Четыре следования, три порядка, две матрицы, одна бирешетка

Л. Ю. Девяткин

abstract. In this paper it is shown how four consequence relations defined in terms of designated and anti-designated values allow to produce a six-element bilattice on the basis of two arbitrary finite-valued logical matrices for a propositional language L.

Keywords: product of logical matrices, anti-designated values, consequence relation

В настоящей работе будет показано, как основе четырех попарно различных отношений логического следования, которые можно определить в терминах выделенных и анти-выделенных значений, и двух произвольных конечнозначных матриц для некоторого пропозиционального языка L можно построить шестиэлементную бирешетку с порядками по отношению логического следования и классу тавтологий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть дан пропозициональный язык L. Логическая матрица $\mathfrak{M} =< \mathcal{A}, D >$, где $\mathcal{A}$ есть некоторая алгебра, а D выделенное подмножество множества-носителя $\mathcal{A}$, является матрицей для L, е.т.е. для каждого n число n-арных базовых операций $\mathcal{A}$ равно числу n-арных связок в L.

Тогда можно установить взаимно-однозначное соответствие между связками из L и операциями из $\mathcal{A}$ соответствующей местности и определить оценку L-формулы (далее — «формулы») A в $\mathfrak{M}$ следующим образом:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Оценка v формулы A в $\mathfrak{M}$ есть отображение L на $\mathcal{A}$, такое что

- если A есть пропозициональная переменная, то $v(A) \in V$, где V есть множество-носитель $\mathcal{A}$;

- если $A_1, A_2, \cdots, A_n$ есть формулы, и $\mathbb{C}$ есть n-арная связка из L, то $v(\mathbb{C}(A_1, A_2, \cdots, A_n)) = f^n(v(A_1), v(A_2), \cdots, v(A_n))$, где f^n есть операция из $\mathcal{A}$, соответствующая $\mathbb{C}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Формула A логически следует из множества формул Γ в $\mathfrak{M}$ ($\Gamma \vDash (\mathfrak{M})B$), е.т.е. не существует оценки v в $\mathfrak{M}$, такой что $v[\Gamma] \subseteq D(\mathfrak{M})$ (то есть, каждая формула из Γ принимает значение, выделенное в $\mathfrak{M}$) и $v(A) \notin D(\mathfrak{M})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Формула A является тавтологией в $\mathfrak{M}$ ($\vDash (\mathfrak{M})B$), е.т.е. A логически следует из любого (в том числе пустого) множества формул Γ в $\mathfrak{M}$.

Обозначим как $C(\mathfrak{M})$ множество упорядоченных пар $< \Gamma, B >$, таких что Γ есть множество формул, B — формула и $\Gamma \vDash (\mathfrak{M})B$. Обозначим как $T(\mathfrak{M})$ множество тавтологий $\mathfrak{M}$. Ясно, что каждая пара $< Fm, \vDash (\mathfrak{M}) >$, где Fm есть множество формул языка L, а $\vDash (\mathfrak{M})$ есть отношение логического следования, заданное на Fm, порождает собственные классы $C(\mathfrak{M})$ и $T(\mathfrak{M})$.

Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ есть матрицы для L, можно установить взаимно-однозначное соответствие между их базовыми операциями. Это позволяет определить следующую операцию на $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Будем называть произведением матриц $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$) такую матрицу $\mathfrak{C}$, что

- $V(\mathfrak{C})$ есть прямое произведение $V(\mathfrak{A})$ и $V(\mathfrak{B})$;

- каждой паре соответствующих k-арных базовых операций $f^k(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ из $\mathfrak{A}$ и $g^k(y_1, y_2, \cdots, y_k)$ из $\mathfrak{B}$ взаимно-однозначно сопоставлена базовая операция h^k из $\mathfrak{C}$, причем $h^k(< x_1, y_1 >, < x_2, y_2 >, \cdots, < x_k, y_k >) = < f^k(x_1, x_2, \cdots, x_k), g^k(y_1, y_2, \cdots, y_k) >$;

- значение $< x_i, y_j >$ в $\mathfrak{C}$ является выделенным ($< x_i, y_j > \in D(\mathfrak{C})$), е.т.е. $x_i \in D(\mathfrak{A})$ и $y_j \in D(\mathfrak{B})$;

- значение $< x_i, y_j >$ в $\mathfrak{C}$ является анти-выделенным ($< x_i, y_j > \in D^*(\mathfrak{C})$), е.т.е. $x_i \notin D(\mathfrak{A})$ и $y_j \notin D(\mathfrak{B})$.

Таким образом, $\mathfrak{C}$ оказывается модифицированной матрицей, где к классам выделенных и невыделенных значений добавляется третий — класс анти-выделенных значений, и каждый элемент множества-носителя $\mathfrak{C}$ принадлежит одному из трех классов. Матрицы такого типа называются q-матрицами [4]. Можно определить четыре различных отношения логического следования в произвольной q-матрице $\mathfrak{N}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.

1. $\Gamma \vDash_t (\mathfrak{N})B$, е.т.е. не существует оценки v в $\mathfrak{N}$, такой что $v[\Gamma] \subseteq D(\mathfrak{N})$ и $v(A) \notin D(\mathfrak{N})$ (классическое следование);

2. $\Gamma \vDash_f (\mathfrak{N})B$, е.т.е. не существует оценки v в $\mathfrak{N}$, такой что $v[\Gamma] \subseteq \overline{D^*(\mathfrak{N})}$ (то есть, ни одна из формул не принимает анти-выделенное в $\mathfrak{N}$ значение) и $v(A) \in D^*(\mathfrak{N})$ (см. [1]);

3. $\Gamma \vDash_q (\mathfrak{N})B$, е.т.е. не существует оценки v в $\mathfrak{N}$, такой что $v[\Gamma] \subseteq \overline{D^*(\mathfrak{N})}$ и $v(A) \notin D(\mathfrak{N})$ (q-следование, [4]);

4. $\Gamma \vDash_p (\mathfrak{N})B$, е.т.е. не существует оценки v в $\mathfrak{N}$, такой что $v[\Gamma] \subseteq D(\mathfrak{N})$ и $v(A) \in D^*(\mathfrak{N})$ (p-следование, [2]).

Каждое из этих отношений характеризует собственные классы формул $C^i(\mathfrak{N})$ и $T^i(\mathfrak{N})(i \in \{t, f, q, p\})$ языка, матрицей для которого является $\mathfrak{N}$. В матрицах, где $D \cap D^* = \varnothing$, между полученными отношениями следования имеет место порядок по $\subseteq$, где $\vDash_q$ есть минимум, а $\vDash_p$ есть максимум [6]:

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.

i. $C^q(\mathfrak{N}) \subseteq C^t(\mathfrak{N})$;

ii. $C^q(\mathfrak{N}) \subseteq C^f(\mathfrak{N})$;

iii. $C^t(\mathfrak{N}) \subseteq C^p(\mathfrak{N})$;

iv. $C^f(\mathfrak{N}) \subseteq C^p(\mathfrak{N})$.

Ясно, что Утверждение 1 выполняется для $\mathfrak{C} = (\mathfrak{A} \times \mathfrak{B})$. Аналогичный порядок имеет место между $C(\mathfrak{A})$, $C(\mathfrak{B})$, $C^q(\mathfrak{C})$ и $C^p(\mathfrak{C})$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Пусть* $\mathfrak{C} = (\mathfrak{A} \times \mathfrak{B})$. *Тогда имеет место следующее:*

i. $C^q(\mathfrak{C}) \subseteq C(\mathfrak{A})$;

ii. $C^q(\mathfrak{C}) \subseteq C(\mathfrak{B})$;

iii. $C(\mathfrak{A}) \subseteq C^p(\mathfrak{C})$;

iv. $C(\mathfrak{B}) \subseteq C^p(\mathfrak{C})$.

Доказательство. *(i)* Пусть $\Gamma \models_q (\mathfrak{C})B$ и $\Gamma \not\models (\mathfrak{A})B$. Тогда существует оценка v в $\mathfrak{A}$, такая что $v[\Gamma] \subseteq D(\mathfrak{A})$ и $v(A) \notin D(\mathfrak{A})$. В этом случае, по определению $\mathfrak{C}$, $w[\Gamma] \subseteq \overline{D^*(\mathfrak{C})}$ и $w(A) \notin D(\mathfrak{C})$ при некоторой оценке w в $\mathfrak{C}$. Следовательно $\Gamma \not\models_q (\mathfrak{C})B$, что противоречит условию. Доказательство для *(ii)* аналогично.

Теперь докажем *(iii) и (iv)*. Пусть $\Gamma \not\models_q (\mathfrak{C})B$ и B следует из Γ в $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{B}$. Тогда существует оценка w в $\mathfrak{C}$, такая что $v[\Gamma] \subseteq D(\mathfrak{C})$ и $v(A) \in D^*(\mathfrak{C})$. Это возможно только в том случае, когда имеются оценки v в $\mathfrak{A}$ и u в $\mathfrak{B}$, при которых $v[\Gamma] \subseteq D(\mathfrak{A})$ и $v(A) \notin D(\mathfrak{A})$, а также $u[\Gamma] \subseteq D(\mathfrak{B})$ и $u(A) \notin D(\mathfrak{B})$. Однако тогда $\Gamma \not\models (\mathfrak{A})B$ и $\Gamma \not\models (\mathfrak{B})B$. Q.E.D.

Итак, $\models_q$ снова оказывается минимумом, а $\models_p$ — максимумом. То есть, из Утверждений 1 и 2 можно сделвать вывод, что имеет место решетка с четырьмя промежуточными элементами. Как выясняется, на данных элементах также можно задать порядок по $\subseteq$, однако на этот раз речь пойдет о классах тавтологий.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Пусть* $\mathfrak{C} = (\mathfrak{A} \times \mathfrak{B})$. *Тогда имеет место следующее:*

i. $T^t(\mathfrak{C}) \subseteq T(\mathfrak{A})$;

ii. $T^t(\mathfrak{C}) \subseteq T(\mathfrak{B})$;

iii. $T(\mathfrak{A}) \subseteq T^f(\mathfrak{C})$;

iv. $T(\mathfrak{B}) \subseteq T^f(\mathfrak{C})$.

Доказательство. В действительности могут быть доказаны более сильные утверждения: *(v)* $T^t(\mathfrak{C}) = T(\mathfrak{A}) \cap T(\mathfrak{B})$; *(vi)* $T^f(\mathfrak{C}) = T(\mathfrak{A}) \cup T(\mathfrak{B})$. Доказательство *(v)* представлено в [5]. Докажем *(vi)* (доказательство аналогичного факта в другой формулировке имеется в [5] и [3]).

Пусть формула A принадлежит множеству $T(\mathfrak{A}) \cup T(\mathfrak{B})$. Тогда $A \in T(\mathfrak{A})$ или $A \in T(\mathfrak{B})$ (в неисключающем смысле). Если $A \in T(\mathfrak{A})$, то $v(A) \in D(\mathfrak{A})$ при каждой оценке v в $\mathfrak{A}$. Но тогда, согласно определению $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, не существует оценки w в $\mathfrak{C}$, при которой $w(A) \in D^*(\mathfrak{C})$. Следовательно, $A \in T^f(\mathfrak{C})$. Аналогично для $A \in T(\mathfrak{B})$.

Теперь пусть $A \notin T(\mathfrak{A})$ или $A \notin T(\mathfrak{B})$. Тогда существуют оценка v в $\mathfrak{A}$, такая что $v(A) \notin D(\mathfrak{A})$ и оценка u в $\mathfrak{B}$, такая что $u(A) \notin D(\mathfrak{B})$. Но тогда, по определению $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, существует оценка w в $\mathfrak{C}$, при которой $w(A) \in D^*(\mathfrak{C})$ и $A \notin T^f(\mathfrak{C})$. Q.E.D.

Из определений $\vDash_t (\mathfrak{N})$, $\vDash_f (\mathfrak{N})$, $\vDash_q (\mathfrak{N})$, $\vDash_p (\mathfrak{N})$, а также определения тавтологии вытекает, что $T^t(\mathfrak{N}) = T^q(\mathfrak{N})$ и $T^f(\mathfrak{N}) = T^p(\mathfrak{N})$.

Таким образом, произвольные логические матрицы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ для пропозиционального языка L и их произведение $\mathfrak{C}$ с четырьмя отношениями следования образуют шестиэлементную бирешетку систем $< Fm, \vDash (\mathfrak{A}) >$, $< Fm, \vDash (\mathfrak{B}) >$, $< Fm, \vDash_t (\mathfrak{C}) >$, $< Fm, \vDash_f (\mathfrak{C}) >$, $< Fm, \vDash_q (\mathfrak{C}) >$ и $< Fm, \vDash_p (\mathfrak{C}) >$, в которой первый порядок есть порядок по включению класса C, а второй порядок — по включению класса T.

В заключение отметим одно полезное следствие. Из полученных результатов, в частности, вытекают критерии эквивалентности матриц для L по классу тавтологий и по отношению логического следования: $T(\mathfrak{A}) = T(\mathfrak{B})$, е.т.е. $T^t(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) = T^f(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B})$; $C(\mathfrak{A}) = C(\mathfrak{B})$, е.т.е. $C^p(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) = C^q(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B})$.

Литература

[1] *Dunn J.M.* Partiality and its dual // Studia Logica. V. 66. 2000. Pp. 5–40.

[2] *Frankowski S.* Formalization of a plausible inference // Bulletin of the Section of Logic. V. 33. 2004. Pp. 41–52.

[3] *Kalicki J.* A test for the equality of truth-tables // The Journal of Symbolic Logic. V. 17. № 3. 1952. Pp. 161–163.

[4] *Malinowski G.* Inferential many-valuedness // Philosophical logic in Poland, *J.Woleński* (ed.). Synthese Library, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. 1994. Pp. 74–84.

[5] *Rescher N.* Many-Valued Logic. New York (McGraw-Hill), 1969. Reprinted: Aldershot (Gregg Revivals), 1993. Pp. 96–101.

[6] *Shramko Y.*, *Wansing H.* Entailmant realtions and/as truth values // Bulletin of the Section of Logic. V. 36:3/4. 2007. Pp. 131–143.