правил таковы:

$$\frac{((\neg A) \bullet \Gamma) \to \Theta \qquad ((\neg B) \bullet \Gamma) \to \Theta}{((\neg (A \& B)) \bullet \Gamma) \to \Theta}\ \textit{(ВОКЛ)}$$

$$\frac{(A \bullet \Gamma) \to (\Theta \bullet B)}{\Gamma \to (\Theta \bullet (A \supset B))}\ \textit{(ВИП)}$$

$$\frac{\Gamma \to (\Theta \bullet A) \qquad \Gamma \to (\Theta \bullet (\neg B))}{\Gamma \to (\Theta \bullet (\neg (A \supset B)))}\ \textit{(ВОИП)}$$

В публикации В.М. Попова «Секвенциальные аксиоматизации пропозициональных логик нельсоновского типа» (Логические исследования. Вып. 17. С. 246–250) допущены ошибки:

(1) утверждение о том, что для исчисления $GPCont(N)$ верна теорема об устранимости сечения,

(2) утверждение о том, что позитивный фрагмент логики $PCont(N)$ равен позитивному фрагменту интуиционистской пропозициональной логики,

(3) утверждение о том, что логика $PCont(N)$ не имеет конечной характеристической матрицы.

В исчислении $GPCont(N)$ сечение неустранимо, позитивный фрагмент логики $PCont(N)$ равен позитивному фрагменту классической (а не интуиционистской) пропозициональной логики. Логика $PCont(N)$ имеет конечную характеристическую матрицу, поскольку, как показал В.О. Шангин, $PCont(N)$ равна трехзначной логике, являющейся множеством всех теорем исчисления $PCont$, построенного в работе Л.И. Розоноэра «О выявлении противоречий в формальных теориях.1» (Автоматика и телемеханика. № 6, 1983).