Об одном некартезианском расширении системы E[1]

Н. Н. Преловский

abstract. In this paper a non-Cartesian extension of relevant system E (of entailment) is considered.

Ключевые слова: тезис Сушко, релевантная логика, некартезианская логика, расширение системы E

В «Размышлениях о первой философии» [1] Рене Декарт пишет: «Итак, я сделаю предположение, что не всеблагой Бог, источник истины, но какой-то злокозненный гений, очень могущественный и склонный к обману, приложил всю свою изобретательность к тому, чтобы ввести меня в заблуждение: я буду мнить небо, воздух, землю, цвета, очертания, звуки и все вообще внешние вещи всего лишь пригрезившимися мне ловушками, расставленными моей доверчивости усилиями этого гения; я буду рассматривать себя как существо, лишенное рук, глаз, плоти и крови, каких-либо чувств: обладание всем этим, стану я полагать, было лишь моим ложным мнением; я прочно укореню в себе это предположение и тем самым даже если не в моей власти окажется познать что-то истинное, по крайней мере, от меня будет зависеть отказ от признания лжи, и я, укрепив свой разум, уберегу себя от обманов этого гения, каким бы он ни был могущественным и искусным».

Отметим, что уверенность Декарта в возможности избежать обманов злокозненного гения при помощи отрицания всего, что кажется истинным, по всей видимости, основана на хорошо известном свойстве классической логики, согласно которому, отрицая неистинные положения, мы получаем положения истинные.

[1]Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 11-03-00761а.

Однако многозначные логики, выступающие в качестве возможных альтернатив классики, в общем случае не обладают вышеназванным свойством. Поэтому логики, в которых отрицание не являющегося истинным суждения само не обязательно является истинным, можно назвать *некартезианскими*.

Более того, в большинстве известных многозначных логик, как и в классической логике, имеется достаточное количество выразительных языковых средств для различения каждой пары значений в наименьших по мощности характеристических для данных логик матрицах. Быть может, именно это свойство логических построений играет ключевую роль во всей аргументации Декарта? Поясним, что подразумевается под различением пар значений в логической матрице. Для этого дадим ряд определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (Язык, формулы, множества формул).

Языком будем называть пару $L = \langle \{p_1, p_2, ...\}, \{C_{n_1}, C_{n_2}, \dots, C_{n_m}\} \rangle$, где $\{p_1, p_2, \dots\}$ есть счетное множество пропозициональных переменных, а $\{C_{n1}, C_{n2}, \dots, C_{nm}\}$ — конечное множество n_i-местных логических связок, $1 \leq i \leq m$.

С помощью F будем обозначать множество всех правильно построенных в языке L формул. Формулы из F будем обозначать греческими буквами α, β, δ, возможно, с индексами. Для обозначения произвольных множеств формул из F будем использовать заглавные греческие буквы Γ, Δ, Θ, возможно, с индексами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (Логика, логическая система).

Под логикой будем понимать пару $LOG = \langle F, \vdash_{LOG} \rangle$, где $\vdash_{LOG}$ есть отношение логического следования между множествами формул и формулами, определенное на F.

Логической системой (исчислением), соответствующей (соответствующим) логике LOG, будем называть пару $LS(LOG) = \langle \Delta_A, R \rangle$, где Δ_A есть конечное множество формул из F, называемых схемами аксиом, а R есть конечное множество правил вывода в стандартной Гильбертовской формулировке, такую, что обычным образом определенное в $LS(LOG)$ отношение выводимости в точности совпадает с отношением следования $\vdash_{LOG}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (Логическая матрица, оценка, семантика).

Под логической матрицей будем понимать пару $M = \langle V, D \rangle$, где V есть непустое множество логических значений, $D \subset V$ – непустое множество выделенных значений.

Оценкой § в матрице M будем называть гомоморфное отображение §: $F \mapsto V$.

В дальнейшем будут также использоваться стандартные понятия выполнимости и общезначимости формул, а также следования в матрице M и характеристической матрицы.

Под матричной семантикой логики LOG будем понимать множество всех оценок $SEM(LOG) = \{§_i\colon F \mapsto V\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 (Различение значений матрицы M). Значения v_1 и v_2 матрицы M называются различимыми, если и только если:

- $v_1 \in D \Leftrightarrow v_2 \notin D$, либо
- в F имеется формула $\alpha(p_i)$, включающая лишь вхождения логических связок и единственной пропозициональной переменной p_i, такая, что $\forall §_1, §_2 \in SEM(LOG)$:

$$§_1(p_i) \in \{v_1, v_2\} \ \&\ §_2(p_i) \in \{v_1, v_2\} \ \&\ §_1(p_i) \neq §_2(p_i) \Rightarrow \\ §_1(\alpha(p_i)) \in D \Leftrightarrow §_2(\alpha(p_i)) \notin D.$$

Заметим, что в наименьших по мощности характеристических матрицах большинства известных многозначных логик, как и в классической логике, любая пара значений v_1 и v_2 является различимой в указанном выше смысле. Однако данное свойство не является априорно присущим произвольной многозначной логике. Логики, в наименьших по мощности характеристических матрицах которых имеются неразличимые значения, могут быть названы *сильно некартезианскими.*

Сильно некартезианские логики играют важную роль в дискуссиях вокруг так называемого тезиса Сушко, согласно которому все логики являются логически двузначными. Эта роль обусловлена тем, что для сильно некартезианских логик невозможно построить бивалентную семантику в соответствии с алгоритмами, приводящимися в серии работ К. Калейро и других авторов (например, в [2]).

Рассмотрим теперь, чтобы не быть голословными, одну интересную сильно некартезианскую логику $Sm_4^{\sim}$[2]. Множество связок языка L данной логики есть множество $\{\sim, \vee, \wedge, \rightarrow\}$.

Оценками в семантике $SEM(Sm_4^{\sim})$ будем считать всевозможные гомоморфные отображения $\S$: $F \mapsto \{t, b, n, f\}$ в соответствии со следующими истинностными таблицами:

$\vee$	t^*	b	n	f
t^*	t	t	t	t
b	t	b	t	b
n	t	t	n	n
f	t	b	n	f

$\wedge$	t^*	b	n	f
t^*	t	b	n	f
b	b	b	f	f
n	n	f	n	f
f	f	f	f	f

$\rightarrow$	t^*	b	n	f
t^*	t	f	f	f
b	t	t	f	f
n	t	f	t	f
f	t	t	t	t

x	$\sim x$
t^*	f
b	n
n	b
f	t

Будем также считать, что на множестве истинностных значений $\{t, b, n, f\}$ установлен следующий частичный порядок: $t \geq b \geq f, t \geq n \geq f$. Данный порядок сохраняется и на произвольных подмножествах множества $\{t, b, n, f\}$.

Следование в семантике $SEM(Sm_4^{\sim})$ определяется стандартным образом, как сохранение выделенного значения от посылок к заключениям.

Исчисление $Sm_4^{\sim}$ является расширением системы E (of Entailment) релевантной логики. Система $Sm_4^{\sim}$ является взрывоопасным[3] расширением системы E.

Значения b и n являются в матрице данной логики неразличимыми в указанном выше смысле. Это означает, что для данной

---

[2] $Sm_4^{\sim}$ является сокращенным названием для четырехзначной логики, табличные определения связок которой совпадают с табличными определениями связок матрицы Смайли с одним выделенным значением и инволюцией в качестве отрицания. О матрице Смайли см. в [3], [4].

[3] Термин «взрывоопасная (explosive)» в отношении к логике является распространенным в англоязычной литературе обозначением для непаранепротиворечивых логик.

логики невозможно построить бивалентную семантику, используя алгоритм Калейро. По-видимому, решающим фактом здесь является то, что логика $Sm_4^{\sim}$ является модальной, поскольку попытки уменьшить мощность матрицы, соответствующей данной логике, приводят к тому, что общезначимые модальные формулы теряют свою общезначимость.

Литература

[1] *Декарт Р.* Размышления о первой философии // Декарт Р. Сочинения. Т. 2. М.: Мысль. 1994. С. 20.

[2] *Caleiro C., Carnielli W., Coniglio M. E., Marcos J.* Two's company: The humbug of many logical values // J.-Y. Beziau (ed.) Logica Universalis. Birkhäuser Verlag. 2005. P. 169–189.

[3] *Anderson A., Belnap N.* Entailment: The Logic of Relevance and Necessity. Vol. I. Princeton University Press. 1975. P. 161-162.

[4] *Карпенко А.С.* Развитие многозначной логики. М.: URSS, 2010. С. 141-142.