Естественные p-логики

Н. Е. Томова

ABSTRACT. In this paper the notion of p-logic is generalied and the class of natural p-logics and it's functional properties are considered. It is shown that paraconsistent logic $\mathbf{P^1}$ and paracomplete logic $\mathbf{I^1}$ are funclionally equivalent. In conclusion natural p-logics are presented as a lattice.

Ключевые слова: трехзначные логики, p-логики, естественные p-логики, решетка естественных p-логик, функциональные свойства p-логик

В работе [3] по аналогии с понятием p-алгебры и дважды p-алгебры вводится понятие p-логики и дважды p-логики. P-логика задается связками $\vee, \wedge, \rceil$, дуальная p-логика — связками $\vee, \wedge, \lceil$. $\vee$ и $\wedge$ есть обычные max(дизъюнкция) и min(конъюнкция), а $\rceil$ и $\lceil$ задаются следющими таблицами:

p	$\rceil p$	$\lceil p$
1	0	0
$\frac{1}{2}$	0	1
0	1	1

Логика со связками $\vee, \wedge, \rceil$ и $\lceil$ есть дважды p-логика.

В данной статье обобщается понятие p-логики и рассматривается класс естественных p-логик, подробно исследуются функциональные свойства этого класса систем.

При определении класса естественных p-логик ключевую роль играет заданный нами в [4] класс естественных импликаций.

Посредством импликации[1] следующим образом определим дизъюнкцию:

$$x \vee y =_{Df} (x \rightarrow_i y) \rightarrow_i y \, (1 \leq i \leq 28).$$

[1]Здесь и далее импликации с указанными номерами см. в [4].

В результате получаем 18 уникальных дизъюнкций. Далее определим двойственную связку — конъюнкцию:

$$x \wedge^i y =_{Df} \sim (\sim x \vee^i \sim y)\,(1 \leq i \leq 18).$$

Таким образом, имеем 18 естественных p-логик (логик со связками $\{\vee^i, \wedge^i, \rceil\}$, где $(1 \leq i \leq 18)$) и соответственно 18 естественных дуальных p-логик (логик со связками $\{\vee^i, \wedge^i, \lceil\}$, где $(1 \leq i \leq 18)$). Приведем таблицы истинности, соответствующие дизъюнкциям и конъюнкциям естественных p-логик, и перенумеруем их.

$\vee^1$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\wedge^1$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0

$\vee^2$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\wedge^2$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0

$\vee^3$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\wedge^3$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0

$\vee^4$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	0	1
0	1	0	0

$\wedge^4$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	0
$\frac{1}{2}$	0	1	0
0	0	0	0

$\vee^5$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	0	0
0	1	0	0

$\wedge^5$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	0
$\frac{1}{2}$	1	1	0
0	0	0	0

$\vee^6$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$
0	1	0	0

$\wedge^6$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
0	0	0	0

$\vee^7$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	1	1
0	1	1	0

$\wedge^7$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	0	0	0
0	0	0	0

$\vee^8$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
0	1	1	0

$\wedge^8$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	$\frac{1}{2}$	0	0
$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
0	0	0	0

$\vee^9$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\wedge^9$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	0	0

$\vee^{10}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	0

$\wedge^{10}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	0	0

$\vee^{11}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	0

$\wedge^{11}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0

$\vee^{12}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1
0	1	0	0

$\wedge^{12}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	0
$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$
0	0	0	0

$\vee^{13}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	1	0	1
0	1	1	0

$\wedge^{13}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	0	1	0
0	0	$\frac{1}{2}$	0

$\vee^{14}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1
0	1	1	0

$\wedge^{14}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$
0	0	$\frac{1}{2}$	0

$\vee^{15}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\wedge^{15}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
0	0	$\frac{1}{2}$	0

$\vee^{16}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\wedge^{16}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	$\frac{1}{2}$	0

$\vee^{17}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1
0	1	0	0

$\wedge^{17}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0

$\vee^{18}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
0	1	0	0

$\wedge^{18}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	0	0

Обратим внимание на то, что среди естественных p-логик присутствует p-логика со связками $\vee^3$ и $\wedge^3$. Заметим, что $\vee^3$ и $\wedge^3$ есть обычные max(дизъюнкция) и min(конъюнкция), т.е. $\vee^3, \wedge^3, \rceil$ есть p-логика, описанная в [3]. В этой же работе показано, что трехзначя логика Лукасевича $\mathbf{Ł_3}$ есть дважды p-логика, т.е. в нашем обозначении логика со связками $\vee^3, \wedge^3, \rceil, \lceil$.

Рассмотрим функциональные свойства полученного класса естественных p-логик, а также выясним, какие известные трехзначные логики им соответствуют.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Естественные p-логики со связками* $\vee^i$, $\wedge^i, \rceil$ *и* $\vee^i, \wedge^i, \lceil$, *где* ($1 \leq i \leq 18$ *и* $i \neq 3$), *функционально эквивалентны.*

Доказательство. Функциональная эквивалентность логик со связками $\vee^i, \wedge^i, \rceil$ и $\vee^i, \wedge^i, \lceil$, где ($1 \leq i \leq 18$ и $i \neq 3$) следует из соотношений (1)–(3):

(1) $i \in \{1, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$

$\lceil p =_{Df} \rceil (p \wedge^i \rceil\rceil p)$,
$\rceil p =_{Df} \lceil (p \vee^i \lceil\lceil p)$;

(2) $i \in \{2, 5\}$
$\lceil p =_{Df} \rceil ((p \vee^i \rceil p) \wedge^i \rceil\rceil p)$,
$\rceil p =_{Df} \lceil ((p \wedge^i \lceil p) \vee^i \lceil\lceil p)$;

(3) $\lceil p =_{Df} \rceil (p \vee^6 \rceil p)$,
$\rceil p =_{Df} \lceil (p \wedge^6 \lceil p)$.

Утверждение доказано. Q.E.D.

Таким образом, поскольку логики со связками $\vee^i, \wedge^i, \rceil$ и $\vee^i, \wedge^i, \lceil$, где ($1 \leq i \leq 18$ и $i \neq 3$), функционально эквивалентны, достаточно будет рассмотреть логики со связками $\vee^i, \wedge^i, \rceil$.

Далее, нам понадобится следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *В естественных p-логиках со связками* $\vee^i, \wedge^i, \rceil$, *где* $i \in \{1, 2, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 18\}$, *выразимо отрицание* $\sim$.

Доказательство. В силу ранее доказанного утверждения 1 доказательство утверждения 2 следует из соотношений (1)–(4):

(1) $i \in \{1, 2, 9, 15, 16\}$
$\sim p =_{Df} \lceil p \wedge^i (\rceil p \vee^i p)$;

(2) $i \in \{8, 10, 12, 14, 18\}$
$\sim p =_{Df} (p \vee^i \lceil p) \wedge^i \rceil p$;

(3) $\sim p =_{Df} (p \vee^6 \rceil p) \wedge^6 \lceil p$;

(4) $\sim p =_{Df} \rceil p \wedge^{13} (\lceil p \vee^{13} p)$.

Утверждение доказано.

Q.E.D.

Перейдем к рассмотрению взаимоотношений между естественными p-логиками.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *P-логики со связками* $\vee^i, \wedge^i, \rceil (i \in \{4, 5, 7\})$ *попарно функционально эквивалентны.*

Доказательство. При доказательстве будем учитывать ранее доказанное утверждение 1.

Сначала покажем эквивалентность логик со связками $\vee^5, \wedge^5, \rceil$ и $\vee^7, \wedge^7, \rceil$. Это верно, в силу следующих соотношений:

(1) $p \vee^7 q =_{Df} \rceil\rceil p \vee^5 \rceil\rceil q$,
$p \wedge^7 q =_{Df} (p \vee^5 p) \wedge^5 (q \vee^5 q)$;

(2) $p \vee^5 q =_{Df} \lceil\lceil p \vee^7 \lceil\lceil q$,
$p \wedge^5 q =_{Df} (p \vee^7 p) \wedge^7 (q \vee^7 q)$.

Далее покажем, что логика со связками $\vee^7, \wedge^7, \rceil$ функционально эквивалентна логике со связками и $\vee^4, \wedge^4, \rceil$.

Это справедливо в силу следующих соотношений:

(1) $p \vee^7 q =_{Df} \rceil\rceil p \vee^4 \rceil\rceil q$,
$p \wedge^7 q =_{Df} (p \vee^4 p) \wedge^4 (q \vee^4 q)$;

(2) $p \vee^4 q =_{Df} ((\rceil q \wedge^7 \rceil\rceil p) \vee^7 \lceil\lceil q) \vee^7 \lceil\lceil p$,
$p \wedge^4 q =_{Df} ((\rceil\rceil q \wedge^7 \lceil q) \wedge^7 \rceil\rceil p) \vee^7 (p \wedge^7 q)$.

Таким образом, утверждение доказано.

Q.E.D.

Заметим, что паранепротиворечивая логика $\mathbf{P^1}$ [10] есть логика с исходными связками $\lceil$ и $\to_7$. Оказалось, $\mathbf{P^1}$ можно представить в терминах *естественных* p-логик.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Логика* $\mathbf{P^1}$ *есть* p*-логика со связками* $\vee^7, \wedge^7, \rceil$.

Доказательство. Покажем, что логика со связками $\lceil$ и $\to_7$ функционально эквивалентна логике со связками $\vee^7, \wedge^7, \rceil$. Это справедливо, поскольку имеют место следующие соотношения:

(1) $p \vee^7 q =_{Df} ((p \to_7 q) \to_7 q)$,
$p \wedge^7 q =_{Df} \rceil(\rceil\rceil p \to_7 q)$ или $p \wedge^7 q =_{Df} \rceil(\rceil p \vee^7 \rceil q)$;

(2) $p \rightarrow_7 q =_{Df} (\rceil(p \vee^7 p)) \vee^7 (q \vee^7 q)$.

Утверждение доказано.

Q.E.D.

В работе [11] исследуется так называемая трехзначная *паранолная* логика $\mathbf{I^1}$, дуальная к $\mathbf{P^1}$. Это логика с одним выделенным значением и с исходными связками $\rceil$ и $\rightarrow_5$. Как и $\mathbf{P^1}$, логика $\mathbf{I^1}$ представима в терминах *естественных* p-логик.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Логика* $\mathbf{I^1}$ *есть p-логика со связками* $\vee^5$, $\wedge^5, \rceil$.

Доказательство. Покажем, что логика со связками $\rceil$ и $\rightarrow_5$ функционально эквивалентна логике со связками $\vee^5, \wedge^5, \rceil$. Это справедливо, поскольку имеют место следующие соотношения:

(1) $p \vee^5 q =_{Df} ((p \rightarrow_5 q) \rightarrow_5 q)$,
$p \wedge^5 q =_{Df} \rceil(\rceil\rceil p \rightarrow_5 \rceil q)$ или $p \wedge^5 q =_{Df} \rceil(\rceil p \vee^5 \rceil q)$;

(2) $p \rightarrow_5 q =_{Df} (\rceil(p \vee^5 p)) \vee^5 (q \vee^5 q)$.

Утверждение доказано.

Q.E.D.

Таким образом, следствием доказанных утверждений 3–5, является тот факт, что логики $\mathbf{P^1}$ и $\mathbf{I^1}$, ранее рассматриваемые в литературе исключительно как дуальные по отношению друг к другу и совершенно различные, с функциональной точки зрения представляют собой одну и ту же логику.

Заметим, что кроме $\mathbf{P^1}$ и $\mathbf{I^1}$ появилась некоммутативная функционально эквивалентная им логика со связками $\vee^4, \wedge^4, \rceil$, которую обозначим посредством $\mathbf{T^8}$.

В статье [9] указано, что логики $\mathbf{P^1}$ и $\mathbf{I^1}$ являются *комбинацией* двух изоморфов[2] классической логики $\mathbf{C_2}$, содержащихся в $\mathbf{B_3}$, однако, поскольку эти логики функционально эквивалентны, справедливо говорить о том, что логика $\mathbf{P^1}(\mathbf{I^1})$ *содержит* два изоморфа классической логики $\mathbf{C_2}$.

[2]Адаптируя терминологию Д.А. Бочвара [1] к языку настоящей работы, под трехзначным изоморфом $\mathbf{C_2}$ понимается фрагмент трехзначной логики по классу тавтологий, совпадающий с $\mathbf{C_2}$. Подробно об изоморфах см. [2].

Далее, рассмотрим другой класс естественных p-логик. Для удобства обозначим p-логику со связками $\vee^8, \wedge^8, \rceil$ как логику $\mathbf{T^7}$. Тогда можем указать целый класс p-логик, эквивалентных $\mathbf{T^7}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. *P-логика со связками $\vee^i, \wedge^i, \rceil (i \in \{1, 2, 6, 10, 12, 13, 18\})$ функционально эквивалентна логике $\mathbf{T^7}$.*

Доказательство. Учитывая ранее доказанное утверждение 2 и определение конъюнкции в p-логике, при доказательстве эквивалентности соответствующих p-логик достаточно показать взаимовыразимость дизъюнкций соответствующих p-логик. При доказательстве также будем учитывать следствие из доказанного утверждения 1, т.е. тот факт, что в p-логиках со связками $\vee^i, \wedge^i, \rceil$, где $(1 \leq i \leq 18$ и $i \neq 3)$ выразимо отрицание $\lceil$.

(а) Покажем, что p-логика со связками $\vee^i, \wedge^i, \rceil (i \in \{10, 12, 13, 18\})$ и логика $\mathbf{T^7}$ функционально эквивалентны. Это имеет место в силу соотношений:

(1) $p \vee^{10} q =_{Df} p \vee^8 \rceil\rceil q$,
$p \vee^8 q =_{Df} ((p \vee^{10} \lceil\lceil q) \vee^{10} \rceil\rceil q)$;

(2) $p \vee^{18} q =_{Df} p \vee^8 ((\rceil\rceil q \wedge^8 \rceil\rceil p) \vee^8 \lceil\lceil q)$,
$p \vee^8 q =_{Df} (p \vee^{18} \lceil\lceil q) \vee^{18} \rceil\rceil q)$;

(3) $p \vee^{12} q =_{Df} ((p \vee^8 q) \wedge^8 (\rceil q \vee^{18} \lceil\lceil p)) \vee^8 \lceil\lceil q$,
$p \vee^8 q =_{Df} (p \vee^{12} q) \vee^{12} \rceil\rceil q$;

(4) $p \vee^{12} q =_{Df} \lceil\lceil q \vee^{13} ((q \vee^{13} p) \wedge^{13} (\rceil q \vee^{13} \lceil\lceil p))$,
$p \vee^{13} q =_{Df} (q \vee^{12} p) \vee^{12} (p \vee^{12} q)$.

(б) Далее покажем, что p-логика со связками $\vee^i, \wedge^i, \rceil (i \in \{1, 2, 6\})$ и логика $\mathbf{T^7}$ функционально эквивалентны. Это имеет место в силу соотношений:

(1) $p \vee^1 q =_{Df} (\rceil\rceil p \wedge^2 \rceil q) \vee^2 (p \vee^2 q)$,
$p \vee^2 q =_{Df} (\lceil\lceil p \vee^1 \rceil\rceil q) \wedge^1 (p \vee^1 q)$;

(2) $p \vee^2 q =_{Df} q \vee^6 (p \vee^6 q)$,
$p \vee^6 q =_{Df} ((q \vee^2 p) \wedge^2 (\rceil q \vee^2 \lceil\lceil q)) \vee^2 \lceil\lceil p$;

(3) $p \vee^8 q =_{Df} p \vee^6 ((\lceil q \wedge^6 \rceil\rceil p) \vee^6 (\rceil p \wedge^6 \rceil\rceil q))$,
$p \vee^6 q =_{Df} ((p \vee^8 \rceil q) \vee^8 \lceil p) \wedge^8 (\lceil\lceil q \vee^8 \lceil\lceil p)$.

Очевидно, доказательство утверждения 6 следует из доказанных положений (а) и (б).

Q.E.D.

Далее,

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. *P-логика со связками $\vee^i, \wedge^i, \rceil (i \in \{9, 14, 16\})$ есть трехзначная логика Лукасевича* $\mathbf{Ł_3}$.

Доказательство.

(а) Сначала покажем, что p-логики со связками $\vee^9, \wedge^9, \rceil, \vee^{14}, \wedge^{14}, \rceil$ и $\vee^{16}, \wedge^{16}, \rceil$ попарно функционально эквивалентны. Учитывая определение конъюнкции в p-логике и то, что в указанных p-логиках выразимы $\sim$ и $\lceil$ (утверждения 1, 2), доказательство положения (а) следует из соотношений (1) и (2):

(1) $p \vee^9 q =_{Df} (p \vee^{16} q) \vee^{16} (\rceil\rceil q \wedge^{16} \lceil p)$,
$p \vee^{16} q =_{Df} (\sim q \wedge^9 q) \vee^9 (p \vee^9 q)$;

(2) $p \vee^{16} q =_{Df} ((p \vee^{14} q) \vee^{14} (\rceil\rceil p \wedge^{14} \lceil p)) \vee^{14} q$,
$p \vee^{14} q =_{Df} ((p \vee^{16} \lceil\lceil q) \vee^{16} (q \vee^{16} \lceil\lceil p)) \wedge^{16} (((\lceil\lceil q \wedge^{16} \rceil\rceil p) \vee^{16} (\rceil q \vee^{16} \lceil p))$.

(б) Докажем, что, например, p-логика со связками $\vee^{16}, \wedge^{16}, \rceil$ есть $\mathbf{Ł_3}$.

Это справедливо, с одной стороны, в силу функциональной предполноты $\mathbf{Ł_3}$, с другой стороны, в силу того, что посредством связок $\vee^{14}, \wedge^{14}, \rceil$ определима импликация логики Лукасевича (в нашем обозначении $\rightarrow_3$)[3].

$$p \rightarrow_3 q =_{Df} ((\sim p \wedge^{14} q) \vee^{14} (\rceil\rceil q \vee^{14} \lceil p)).$$

[3]Для доказательства достаточно определить импликацию Лукасевича, поскольку известно, что в логике со связками $\vee^{14}, \wedge^{14}, \rceil$ выразимо отрицание Лукасевича $\sim$ (доказанное ранее утверждение 2).

Таким образом, утверждение 7 доказано.

Q.E.D.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. *P-логики со связками* $\vee^{11}, \wedge^{11}, \urcorner$ *и* $\vee^{17}, \wedge^{17}, \urcorner$ *функционально эквивалентны.*

Доказательство. Доказательство утверждения следует из соотношений:

(1) $p \vee^{11} q =_{Df} p \vee^{17} (q \vee^{17} p)$,
$p \wedge^{11} q =_{Df} q \wedge^{17} (p \wedge^{17} q)$;

(2) $p \vee^{17} q =_{Df} ((p \vee^{11} q) \wedge^{11} q) \vee^{11} p$,
$p \wedge^{17} q =_{Df} ((p \wedge^{11} q) \vee^{11} q) \wedge^{11} p$.

Утверждение доказано.

Q.E.D.

Для удобства p-логику со связками $\vee^{11}, \wedge^{11}, \urcorner$ обозначим $\mathbf{T^5}$. P-логику со связками $\vee^{15}, \wedge^{15}, \urcorner$ обозначим $\mathbf{T^6}$.

Таким образом, класс естественных p-логик разбивается на пять подклассов: это p-логики, функционально эквивалентные логике Лукасевича $\mathbf{Ł_3}$, p-логики, функционально эквивалентные логике Сетте $\mathbf{P^1}$, p-логики, функционально эквивалентные логикам $\mathbf{T^5}$, $\mathbf{T^6}$, $\mathbf{T^7}$ соответственно. Связки конъюнкции и дизъюнкции в $\mathbf{T^7}$ и $\mathbf{T^6}$ являются некоммутативными. Интересно, что для логики $\mathbf{T^5}$ получили два эквивалентных построения с некоммутативными связками ($\vee^{17}, \wedge^{17}$) и коммутативными ($\vee^{11}$, $\wedge^{11}$).

Заметим, что таблицы для связок $\vee^{11}, \wedge^{11}$ логики $\mathbf{T^5}$ встречаются в работе [5], где приводится классификация трехзначных логик значения, исходя из свойств соответствующих им универсальных алгебр. Логика со связками $\vee^{11}, \wedge^{11}$ относится к классу слабых исчерпывающих логик значения.

В работе [7] описаны 11 предполных классов логики Бочвара $\mathbf{B_3}$ и логика $\mathbf{T^6}$ является одним из них. Заметим, с этой точки зрения, логика $\mathbf{P^1}$ есть класс всех внешних функций. Покажем, что это так.

В работе [8] В.И. Шестаков определяет штрих Шеффера γ для внешних связок $\mathbf{B_3}$

γ	1	$\frac{1}{2}$	0
1	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	0	1
0	0	1	1

Это множество связок он обозначает как $\mathbf{Б_1}$. Тогда докажем следующее утверждение:

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. *Логика* $\mathbf{P^1}$ *есть* $\mathbf{Б_1}$.

Доказательство. Докажем функциональную эквивалентность $\mathbf{P^1}$ и $\mathbf{Б_1}$.

Очевидно, связки $\mathbf{P^1}$ есть внешние связки $\mathbf{Б_1}$, т.е. они определимы посредством штриха Шеффера γ.

Далее посредством связок логики $\mathbf{P^1}$ определим штрих Шеффера γ. Согласно ранее доказанному утверждению 4, логика $\mathbf{P^1}$ есть логика со связками $\vee^7, \wedge^7, \lceil$, также в $\mathbf{P^1}$ выразимо отрицание $\rceil$ (доказанное утверждение 1). Тогда определить штрих Шеффера можно следующим образом:

$$p \,\gamma\, q =_{Df} (\rceil p \wedge^7 \lceil q) \vee^7 (\lceil p \wedge^7 \rceil q).$$

Утверждение 9 доказано.

Q.E.D.

Здесь стоит отметить, что класс внешних связок был впервые выделен в 1938 г. Д.А. Бочваром [1]. Как только что указывалось, специально этот класс рассмотрен в [8]. Здесь же представлены нормальные формы для $\mathbf{Б_1}$. Далее, в работе В.К. Финна [7] описаны все предполные классы $\mathbf{Б_1}$ — семь классов.

При изучении функциональных свойств p-логик относительно логики $\mathbf{P^1}$ справедливо следующее утверждение:

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. $\mathbf{P^1}$ *функционально вложима в некоторую p-логику со связками* $\vee, \wedge, \rceil$, *если p-логика обладает следующими свойствами:*

(1) p-логика функционально эквивалентна дважды p-логике (т.е. в p-логике выразимо отрицание $\lceil$*);*

(2) связки $\vee, \wedge$ *являются* **C***-расширяющими, т.е. сохраняются классические значения, когда аргументы принимают значения из множества* $\{0, 1\}$.

Доказательство. Для доказательства утверждения покажем, что посредством связок $\vee, \wedge, \rceil$ выразимы связки логики $\mathbf{P^1}$. Очевидно, достаточно показать, что выразимы $\vee^7, \wedge^7$.

$$p \vee^7 q =_{Df} \rceil\rceil p \vee \rceil\rceil q,$$

$$p \wedge^7 q =_{Df} \lceil\lceil p \wedge \lceil\lceil q.$$

Утверждение 10 доказано. Q.E.D.

Очевидными следствиями утверждения 10 являются следующие: (1) $\mathbf{P^1} \subset \mathbf{Ł_3}$; (2) $\mathbf{P^1} \subset \mathbf{T^7}$; (3) $\mathbf{P^1} \subset \mathbf{T^6}$; (4) $\mathbf{P^1} \subset \mathbf{T^5}$.

Далее покажем, что логики $\mathbf{T^5}$ и $\mathbf{T^6}$ функционально независимы, т.е. $\mathbf{T^5} \not\subset \mathbf{T^6}$ и $\mathbf{T^6} \not\subset \mathbf{T^5}$.

$\mathbf{T^6} \not\subset \mathbf{T^5}$, так как согласно утверждению 2 в $\mathbf{T^6}$ выразимо отрицание $\sim$, в то время как посредством связок $\mathbf{T^5}$ отрицание $\sim$ определить невозможно[4]. С другой стороны, как было ранее упомянуто, логика $\mathbf{T^6}$ есть предполный в $\mathbf{B_3}$ класс функций. Из построения нормальных форм (I-J-с.д.н.ф.) для логики $\mathbf{B_3}$ [6] следует, что, например, дизъюнкция $\vee^{11}$ логики $\mathbf{T^5}$ не определима в $\mathbf{B_3}$, а значит, ее нельзя определить и с помощью связок $\mathbf{T^6}$. Таким образом, $\mathbf{T^5} \not\subset \mathbf{T^6}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11. *Логика* $\mathbf{T^5}$ *функционально вложима в логику* $\mathbf{T^7}$.

Доказательство. Для доказательства достаточно посредством связок $\vee^1, \wedge^1, \rceil$ определить дизъюнкцию $\vee^{11}$. Это можно сделать, например, так:

$$p \vee^{11} q =_{Df} (p \vee^1 q) \vee^1 p.$$

Утверждение 11 доказано. Q.E.D.

---

[4]Свойства $\vee$, $\wedge$ логики $\mathbf{T^5}$ таковы, что (1) они принимают значение $\frac{1}{2}$ только в одном случае — при значении аргументов $\frac{1}{2}$; (2) $x \vee x = x$ и $x \wedge x = x$. Таким образом, посредством связок $\vee, \wedge, \rceil, \lceil$ определить $\sim$ нельзя.

УТВЕРЖДЕНИЕ 12. *Логика* $\mathbf{T^6}$ *функционально вложима в логику* $\mathbf{T^7}$.

Доказательство. Для доказательства достаточно посредством связок $\vee^1, \wedge^1, \rceil$ определить дизъюнкцию $\vee^{15}$. Это можно сделать, например, так:

$$p \vee^{15} q =_{Df} (\rceil\rceil p \wedge^1 \rceil q) \vee^1 q.$$

Утверждение 12 доказано. Q.E.D.

С другой стороны, свойства связок логики $\mathbf{T^7}$ таковы, что $\mathbf{T^7}$ не вложима ни в $\mathbf{T^5}$, ни в $\mathbf{T^6}$.

$\mathbf{T^7} \not\subset \mathbf{T^5}$, так как согласно утверждению 2 в $\mathbf{T^7}$ выразимо отрицание $\sim$, в то время как было ранее указано, посредством связок $\mathbf{T^5}$ отрицание $\sim$ определить невозможно.

$\mathbf{T^7} \not\subset \mathbf{T^6}$, поскольку $\mathbf{T^6} \subset \mathbf{B_3}$, и из построения нормальных форм (I-J-с.д.н.ф.) для логики $\mathbf{B_3}$ [6] следует, что, например, дизъюнкция $\vee^1$ логики $\mathbf{T^7}$ не определима в $\mathbf{B_3}$, а значит, ее нельзя определить и с помощью связок $\mathbf{T^6}$.

Далее, в силу функциональной предполноты логики $\mathbf{Ł_3}$ верно, что $\mathbf{T^7} \subset \mathbf{Ł_3}$. Однако $\mathbf{Ł_3}$ не вложима в $\mathbf{T^7}$, в противном случае, в $\mathbf{T^7}$ была бы выразима, например, сильная регулярная дизъюнкция $\vee$. Возьмем в качестве исходных связок $\mathbf{T^7}$ связки $\vee^1, \wedge^1, \rceil$.

Имеем: $0 \vee \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \vee 0 = \frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Свойства связок $\vee^1, \wedge^1$ таковы, что невозможно определить такую связку $\vee^{\text{x}}$, чтобы $0 \vee^{\text{x}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \vee^{\text{x}} 0 = \frac{1}{2}$ или $1 \vee^{\text{x}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \vee^{\text{x}} 1 = \frac{1}{2}$. Подобные рассуждения дают основания говорить, что $\mathbf{Ł_3} \not\subset \mathbf{T^7}$.

В результате, класс естественных p-логик образует решетку по отношению функционального вложения одной логики в другую, и в качестве элементов решетки выступают трехзначные логики — логика Лукасевича $\mathbf{Ł_3}$, логика Сетте $\mathbf{P^1}$, а также новые логики $\mathbf{T^5}$, $\mathbf{T^6}$, $\mathbf{T^7}$:

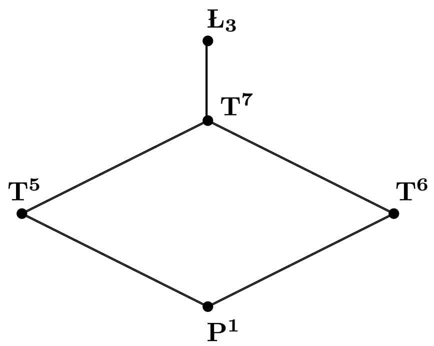

Рис.1. Решетка естественных p-логик

Литература

[1] *Бочвар Д.А.* Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления // Математический сборник. 1938. Т. 4. № 2. С. 287-308.

[2] *Девяткин Л.Ю.* Многозначные изоморфы классической пропозициональной логики. Дис. ... канд. филос. наук. М., 2008.

[3] *Карпенко А.С.* P-логики // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. (Материалы X Общероссийской научной конференции, 26-28 июня 2008 г., Санкт-Петербург.) СПб., 2008. С. 278-280.

[4] *Томова Н.Е.* Импликативные расширения регулярных логик Клини // Логические исследования. Вып. 16. М., 2010. С. 233-258.

[5] *Финн В.К., Аншаков О.М., Григолия Р.Ш., Забежайло М.И.* Многозначные логики как фрагменты формализованной семантики // Семиотика и информатика. 1980. Вып. 15. С. 27-60.

[6] *Финн В.К.* Аксиоматизация некоторых трехзначных исчислений высказываний и их алгебр // Философия в современном мире. Философия и логика. М.: Наука, 1974. С. 398-438.

[7] *Финн В.К.* О критерии функциональной полноты для B3 // Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам. М.: Наука, 1974. С. 194-199.

[8] *Шестаков В.И.* Об одном фрагменте исчисления Д.А. Бочвара // Информационные вопросы семиотики, лингвистики и автоматического перевода. ВИНИТИ. Вып. 1. М., 1971.

[9] *Karpenko A.S.* A maximal paraconsistent logic: The combination of two three-valued isomorphs of classical propositional logic // Fronties of Paraconsistent Logic. Baldock: Research Studies Press, 2000. P. 181-187.

[10] *Sette A.M.* On propositional calculus P1 // Mathematica Japonica. 1973. Vol. 18. № 3. P. 173-180.

[11] *Sette A.M. and Carnielli W.A.* Maximal weakly-intuitionistic logics // Studia Logica. 1995. Vol. 55. P. 181-203.