Хорошо определенные логики[1]

И. А. Горбунов

abstract. Some questions concerned the deduction theorem for consequence operations and sentential calculi are considered in the present paper.

Ключевые слова: теорема о дедукции, дедуктивные пропозициональные системы

1 Предисловие

В отношении ее математического содержания данная работа является скорректированным и доработанным пересказом некоторых фактов из работы Ризарда Вуйцицкого [1] (или см. [2]). В частности утверждения 6–10 и 12 являются несколько уточненными фактами из указанной работы. К сожалению, в оригинале эти факты сформулированы и доказаны не совсем корректно. Утверждения 11, 13 и 14 доказаны и сформулированы автором этой работы.

2 Введение

Мы пока не будем определять, что такое логика, а будем опираться на ее интуитивное понимание. Отметим только, что всякая логика определяет (и в синтаксическом случае сама полностью определяется через) *отношение логического следования*, устанавливаемое между списками предложений языка и предложениями языка. Это отношение сопоставляет списку предложений, называемых *посылками*, некоторое предложение, которое называется их *следствием*.

Отношение логического следования, в свою очередь, некоторым образом выражается в естественном языке. Таким образом,

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 08–06–00414 и 10–06–00360.

выделение логики языка посредством этого же языка предполагает, что язык уже располагает некоторыми средствами представления логического следования. То есть в нем существует логическая связка (или формула), назначение которой — выражать в пропозициональном языке отношение логического следования. Если в языке существует такая связка, то, видимо, ее и стоит называть *импликацией*. Связку эту, как обычно, будем обозначать $\to$.

Частным примером импликации является *материальная импликация*. Обычно в русском языке эта связка передается включением в предложение словосочетания «Если ..., то...».

Изложение всякой логики происходит в русском же языке и в таком изложении мы вполне можем ожидать появления предложения следующего вида: «Если мы имеем формулу φ в качестве посылки, то имеем формулу ψ в качестве следствия». В этом предложении импликация представляет отношение выводимости (которое обычно обозначается символом $\vdash$), существующее в логике. Совокупность всех таких предложений языка, видимо, имеет свою логику. В этой работе мы попробуем приблизиться к этой логике и исследуем, какими же свойствами должны обладать логики, в которых импликация представляет отношение выводимости.

Рассмотрим следующую модель пропозиционального языка. Пусть V — счетное множество символов, называемых *пропозициональными переменными*, и Σ — не более чем счетное множество конечноместных функциональных символов, называемых *пропозициональными связками*. Пару $\langle V, \Sigma\rangle$ будем называть *пропозициональным алфавитом*. Всякий терм, построенный из символов алфавита $\langle V, \Sigma\rangle$, будем называть *формулой*. *Языком* S будем называть множество всех формул алфавита $\langle V, \Sigma\rangle$. *Подстановку* определим обычным образом, т. е. как гомоморфизм $\varepsilon : S \to S$, который является продолжением отображения $\varepsilon : V \to S$. Обозначим через $\mathbf{E}$ множество всех подстановок.

Функцию $C : 2^S \to 2^S$ будем называть *операцией присоединения следствий* над языком S, или, кратко, *следованием*, если для любых $X, Y \in 2^S$

A1. $X \subseteq C(X)$,

A2. $C(X) = C(C(X))$,

A3. $X \subseteq Y \Rightarrow C(X) \subseteq C(Y)$,

A4. множество $C(\varnothing)$ замкнуто относительно подстановки.

Следование C будем называть *структурным*, если для любой подстановки ε и любого множества формул X выполняется условие $\varepsilon(C(X)) \subseteq C(\varepsilon(X))$. Следование будем называть *финитарным*, если для любого X верно, что $C(X) = \bigcup_{Y \subseteq X} C(Y)$, где Y — конечное множество. Структурное и финитарное следование будем называть *стандартным*.

Пару $\langle S, C\rangle$, где C — структурная операция присоединения следствий, будем называть *пропозициональной логикой*, или, для краткости, *логикой*.

Любое подмножество $\rho \subseteq 2^S \times S$ будем называть *правилом*, а любой элемент этого подмножества будем называть *схемой*. Будем говорить, что правило ρ *порождено схемой* $\langle X, \alpha\rangle$, если $\rho = \{\langle \varepsilon(X), \varepsilon(\alpha)\rangle \mid \varepsilon \in \mathbf{E}\}$. Такое правило будем обозначать $\rho_{X/\alpha}$ (или, если это не будет вызывать недоразумений, просто X/α) и называть *секвенцией*. Секвенцию $\varnothing/\alpha$ будем называть *тавтологией* и обозначать ее просто α.

Множество $X \in 2^S$ будем называть замкнутым относительно правила ρ, если для любого $Y \subseteq X$ и для любого $\alpha \in S$ верно, что если $\langle Y, \alpha\rangle \in \rho$, то и $\alpha \in X$. Будем говорить, что следование C *базируется на множестве правил вывода* R (символически обозначать $C = C_R$), если для любого $X \in 2^S$ множество $C(X)$ является наименьшим множеством, содержащим X и замкнутым относительно каждого правила из R. Для данного следования C множество $C(X)$ будем называть *теорией* со множеством *аксиом* X.

3 Некоторые свойства операции присоединения следствий

Множество следствий конечного множества $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ будем обозначать $C(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Множество следствий из множества $\{\alpha\} \cup X$ будем обозначать как $C(\alpha, X)$. Докажем некоторые свойства операции присоединения следствий.

ТЕОРЕМА 1. *Если $\alpha \in C(X)$, то $C(\alpha, X) = C(X)$.*

Доказательство. Так как $X \subseteq \{\alpha\} \cup X$, то в силу свойства $A3$ $C(X) \subseteq C(\alpha, X)$. Докажем обратное включение.

Заметим, что $\{\alpha\} \cup X \subseteq \{\alpha\} \cup C(X) = C(X)$ и значит верно, что $C(\alpha, X) \subseteq C(\{\alpha\} \cup C(X)) = C(C(X)) = C(X)$. Q.E.D.

ТЕОРЕМА 2. $Y \subseteq C(X) \Leftrightarrow C(Y) \subseteq C(X)$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $Y \subseteq C(X)$, тогда, в силу $A2$ и $A3$ верно, что $C(Y) \subseteq C(C(X)) = C(X)$.

($\Leftarrow$) Пусть $C(Y) \subseteq C(X)$. В силу $A1$ верно, что $Y \subseteq C(Y)$, тогда $Y \subseteq C(X)$. Q.E.D.

СЛЕДСТВИЕ 1. $\alpha \in C(X) \Leftrightarrow C(\alpha) \subseteq C(X)$

ТЕОРЕМА 3. $C(X) \cup C(Y) \subseteq C(X \cup Y)$

Доказательство. Так как $X \subseteq X \cup Y$ и $Y \subseteq X \cup Y$. Следовательно $C(X) \subseteq C(X \cup Y)$ и $C(Y) \subseteq C(X \cup Y)$. Таким образом $C(X) \cup C(Y) \subseteq C(X \cup Y)$. Q.E.D.

ТЕОРЕМА 4. $C(C(X) \cup C(Y)) = C(X \cup Y)$

Доказательство. Включение $C(C(X) \cup C(Y)) \subseteq C(X \cup Y)$ следует из предыдущей теоремы. Докажем обратное включение. Так как $X \subseteq C(X)$ и $Y \subseteq C(Y)$, то $X \cup Y \subseteq C(X) \cup C(Y)$. Q.E.D.

4 Хорошо определенная логика

Поскольку импликация в языке нашей логики должна выражать отношение выводимости из списка посылок, то язык должен содержать также связку, объединяющую посылки в список. Таким образом, будем рассматривать логики в языке, содержащем связки импликации $\to$ и конъюнкции $\wedge$. При этом предполагаем, что конъюнкция обладает свойствами коммутативности и ассоциативности. Поэтому посредством квазиформулы $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ будем обозначать конъюнкцию формул $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, взятых в произвольном порядке и с произвольной (но правильной) расстановкой скобок, запись $[\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n]$ будет означать множество всех таких конъюнкций. Запись $[\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \alpha]$

будет обозначать множество всех импликаций, в посылках которых стоят конъюнкции, соответствующие данной квазиформуле. Пусть X — некоторое конечное множество формул, посредством $X^{\wedge}$ будем обозначать некоторую конъюнкцию всех формул из этого множества.

Будем считать, что операция присоединения следствий C в нашем языке уже задана и к тому же согласована с импликацией и конъюнкцией следующим образом:

B1. $[\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \ \alpha] \subseteq C(\varnothing) \ \Leftrightarrow \ \alpha \in C(\alpha_1, \ \ldots \ , \alpha_n)$.

Верно следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 5. *Условие* B1 *эквивалентно следующему множеству условий:*

C1. C — *стандартное следование;*

C2. $\alpha \to \ \beta \in C(\varnothing) \ \Leftrightarrow \ \beta \in C(\alpha)$*;*

C3. $C(\alpha \wedge \beta) = C(\alpha, \ \beta)$*.*

Для его доказательства нам потребуется следующая

ЛЕММА 1. *Пусть* C — *такое следование, что для него верно, что* $C(\alpha\wedge\beta) = C(\alpha, \ \beta)$*, тогда для него верны равенства* $C((\alpha\wedge \beta) \wedge \gamma) = C(\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) = C(\alpha, \beta, \gamma)$*.*

Доказательство.

$$\begin{aligned} &C((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma) = C(\alpha \wedge \beta, \gamma) = C(C(\alpha \wedge \beta), C(\gamma)) = \\ &= C(C(\alpha, \beta), C(\gamma)) = C(\alpha, \beta, \gamma) = C(C(\alpha), C(\beta, \gamma)) = \\ &= C(C(\alpha), C(\beta \wedge \gamma)) = C(\alpha, \beta \wedge \gamma) = C(\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Доказательство. (Доказательство теоремы 5).

($\Rightarrow$) 1) Финитарность операции C следует из того, что $\alpha \in C(X)$ тогда и только тогда, когда существует такое конечное множество формул $\{\alpha_1, \ \ldots, \ \alpha_n\} \subseteq X$, что $[\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \ \alpha_n \to \ \alpha] \subseteq C(\varnothing)$.

Поскольку множество $C(\varnothing)$ замкнуто относительно всех подстановок, то для любой подстановки ε верно, что если формула $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \ \alpha_n \to \ \alpha \in C(\varnothing)$, то и $\varepsilon\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \ \varepsilon\alpha_n \to \ \varepsilon\alpha \in C(\varnothing)$.

Таким образом, для любой формулы α и любой подстановки ε верно, что если $\alpha \in C(X)$, то и $\varepsilon\alpha \in C(\varepsilon X)$. Откуда следует, что $\varepsilon C(X) \subseteq C(\varepsilon X)$.

2) Условие C2 совпадает с условием B1, при $n = 1$.

3) По условию B1:

$$\gamma \in C(\alpha,\ \beta) \Leftrightarrow [\alpha \wedge \beta \to \gamma] \subseteq C(\varnothing) \Leftrightarrow \gamma \in C(\alpha \wedge \beta).$$

($\Leftarrow$) Индукцией по $n \geq 1$ докажем, что из условий C1–C3 следует условие $B1$.

Базис очевиден. Пусть для $k = n - 1$ верно, что

$$\alpha \in C(\alpha_1,\ \dots\ ,\alpha_k)\ \Leftrightarrow\ [\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k \to\ \alpha] \subseteq C(\varnothing).$$

Таким образом, $C(\alpha_1,\ \dots\ ,\alpha_{n-1}) = C(\alpha_1 \wedge\ \dots\ \wedge \alpha_{n-1})$.

Пусть $\alpha \in C(\alpha_1,\ \dots\ ,\alpha_n)$. Поскольку верно следующее включение — $C(\alpha_1 \wedge\ \dots\ \wedge \alpha_{n-1}) \subseteq C(\alpha_1 \wedge\ \dots\ \wedge \alpha_{n-1}, \alpha_n)$, то $\{\alpha_1,\ \dots\ ,\alpha_n\} \subseteq C(\alpha_1 \wedge\ \dots\ \wedge \alpha_{n-1}, \alpha_n)$. Следовательно, верно, что $C(\{\alpha_1,\ \dots\ ,\alpha_n\}) \subseteq C(C(\alpha_1 \wedge\ \dots\ \wedge \alpha_{n-1}, \alpha_n))$. При этом в силу условия C3 и леммы 1, мы получаем следующее равенство $C(\alpha_1 \wedge\ \dots\ \wedge \alpha_{n-1}, \alpha_n) = C(\alpha_1 \wedge\ \dots\ \wedge \alpha_{n-1} \wedge \alpha_n)$. Также имеем, что $C(C(\alpha_1 \wedge\ \dots\ \wedge \alpha_{n-1}, \alpha_n)) = C(\alpha_1 \wedge\ \dots\ \wedge \alpha_{n-1}, \alpha_n)$. Поэтому $C(\alpha_1,\ \dots\ ,\alpha_n) \subseteq C(\alpha_1 \wedge\ \dots\ \wedge \alpha_n)$. Таким образом, $\alpha \in C(\alpha_1 \wedge\ \dots\ \wedge \alpha_n)$ и, следовательно, в силу условия C2 верно, что $[\alpha_1 \wedge \ldots \wedge\ \alpha_n \to\ \alpha] \subseteq C(\varnothing)$.

Пусть $[\alpha_1 \wedge \ldots \wedge\ \alpha_n \to\ \alpha] \subseteq C(\varnothing)$ и, значит, $\alpha \in C(\alpha_1 \wedge\ \dots\ \wedge \alpha_n)$. Так как $\{\alpha_1,\ \dots\ ,\alpha_{n-1}\} \subseteq \{\alpha_1,\ \dots\ ,\alpha_n\}$, то следовательно $C(\alpha_1 \wedge\ \dots\ \wedge \alpha_{n-1}) \subseteq C(\alpha_1,\ \dots\ ,\alpha_n)$. Таким образом, формула $\alpha_1 \wedge\ \dots\ \wedge \alpha_{n-1} \in C(\alpha_1,\ \dots\ ,\alpha_n)$. Отсюда не сложно заметить следующее включение: $\{\alpha_1 \wedge\ \dots\ \wedge \alpha_{n-1}, \alpha_n\} \subseteq C(\alpha_1,\ \dots\ ,\alpha_n)$. Следовательно, получаем, что $C(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \subseteq C(\alpha_1,\ \dots\ ,\alpha_n)$.

Q.E.D.

Логика, следование в которой удовлетворяет условиям C1–C3, в работах Ризарда Вуйицкого ([1] и [2]) была названа *хорошо определенной логикой* (well-determined logic). Там же определено и понятие *дедуктивного множества формул.*

Далее следование в хорошо определенной логике мы будем называть *хорошо определенным следованием.*

5 Дедуктивные множества

Множество формул L будем называть *дедуктивным* тогда и только тогда, когда существует такая хорошо определенная логика C, что $C(\varnothing) = L$.

Формулы, содержащие в качестве связки только конъюнкцию, везде далее будем обозначать маленькими греческими буквами с индексом $\wedge$, например $\alpha^{\wedge}$. Множество пропозициональных переменных, входящих в формулу α, будем обозначать $Var(\alpha)$.

ЛЕММА 2. *Если множество L является дедуктивным, то оно удовлетворяет следующим условиям:*

1. *Множество L замкнуто относительно всех подстановок.*

2. *Для любых формул $\alpha^{\wedge}$ и $\beta^{\wedge}$ верно, что если имеет место включение $Var(\beta^{\wedge}) \subseteq Var(\alpha^{\wedge})$, то $\alpha^{\wedge} \to \beta^{\wedge} \in L$.*

3. *Множество L замкнуто относительно следующих правил вывода:*

$$(TR)\frac{p \to q, q \to r}{p \to r} \qquad (CM)\frac{p_1 \to q_1, p_2 \to q_2}{p_1 \wedge p_2 \to q_1 \wedge q_2} \qquad (AD)\frac{p, q}{p \wedge q}$$

$$(CV)\frac{p, p \wedge q \to r}{q \to r} \qquad (MP)\frac{p, p \to q}{q} \qquad (EA)\frac{p \to q}{p \wedge r \to q}.$$

Доказательство. Пусть множество L дедуктивно, значит, существует такое хорошо определенное стандартное следование C, что $C(\varnothing) = L$.

1. Поскольку C — структурное, то множество $C(\varnothing) = L$ замкнуто относительно всех подстановок.

2. В силу леммы 1 и свойства C3 верны следующие равенства: $C(\alpha^{\wedge}) = C(Var(\alpha^{\wedge}))$ и $C(\beta^{\wedge}) = C(Var(\beta^{\wedge}))$. Тогда, если $Var(\beta^{\wedge}) \subseteq Var(\alpha^{\wedge})$, то, следовательно, $C(Var(\beta^{\wedge})) \subseteq C(Var(\alpha^{\wedge}))$ и значит $C(\beta^{\wedge}) \subseteq C(\alpha^{\wedge})$. Таким образом, $\beta^{\wedge} \in C(\alpha^{\wedge})$, откуда следует, что $\alpha^{\wedge} \to \beta^{\wedge} \in C(\varnothing)$.

3. (TR) Пусть $p \to q \in C(\varnothing)$ и $q \to r \in C(\varnothing)$. Значит $q \in C(p)$ и $r \in C(q)$. Так как по следствию 1 $C(q) \subseteq C(p)$, то $r \in C(p)$ и, следовательно, $p \to r \in C(\varnothing)$.

(CM) Пусть $p_1 \to q_1 \in C(\varnothing)$ и $p_2 \to q_2 \in C(\varnothing)$, тогда $q_1 \in C(p_1)$ и $q_2 \in C(p_2)$. Так как $\{p_1\} \subseteq \{p_1, p_2\}$, $\{p_2\} \subseteq \{p_1, p_2\}$ и, по теореме 5, $C(p_1, p_2) = C(p_1 \wedge p_2)$, то верно, что $C(p_1) \subseteq C(p_1 \wedge p_2)$ и $C(p_2) \subseteq C(p_1 \wedge p_2)$. Таким образом, множество $\{q_1, q_2\} \subseteq C(p_1 \wedge p_2)$. Тогда, по теореме 2, $C(q_1, q_2) \subseteq C(p_1 \wedge p_2)$. Отсюда следует, что $C(q_1 \wedge q_2) \subseteq C(p_1 \wedge p_2)$, и, в силу указанного выше следствия, $q_1 \wedge q_2 \in C(p_1 \wedge p_2)$. Следовательно, $p_1 \wedge p_2 \to q_1 \wedge q_2 \in C(\varnothing)$.

(CV) Пусть $p \in C(\varnothing)$ и $p \wedge q \to r \in C(\varnothing)$. В силу свойства A3 из первого следует, что $p \in C(q)$, и, значит, по теореме 1, $C(p, q) = C(q)$. Из второго условия следует, что $r \in C(p, q)$. Таким образом, $r \in C(q)$ и, значит, $q \to r \in C(\varnothing)$.

(MP) Пусть $p \in C(\varnothing)$ и $p \to q \in C(\varnothing)$. Таким образом, $q \in C(p)$ и $C(p) \subseteq C(\varnothing)$. Значит, $q \in C(\varnothing)$.

(AD) Пусть $p \in C(\varnothing)$ и $q \in C(\varnothing)$. Тогда, по свойствам A2 и A3, получаем, что $C(p, q) \subseteq C(\varnothing)$, а, значит, и $C(p \wedge q) \subseteq C(\varnothing)$. Таким образом, $p \wedge q \in C(\varnothing)$.

(EA) Пусть $p \to q \in C(\varnothing)$. Таким образом, $q \in C(p)$. Так как $\{p\} \subseteq \{p, r\}$, то $C(p) \subseteq C(p, r)$ и, значит, $q \in C(p, r)$. Следовательно, $p \wedge r \to q \in C(\varnothing)$. Q.E.D.

Пусть L — непустое множество формул. Посредством $\vec{L}$ обозначим одноместную операцию на множестве 2^S, котрую определим следующим образом:

$$(1) \quad \alpha \in \vec{L}(X) \Leftrightarrow \exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in X \cup L\ (\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \alpha \in L).$$

Пусть X — некоторое множество, посредством R_X будем обозначать множество всех правил вывода, относительно которых множество X замкнуто.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть L — некоторое множество формул, замкнутое относительно подстановки, для которого верно, что $\{\alpha^\wedge \to \beta^\wedge | Var(\beta^\wedge) \subseteq Var(\alpha^\wedge)\} \subseteq L$ и $\{(TR), (CM)\} \subseteq R_L$. Тогда $\vec{L}$ является стандартным следованием, причем $L \subseteq \vec{L}(\varnothing)$.*

Доказательство. Докажем, что $\vec{L}$ является операцией присоединения следствий.

(A1) Пусть $\alpha \in X$, так как $\alpha \to \alpha \in L$, то, по (1), $\alpha \in \vec{L}(X)$.

(A3) Пусть $X \subseteq Y$. Если $\alpha \in \vec{L}(X)$, то, по условию (1), $\exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in X \cup L\ (\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \alpha \in L)$. Так как $X \subseteq Y$, то $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in Y \cup L$ и, значит, $\alpha \in \vec{L}(Y)$.

(A2) Включение $\vec{L}(X) \subseteq \vec{L}(\vec{L}(X))$ следует из A1. Докажем обратное включение.

Пусть формула $\alpha \in \vec{L}(\vec{L}(X))$, тогда в силу условия (1) верно, что $\exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L \cup \vec{L}(X)$ $(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \alpha \in L)$.

Заметим, что если $\alpha \in L$, то, так как $\alpha \to \alpha \in L$, имеем $\alpha \in \vec{L}(\varnothing)$. Следовательно, $L \subseteq \vec{L}(\varnothing)$ и, значит, $L \cup \vec{L}(X) = \vec{L}(X)$.

Таким образом, для любого $1 \leq i \leq n$, верно, что $\alpha_i \in \vec{L}(X)$ и, значит, в силу (1), существуют формулы $\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{im_i} \in L \cup X$ такие, что $\alpha_{i1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{im_i} \to \alpha_i \in L$.

Введем следующие обозначения. Положим $\beta_i = \alpha_{i1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{im_i}$, $\beta^1 = \beta_1$, $\alpha^1 = \alpha_1$ и для любого $1 \leq k \leq n-1$, $\beta^{k+1} = \beta^k \wedge \beta_{k+1}$ и $\alpha^{k+1} = \alpha^k \wedge \alpha_{k+1}$.

Применяем (CM). Для любого $1 \leq k \leq n-1$:

$$\frac{\beta^k \to \alpha^k, \beta_{k+1} \to \alpha_{k+1}}{\beta^{k+1} \to \alpha^{k+1}}.$$

Затем применяем (TR):

$$\frac{\beta^n \to \alpha^n, \alpha^n \to \alpha}{\beta^n \to \alpha}.$$

Таким образом, формула $\beta^n \to \alpha \in L$. Поскольку при этом верно, что $\{\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1m_1}, \ldots, \alpha_{n1}, \ldots, \alpha_{nm_n}\} \subseteq X \cup L$, то $\alpha \in \vec{L}(X)$. Следовательно $\vec{L}(\vec{L}(X)) \subseteq \vec{L}(X)$ и, значит, $\vec{L}(X) = \vec{L}(\vec{L}(X))$.

Чтобы доказать стандартность следования $\vec{L}$, докажем сначала его структурность.

Пусть $\alpha \in \varepsilon\vec{L}(X)$, тогда существует такая формула β, что $\alpha = \varepsilon\beta$, и существуют формулы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L \cup X$ такие, что формула $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \beta \in L$. Так как множество L замкнуто относительно любой подстановки, то $\varepsilon\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \varepsilon\alpha_n \to \varepsilon\beta \in L$. Поскольку при этом $\varepsilon\alpha_1, \ldots, \varepsilon\alpha_n \in L \cup \varepsilon X$, то $\alpha = \varepsilon\beta \in \vec{L}(\varepsilon X)$. Таким образом, $\varepsilon\vec{L}(X) \subseteq \vec{L}(\varepsilon X)$.

Остается доказать финитарность. Пусть $\alpha \in \vec{L}(X)$, тогда, по условию (1), $\exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L \cup X$ $(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \alpha \in L)$. Пусть $Y = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \cap X$. По условию (1) получаем, что $\alpha \in \vec{L}(Y)$, так как $\exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L \cup Y$ $(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \alpha \in L)$. Заметим, что множество Y является конечным подмножеством множества X.

Q.E.D.

Далее операцию $\vec{L}$, определенную для множества L, удовлетворяющего условиям теоремы 6, будем называть *импликативным следованием над* множеством L.

ЛЕММА 3. *Пусть L — некоторое множество формул, для которого выполненны условия теоремы 6. Для следования $\vec{L}$ верно, что $\vec{L}(\varnothing) = L$, если $\{(AD), (MP)\} \subseteq R_L$.*

Доказательство. Включение $L \subseteq \vec{L}(\varnothing)$ доказано в теореме 6, докажем обратное включение. Пусть $\alpha \in \vec{L}(\varnothing)$, следовательно существуют формулы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$ такие, что формула $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \alpha \in L$. Применяя $n-1$ раз правило (AD), получим, что $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \in L$ и, следовательно, по правилу (MP), $\alpha \in L$.

Q.E.D.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть L — некоторое множество формул. Операция $\vec{L}$ является хорошо определенным следованием, для которого $\vec{L}(\varnothing) = L$, если и только если*

L замкнуто относительно подстановки,

$\{\alpha^\wedge \to \beta^\wedge | Var(\beta^\wedge) \subseteq Var(\alpha^\wedge)\} \subseteq L$ *и*

$\{(TR), (CM), (AD), (MP), (CV), (EA)\} \subseteq R_L$.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Следует из леммы 2.

($\Leftarrow$) Докажем, что $\vec{L}$ является следованием хорошо определенной логики.

(C1) Что $\vec{L}$ является стандартным следованием, для которого $\vec{L}(\varnothing) = L$, доказано в теореме 6 и лемме 3.

(C2) ($\Leftarrow$) Пусть $\alpha \in \vec{L}(\beta)$, тогда существуют такие формулы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L \cup \{\beta\}$, что $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \alpha \in L$.

Возможны два случая.

1) Формула $\beta \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Так как $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \alpha \in L$, то, используя правило (EA), получаем, что $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \wedge \beta \to \alpha \in L$.

2) Для некоторого $1 \leq i \leq n$ формула $\beta = \alpha_i$. Заметим, что поскольку $\{\alpha^\wedge \to \beta^\wedge | Var(\beta^\wedge) \subseteq Var(\alpha^\wedge)\} \subseteq L$ и множество L замкнуто отросительно подстановки и правила (TR), то если верно, что $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \alpha \in L$, то верно и $[\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \alpha] \subseteq L$. Тогда получаем, что

$$(\alpha_1 \wedge (\ldots \wedge (\alpha_{i-1} \wedge (\alpha_{i+1} \wedge (\ldots \wedge (\alpha_n \wedge \beta) \ldots) \to \alpha \in L.$$

Теперь применением в обоих случаях соответствующего числа раз правила (CV) получим, что $\beta \to \alpha \in L$.

($\Rightarrow$) Пусть $\beta \to \alpha \in L$, тогда из определения операции $\vec{L}$ следует, что $\alpha \in \vec{L}(\beta)$.

(C3) ($\Leftarrow$) Пусть формула $\alpha \in \vec{L}(\beta, \gamma)$, тогда существуют такие формулы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L \cup \{\beta, \gamma\}$, что $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \alpha \in L$. Возможны следующие случаи.

1) Множество $\{\beta, \gamma\} \not\subseteq \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Значит, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$ и тогда, применяя правила (AD) и (MP), получим, что $\alpha \in \vec{L}(\varnothing)$. Поскольку $\vec{L}(\varnothing) \subseteq \vec{L}(\beta \wedge \gamma)$, то $\alpha \in \vec{L}(\beta \wedge \gamma)$.

2) Для некоторого $1 \leq i \leq n$ формула $\beta = \alpha_i$ и $\gamma \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, тогда, как замечено для аналогичного случая выше, получаем, что $(\alpha_1 \wedge (\ldots \wedge (\alpha_{i-1} \wedge (\alpha_{i+1} \wedge (\ldots \wedge (\alpha_n \wedge \beta) \ldots) \to \alpha \in L$. Применяя соответствующее число раз правило (CV), получим, что $\beta \to \alpha \in L$. Откуда, применяя правило (EA), получаем, что $\beta \wedge \gamma \to \alpha \in L$. Тогда, по определению, $\alpha \in \vec{L}(\beta \wedge \gamma)$.

3) Случай, когда для некоторого $1 \leq i \leq n$ формула $\gamma = \alpha_i$ и $\beta \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ доказывается аналогично.

4) Пусть $\{\beta, \gamma\} \subseteq \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, как и выше, отсюда следет, что $(\alpha_1 \wedge (\ldots \wedge (\beta \wedge \gamma) \ldots) \to \alpha \in L$. Применяя соответствующее число раз правило (CV), получим, что $\beta \wedge \gamma \to \alpha \in L$.

($\Rightarrow$) Пусть $\alpha \in \vec{L}(\beta \wedge \gamma)$, в силу доказанного выше пункта C2, получаем, что $\beta \wedge \gamma \to \alpha \in L$, и, значит, по определению операции $\vec{L}$, имеем, что $\alpha \in \vec{L}(\beta, \gamma)$.

Таким образом, $\vec{L}(\beta, \gamma) = \vec{L}(\beta \wedge \gamma)$. Q.E.D.

Из леммы 2 и теоремы 7 непосредственно следует критерий дедуктивности множества формул.

ТЕОРЕМА 8. *Множество L является дедуктивным тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующим условиям:*

D1. *Множество L замкнуто относительно всех подстановок.*

D2. $\{\alpha^\wedge \to \beta^\wedge | Var(\beta^\wedge) \subseteq Var(\alpha^\wedge)\} \subseteq L$;

D3. $\{(TR), (CM), (AD), (MP), (CV), (EA)\} \subseteq R_L$.

Заметим, что таким образом *минимальное дедуктивное множество*, которое мы будем обозначать буквой W, можно определить как множество всех формул, выводимых в исчислении со множеством тавтологий $\{\alpha^\wedge \to \beta^\wedge | Var(\beta^\wedge) \subseteq Var(\alpha^\wedge)\}$ и правилами вывода (TR), (CM), (AD), (MP), (CV) и (EA).

6 Единственность хорошо определенного следования

Введем следующие определения.

Пусть C_1 и C_2 — некоторые следования над одним и темже языком. Эти следования не совпадают, если существует такое множество X, что $C_1(X) \neq C_2(X)$. Будем говорить, что следование C_1 *не сильнее* следования C_2, если для любого множества X верно, что $C_1(X) \subseteq C_2(X)$. Если имеет место тот факт, что C_1 не сильнее C_2 и $C_1 \neq C_2$, то будем говорить, что C_1 *слабее* C_2 и C_2 *сильнее* C_1 и обозначать эти факты $C_1 < C_2$ и $C_2 > C_1$ соответственно.

Верна следующая

ТЕОРЕМА 9. *Пусть L — дедуктивное множество. Хорошо определенное следование C такое, что $C(\varnothing) = L$ является единственным и совпадает с импликативным следованием $\vec{L}$ над множеством L.*

Доказательство. Пусть C — некоторое хорошо определенное следование такое, что $C(\varnothing) = L$. Докажем, что оно совпадает с импликативным следованием $\vec{L}$, откуда и будет следовать единственность такого следования.

Пусть $C \neq \vec{L}$, тогда либо $\vec{L} < C$, либо $C < \vec{L}$, либо C несравнимо с $\vec{L}$.

Пусть $\vec{L} < C$, тогда существуют такое множество X, что $\vec{L}(X) \subset C(X)$, а значит, и такая формула α, что $\alpha \in C(X)$ и $\alpha \notin \vec{L}(X)$. Поскольку C — финитарное, то, следовательно, существует такое конечное множество $Y \subseteq X$, что $\alpha \in C(Y)$, причем $\alpha \notin \vec{L}(Y)$. Так как C — хорошо опредленное следование, то $Y^\wedge \to \alpha \in C(\varnothing) = L$, тогда, по определению импликативного следования, $\alpha \in \vec{L}(Y)$. Противоречие.

Пусть $C < \vec{L}$, тогда существует такое множество X, что $C(X) \subset \vec{L}(X)$, а значит, и такая формула α, что $\alpha \notin C(X)$ и $\alpha \in \vec{L}(X)$. Из последнего следует, что существует конечное множество формул $Y = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq X \cup L$, причем такое, что $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \alpha \in L$. Введем следующие обозначения. Посредством Z_L обозначим конъюнкцию всех формул из множества $Y \cap L$. Положим $Z = Y \setminus L \subseteq X$. В силу теоремы 8 имеем, что $Z_L \wedge Z^{\wedge} \to \alpha \in L$ и $Z^{\wedge} \to \alpha \in L$. Так как $Z \subseteq X$ и $L = C(\varnothing)$, то $\alpha \in C(X)$. Противоречие.

Пусть C и $\vec{L}$ несравнимы друг с другом, тогда существуют такие множества X и Y и такие формулы α и β, что $\alpha \in C(X)$ и $\alpha \notin \vec{L}(X)$, и $\beta \notin C(X)$ и $\beta \in \vec{L}(X)$. Далее доказательство аналогично доказательствам для случаев, приведенных выше.

Таким образом, $C = \vec{L}$. Q.E.D.

7 Хорошо определенные логики и теорема о дедукции

Заметим, что тот факт, что $\alpha \in C(\beta)$, означает, что формулы α и β находятся над данной логикой в отношении выводимости, что в более привычных обозначениях записывается как $\alpha \vdash \beta$. Тогда условие (C2) теоремы 5 запишется знакомым образом

$$\alpha \vdash \beta \Leftrightarrow \vdash \alpha \to \beta.$$

Таким образом, условие (C2) есть не что иное, как слабый вариант теоремы о дедукции. Это означает, что теорема о дедукции должна рассматриваться не только как технический момент, упрощающий построение выводов, но и как сообщение о некоторой согласованности языка и логики этого языка. А именно как сообщение о том, что язык обладает некоторыми средствами, позволяющими высказываться о логике этого же языка.

Если для логики верна теорема о дедукции в слабой ее форме, то будем говорить, что *логика обладает слабым дедуктивным свойством* или является *слабо-дедуктивной.*

Из теорем 8 и 9 следует

ТЕОРЕМА 10. *Минимальной логикой в языке, содержащем импликацию и конъюнкцию, обладающей слабым дедуктивным свойством, является логика с импликативным следованием $\vec{W}$ над множеством W.*

Минимальные логики с дедуктивным свойством исследовались В.А. Смирновым. В работе [3] им были представлены некоторые такие логики. Также, Х. Карри в книге [4] был приведен достаточный критерий для слабой дедуктивности некоторых логик. Однако в указанных работах рассматривались логики, для теорий которых постулировалась замкнутость относительно правила modus ponens, кроме того, логики найденные В.А. Смирновым обладают и сильным дедуктивным свойством. Таким образом, результаты Р. Вуйцицкого, а также автора данной работы являются обобщением дедуктивного свойства логик в несколько ином направлении.

Литература

[1] *Wojcicki R.* Lectures on Propositional Calculi // www.studialogica.org/wojcicki
[2] *Wojcicki R.* Lectures on Propositional Calculi // Wroclaw: Ossolineum, 1984.
[3] *Смирнов В.А.* Формальный вывод и логические исчисления. М., 1972.
[4] *Хаскел Б. Карри* Основания математической логики. М., 1969.