Структурализм и идентичность математических объектов[1]

М. Резник

abstract. The paper deals with the nature of mathematics from the point of view so called mathematical structuralism. The author proposes specific analysis of mathematical objects, and within the particular — relativistic standpoint — justify that mathematics is the science of patterns. He responded for the objections toward mathematical structuralism.

Ключевые слова: структурализм, паттерны, структурная релятивность, позиции и идентичность логических и математических объектов

М. Резник как логик и философ

М. Резник родился в 1938 г. Будучи учеником У. Куайна, он получил степень PhD в Гарварде в 1964 г. за диссертацию о Г. Фреге. Он являлся профессором университета в штате Северная Каролина, где получил звание почетного профессора. Его работы по философии математики (вместе с работами С. Шапиро, Дж. Хеллмана и Ч. Парсонса) положили начало такому направлению как структурализм (в философии математики). Резник также занимался философией логики, где он отстаивал неаприорный характер логики и анализировал способы ее модификации. В своей концепции математического структурализм Резник развил некоторые аспекты идеи Куайна об онтологическом релятивизме.

В.А. Бажанов

[1] Перевод с англ. В.А. Бажанова.

Структурализм и идентичность математических объектов

М. Резник

Начну с терминологического замечания.

Я полагаю, что математика изучает паттерны («структуры»). Прежде, чем начать прояснять что такое паттерны, я скажу несколько слов о понятиях «паттерна», «структуры» и «структурализма». Я использую термин «паттерн» в смысле распознавания паттернов (структур), имея в виду, что из них что-то может конструироваться, или такие признаки, которые помогают отличать акцент жителей одних районов от акцента жителей других районов. Термин «структура» близок по значению к «паттерну» и часто их значения перекрываются. «Структурализм» — более удачное название, чем «паттернизм», и не более того. Более того, понятия «паттерна» и «структуры» в большей или меньшей степени взаимозаменяемы в моих работах.

1 Что изучает математика?

Что изучает математика, если ее основные представления используются в различных приложениях? Мы их находим в геометрии, где она очень плодотворна и использует синтетические или аналитические методы. Мы находим ее в успехах математической логики, которые достигнуты благодаря использованию теории чисел, алгебры и теории множеств. Мы видим ее в теории чисел, которая может строиться как теория конечных кардинальных чисел, теория конечных упорядоченных или конечных дискретных образований или даже как теория синтаксических цепочек. Если бы мои познания в математике были более глубоки, то я бы привел еще много аналогичных примеров. Мы также знаем о возможности различных путей развития различных ветвей математики. Мы можем воссоздать всю (или почти всю) математику на основе теории множеств. Равно как и на основе теории категорий. Мы может начать с арифметики или получить фрагменты геометрии на ее базе. Или же мы можем начать с геометрии и выйти на арифметику как часть геометрии. Почему это возможно? Что мы узнаем, какого рода знание получаем в рамках математики? Паттерны можно расширять, копировать, рассматривать совместно. Они могут встречаться в других паттернах и могут получаться из них. Их можно «извлекать» из обыденного опыта, равно как и самих паттернов. Моя гипотеза относительно математики объяснит, почему возможны различные подходы к одним и тем же проблемам — причина здесь проста: математики изучают паттерны в различного рода образованиях. Отсюда понятно, почему возможны различные основания математики. Некоторые паттерны встречаются в виде «вложенных структур», и поэтому мы можем отталкиваться от одного паттерна или же считать его производным (см. рис. 1). Эта идея объясняет, почему математическое знание не является знанием отдельных объектов. Разумеется, мы можем задумываться, например, о числе 13, но в целом фундаментальные свойства чисел раскрываются путем их отношения к другим числам.

2 Паттерны и их включение

Некоторые отношения между паттернами может пролить свет на природу математики. Я вкратце остановлюсь на случае включения паттернов. На рис. 2 последовательность P несколько раз встречается в паттерне Q. Действительно, мы представляем последовательность звездочек как продолжающуюся в бесконечность, тогда P бесконечное число раз встречается в Q. Очевидный математический пример — четные натуральные числа в рамках всего ряда натуральных чисел. Как показывает рис. 1, трудно привести примеры паттернов, которые входят друг в друга, но математических примеров здесь много. Натуральные числа входят в положительные рациональные числа. Кодированием упорядоченных пар чисел в виде одного числа, мы говорим о включении рациональных чисел в натуральные. Включение паттернов рефлексивно и транзитивно, причем P изоморфно структуре R которая принадлежит Q и определяется в Q. Замечу, что пункт, относящийся к определимости, — ключевой. Это позволяет структуре (N, S) не только входить в (N, $<$), где последующий член — суб-отношение «меньше чем»; кроме того, последующий член может быть получен без наложений ограничений на те или иные области всей структуры. Рациональные числа (Rat, $+$, $*$) содержатся в (N, S), но рациональные числе в плотном упорядочении (Rat, $<$) нет, т.к. 0 и последующие числе не определяются в такого рода структурах. С другой стороны, хотя действительные числа и их упорядочение можно с помощью теоретико-множественных средств определить на основе натуральных чисел, (Real, $<$) не входит в (N, S). Итак, что же такое паттерн? В своей статье 1981 года и в книге 1997 года я определил его как «состоящий из позиций, которые проявляются в различных отношениях». Понятно, что определение довольно неопределенное, но я преднамеренно не хотел бы его уточнять. Я не старался и не стараюсь выразить паттерн математически или прояснить его онтологический статус. Утверждая, что математика изучает паттерны или нечто подобное, я хочу привлечь внимание к некоторым свойствам паттернов и пролить новый свет на природу математики. Я повторяю: паттерн состоит из позиций, которые проявляются в различных отношениях. Паттерны могут иметь строго определенные позиции и монадные отношения, например, цвета. Структура национальных флагов, например, не просто структура, состоящая из определенных форм, но форм совершенно определенных цветов. Их ориентация также очень важна. В математике возможны различные ориентации паттернов (как, скажем, в системах координат) и метрики. Очевидно, что одних лишь логических средств недостаточно для характеристики любых паттернов. Отсюда вытекает идея структурной релятивности.

3 Структурная релятивность

Ее идея проста: структуры мы можем различать и описывать как функцию некоторых базовых образований, которые у нас есть для изображения структур. Это важно, когда мы мыслим паттерны как некоторого рода трафареты, позволяющие образовывать те или иные конкретные объекты, или говорим об инвариантности при тех или иных трансформациях, или же о классах эквивалентности, определяемых соответствующими отношениями. Данные паттерны относительны в смысле наших средств или имеющихся форм, или же отношений. Более того, обогащая или обедняя базовые образования, мы можем получать различные понятия структуры, сличать различные вещи, которые имеют одинаковые структуры и различать отношения между ними.

Геометрия здесь дает много примеров: в ней говорится о более и более богатых типах структур, которые образуются, скажем, на основе конгруэнтных фигур, ориентированных в евклидовом пространстве и их движениями (но уже без ориентации) и таким образом до аффинных и топологических пространств. Структурная релятивность проявляется, когда мы хотим дать определение вхождения паттернов, причем понятие определимости само относительно выбранного метода определения. Это в свою очередь зависит от нелогического словаря базисного языка, и от наших логических средств. Не только наши структурные отношения изменяются с нашим «логическим» фоном, но и элементы структуры и, следовательно, сами структуры. Если ограничиться описанием структур как моделей различных первопорядковых формул (схем), то типы структур будут похожи на крупно-ячейистые структуры, которые часто встречаются в абстрактной алгебре. Здесь можно исходить из определения таких структур как группа, кольцо или решетка, имея в виду допустить неизоморфные примеры подобного типа. В результате большинство наших структурных описаний не будут категоричными. С другой же стороны, используя языки второго порядка, можно сформулировать категорические описания структур, изучаемых (второпорядковой) теорией чисел, евклидовой геометрией, анализом. Категорические расширения ZFC считаются достаточно мощными, чтобы обеспечить нужды математиков.

Фиксируя базисную логику L, можно назвать L-структурой структуру в некотором неуточненном, абсолютном смысле. Но это не устраняет идею структурной релятивности. Фрагментируя логические средства L, можно сделать более интуитивно прозрачными те различимости, которые позволяет L. Действительно, одно возражение против использования первопорядковой логики как структурной основы заключается в том, что и стандартные, и нестандартные модели теории чисел проявляют Первопорядковую Структуру, относящуюся к Натуральным Числам. Однако даже второпорядковая логика не способна предоставить все интуитивно прозрачные различения, которые для нас были бы естественны. Например, все и только одни прогрессии (progressions) имеют Второпорядковую структуру, относящуюся к Натуральным Числам, но если выбрать конкретную прогрессию, можно в ней отличить под-прогрессии, в который «расстояния» между последовательными числами сохраняются от тех, в которой не сохраняются (увеличиваются; пример, четные числа vs. простых чисел). Значит, пока структурное понятие прогрессии определимо в языке второго порядка, то для прогрессии с увеличивающимися (или постоянными) «расстояниями» это не имеет место. Один пример, который будет важен и ниже. Возьмем аддитивную группу целых чисел $<I, +, 1, -1>$. Здесь не надо добавлять 0 как отдельный элемент, т.к. мы уже можем определить понятия идентичности (тождества?). Но нужно иметь и 1, и −1 как отдельные элементы т.к. их нельзя определить в терминах аддитивности (сложения). Если нам дана бесконечная прогрессия в (+ и – бесконечность) с неопределимыми элементами, мы можем не идентифицировать повторно 1 и −1. Рассмотрим число 3 и последовательность звездочек, обозначенную «A». Если дано «средняя точка», или 0, в последовательности B недостаточно средств для того, чтобы найти 1 и −1, поскольку мы не знаем, какое направление положительное (+). Но если задать положительное (или отрицательное) направление мы можем воссоздать положения 1 и −1 в последовательности C. Это показывает, как паттерны с различаемыми позициями, ориентациями или цветами требуют более изощренных средств для определения их, нежели без различаемых позиций, ориентаций или цветов и т.д.

4 Позиции и их идентичность

Ключевым для моей версии структурализма является тезис, согласно которому об идентичности положений (позиций) можно говорить только относительно конкретного паттерна, в границах которого выделяется эта позиция. Итак, если взять позиции x и y в паттерне P, x=y или xy. Раньше я сравнивал позиции с геометрическими точками, которые не имеют никакой структуры, которые нельзя идентифицировать или различать по признакам вне структуры. Чтобы это пояснить более конкретно, рассмотрим углы треугольника на рис. 4 и рис. 5. Предположим, что сначала нам показали рис. 4, а потом рис. 5. Кто-то может спросить: «Является ли угол C первого треугольника углом F второго треугольника?». Ответить можно так: «В настоящем виде вопрос не имеет смысла. Если они рассматриваются как конкретные рисунки, мы не знаем, какой из них был нарисован первым или получен из первого путем вращения». Но можно сказать сильнее. Если они рассматриваются как структуры вне зависимости от того, как и когда были нарисованы, то лучше выразиться, что просто у нас нет средств узнать, является ли C идентичным F, это просто не относится к делу. Я использовал эту идею, чтобы разрешить задачу (головоломку) Бенасеррафа. Математика не может считать никакое определение чисел через множества корректным. Можно использовать определения Цермело, фон Неймана или Фреге-Рассела, равно как и много других для тех или иных конкретных целей. Бенасерраф отсюда заключил, что числа не являются множествами. Действительно, они не являются объектами. Мой ответ таков: каждое определение схватывает разные вхождения паттерна чисел в паттерн множеств. Однако не имеет отношение к делу положение вхождения паттерна числа в паттерн множества и их идентичность вне определенного контекста. Таким образом, редукция одного числа к множеству подобна идентификации вхождения одного паттерна в другой, и поэтому неверно думать, что лишь один способ редукции является единственно верным. Более того, не имеет отношения к делу вопрос о том, являются ли числа множествами или нет. Являются ли числа объектами? Я утверждаю, что да, но не потому, что они в действительности являются ими или являются объектами в некотором независимом контексте. Скорее, их можно считать объектами в том же смысле, что и Фреге — благодаря тому, что они попадают в поле первопорядковых переменных теории чисел. Существуют ли числа? Снова я утверждаю, что да. Я отношу себя к математическим реалистам, но не хочу здесь защищать эту точку зрения. Вне относительно реализма можно сказать, что задача математики исследовать паттерны (либо путем открытия, либо путем конструирования), и разговор о математических объектах — позициях в паттерне — есть способ такого исследования. Этот разговор касается того, как могут быть организованы объекты. Разговор о возможностях может стать разговором о реальностях. Как положения эти объекты должны подчиняться иным критериям существования (legitimacy) по сравнению с не-положениями.

5 Возражения

Некоторые философы попытались опровергнуть мой тезис, что положение в одном паттерне имеет значение для идентичности с положениями в другом паттерне. Это возражение может быть также представлено в следующем виде. Согласно лейбницевскому принципу тождества неразличимых, должен иметь место следующий случай: если x и y — различные положения в одном паттерне, тогда должно быть некоторое свойство, характеризующее отношение, которое определимо в терминах паттерна, которое позволяет их отличать. Это справедливо для числа 0, которое отлично от других чисел, поскольку не имеет предшественника (predecessor). Действительно, аддитивная группа целых чисел $<I, +, 1, -1>$ имеет положения, которые нельзя отличить через рациональные свойства, ассоцинированных с ней. Предположим, что “Fx” — одноместный предикат определяемый в терминах «+», не относится к 1 или –1. Тогда 1 удовлетворяет “Fx” т.т.т. когда ему удовлетворяет 1. Это не единственный пример: комплексные числа i и –i не могут быть различимы с помощью предикатов, которые определяются в структуре, за исключением тех, которые относятся к i и –i. Точки в геометрическом пространстве также неразличимы; равно и симметричные узлы в симметрических группах; равно как положения в «вырожденных» структурах, таких как кардиналы или безреберные (edgeless) графы, которые имеют иных отношений за исключением тождества и нетождества. Приводя эти примеры, можно еще возразить, что либо 1) тождество 1 с +1, +i с –i и каждой точки в пространстве с любой другой и т.д.; либо 2) исключить симметричные математические структуры из моей теории; либо 3) отказаться от моего тезиса, касающегося идентичности позиций в различных структурах. Две первые альтернативы безусловно неприемлемы, а принятие последней подрывает мое решение задачи Бенасеррафа.

6 Ответ на возражения

Повольте мне разделить мои контрпримеры на те, которые касаются симметричных структур с различимыми элементами, такими как +1 и –1 в аддитивных группах целых чисел, с одной стороны, и те, которые касаются неразличимых элементов, таких, как евклидово пространство, с другой. Предлагая примеры первого рода, мои критики не учли структурную релятивность. Аддитивная группа целых чисел есть структура с различимыми элементами, и именно таковым является поле чисел. Таким образом, это структура не является перво- или второпорядковой структурой с логической точки зрения. Нам нужна более сильная базисная теория для описания такого рода структур. Если принять это положение, то видно, что рассмотрение изоморфизма этих структур мы должны зафиксировать различимые элементы точно также как фиксируем другие структурные отношения и операции. Смена $+1$ на -1 в аддитивной группе показывает, что нет свойства определимого в ней, которое позволяло отличать $+1$ от -1 за исключением прямого обращения к этим числам. Но это не является возражением моей точке зрения, т.к. взаимозаменяемость не является структурой, которая сохраняется путем несохранения неразличимых элементов в этой структуре. Короче говоря, мои критики используют слишком узкое понятие структурного свойства. Можно все это представить и иначе. Предположим, что меня попросили сделать тождественную копию паттерна, который мной обозначен как «последовательность C» на рис. 3. Это не последовательности A или B. Более того, проекции последовательности C на рис. 3 на своего рода экран требует сохранения его положения, цвета и обозначенных (отмеченных) элементов. Аналогичное справедливо при создании изоморфного ее образа. С. Шапиро и Дж. Лэдиман другим способом продемонстрировали, что мои критики требуют слишком многого. Последние фактически требуют то, что Лейбниц называл абсолютная различимость — если x и y различимы, то они требуют истинности одного предиката, но не другого. Но Шапиро и Лэдиман заметили, что Куайн признавал более слабые типы различимости, которые позволяют нас различать 1 от -1 в указанных выше терминах. Например, 1 больше -1, но не наоборот. Куайн называл различимость через асимметричное отношение, подобное данному, относительной различимостью. Он также признавал слабую различимость двух объектов, если они находятся в симметричных, но нерефлексивных отношениях. Мы можем различить в слабом смысле i от –i с помощью отношения, которое относится к положительному расстоянию в комплексном пространстве. Конечно. Если допустить числовую различимость, т.е. фактически не-тождество (non-identity), как отношение, то два любых объекта различимы в слабом смысле. К сожалению, эти соображения не касаются структур, не имеющих различимых элементов или которые включают положения, допускающие только слабую различимость посредством не-тождественности. Трудность здесь состоит в том, что моя критика направлена против истолкования тождества или чего-то иного в его собственных терминах как структурного отношения для объектов со слабой различимостью. Мои критики полагают, что если две вещи различимы, то должно быть что-то такое, отличное от них самих, которое позволяет их различать. Мои критики могут быть правы относительно обычных объектов, существующих в пространстве и времени, но как показывает пример безреберных графов, это вовсе не справедливо относительно любого математического объекта, представляем ли мы математических объект в виде положений в паттерне или иным способом. Зачем требовать наличия дополнительных положений в паттернах? Я думаю, мы не должны этого делать. Мы должны забыть о попытках индивидуализировать положения в кардиналах и других симметричных структурах. Кардинальность ТРИ имеет три различимых положения. Это свойство структуры — даже если его не удается обнаружить посредством нахождения некоторых нетривиальных отношений между положениями. Мы неявно признаем это свойство, когда требуем наличие структурного изоморфизма не только в целях сохранения структурных отношений; но чтобы различить 1 и -1 нужно сопоставлять различные образы различным членам этой области.

7 Заключение

Мы выяснили, что в случае симметричных структур важны соображения структурной релятивности, также как и введения различимых элементов, ориентаций, метрик и т.д. в дополнение к логическим средствам языка. Это может быть важно для нарушения симметрии. Из примеров с кардинальностью следует, что некоторые свойства структуры, а именно те, которые сохраняются при изоморфизме, не могут быть редуцируемы к нетривиальным свойствам или отношениям между позициями.

Одно замечание. Мои критики — это Юкка Керанен и Фрэзер МакБрайд (см. ссылки ниже). Хартри Филд и Джон Бургесс также обращали внимание на трудность с i и –i.

Благодарности.

Я благодарю В. Бажанова, Ю. Керанена, М. Лэйна, К. МакЛарти, Дж. Розенберга Т., Хофвебера и С. Шапиро за полезные обсуждения или обмен мнениями в переписке. Я много получил от чтения неопубликованной статьи Дж. Лэдимана.

Литература

[1] Benacerraf, Paul, "What numbers could not be" originally published in the Philosophical Review in 1965, reprinted in Benacerraf and Putnam, *Philosophy of Mathematics*, Cambridge: Cambridge University Press, 1983.
[2] Keranen, Jukka, "The Identity Problem for Realist Structuralism," *Philosophia Mathematica* (2001)
[3] Keranen, Jukka, "The Identity Problem for Realist Structuralism II: A Reply to Shapiro" in MacBride (2006)
[4] Ladyman, James, "On the Identity and Diversity of Objects in a Structure" Unpublished.
[5] MacBride, Fraser, *Identity and Modality*, Oxford: Clarendon Press, 2006.
[6] Quine, W.V., "Grades of Discriminability" in W. V. Quine, *Theories and Things*, Cambridge, Mass: Harvard, 1981.
[7] Resnik, Michael D., "Mathematics as a Science of Patterns: Ontology and Reference," *Nous* 15, (1981)
[8] Resnik, Michael D., *Mathematics as a Science of Patterns*, Oxford: Clarendon Press, 1997.
[9] Shapiro, Stewart, "Structure and Identity" in MacBride (2006).
[10] Shapiro, Stewart, "The Governance of Identity" in MacBride (2006).

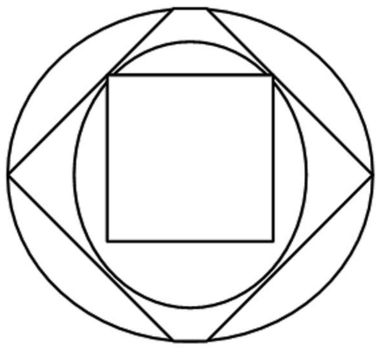

Рис. 1

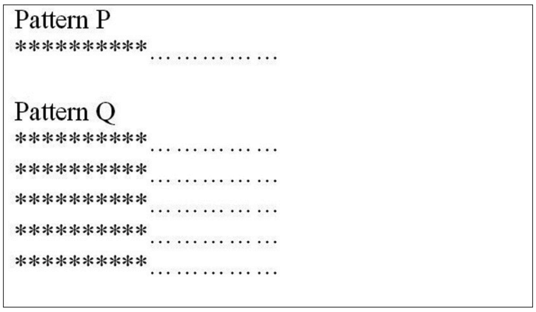

Рис. 2

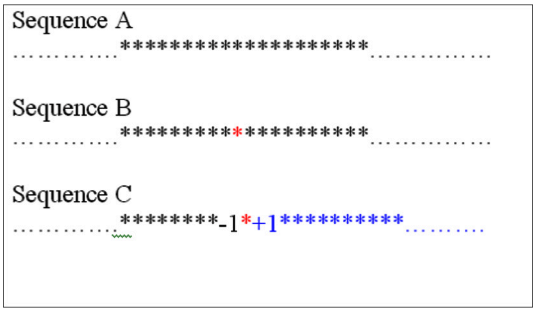

Рис. 3

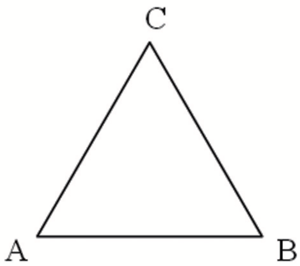

Рис. 4

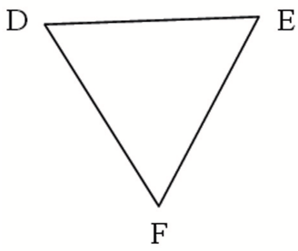

Рис. 5