Континуальность трехзначных логик: проблемы и гипотезы[1]

А. С. Карпенко

abstract. Functional properties of three-valued logics are considered. Among these logics ones with closed function classes set cardinality that is continuum. The problem of continuity of Bochvar's three-valued logic is discussed and a hypothesis concerning the citeria of continuity of an arbitrary three-valued logic is proposed.

Ключевые слова: трехзначные логики, замкнутые классы функций, счётность замкнутых классов, континуальность замкнутых классов

1 Необходимые понятия

Произвольная функция $f(x_1, \dots, x_m)$ от любого конечного числа переменных, областью определения которых и областью значения самой функции является множество V_n (пусть его элементами являются $0, 1, 2, \dots, n-1$), называется n-значной функцией или *функцией n-значной логики.* Пусть P_n есть множество всех n-значных функций и пусть $F \subseteq P_n$. Тогда, следуя А.В. Кузнецову, множество всех функций, которые можно получить с помощью операции суперпозиции [6] из F, называется *замыканием* F и обозначается посредством $[F]$.

Система функций $F = \{f_1, \dots, f_k, \dots\}$ из P_n называется функционально полной, если любая функция из P_n представима посредством суперпозиций функций из системы F. Или, в терминах замыкания: F — полная система, если $[F] = P_n$.

Система F функций называется *предполной (максимальной)* в P_n, если F представляет не полную систему, но добавление к F любой функции f такой, что $f \in P_n$ и $f \notin F$ преобразует F в полную систему. Или, в терминах замыкания: F предполна в P_n, если $[F] \neq P_n$ и $[F \cup \{f\}] = P_n$, где $f \in P_n$ и $f \notin F$.

[1] Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 09-03-00303а.

Важная роль предполных классов функций видна из следующей теоремы А.В. Кузнецова (1956), *система функций F полна в P_n тогда и только тогда, когда она не содержится целиком ни в одном предполном классе.*

2 Счётность и континуальность

Множество F n-значных функций называется (функционально) *замкнутым множеством (классом)*, если оно совпадает со своим замыканием, то есть если $F = [F]$.

В 1941 г. Э. Пост установил, что мощность множества замкнутых классов в P_2, где P_2 есть множество булевых функций, *счётна* [10]. Уже Постом был поставлен вопрос об описании всех замкнутых классов в P_n. Оказалось, и даже несколько неожиданным образом, что с многозначной логикой дело обстоит совсем по-другому. В [7] было доказано, что *для всякого n $(n \geq 3)$ P_n содержит континуум различных замкнутых классов.* Это говорит о принципиальной несводимости многозначной логики к двузначной. Вообще-то говоря, точная природа такого различия между двузначной и трехзначной логиками неясна, т.е. при переходе от двух истинностных значений к трем озадачивает происходящмй *скачок* от счётности к континуальности.

3 Другие трехзначные логики

А как обстоит дело с другими трехзначными логиками, т.е. с не функционально полными? В [6] С.В. Яблонский дал описание всех 18 предполных классов функций в P_3, а в [4] В.К. Финн доказал, что класс функций $Ł_3$, соответствующий трехзначной логике Лукасевича **Ł3** со множеством истинностных значений $\{1, \frac{1}{2}, 0\}$ является предполным в P_3. Класс функций $Ł_3$ задается суперпозицией следующих исходных функций: $\sim$ и $\rightarrow$, где $\sim x = 1 - x$; $x \rightarrow y = 1$, если $x \leq y$, и $x \rightarrow y = 1 - x + y$, если $x > y$.

Рассмотрим следующее полезное понятие, впервые введенное М.Ф. Раца. Будем называть *глубиной* системы F функций в классе K_0 наименьшее из таких натуральных чисел m, что существует убывающая последовательность классов $K_0, K_1, \ldots, K_m$, удовлетворяющая двум условиям:

1) класс K_{i+1} предполон в K_i $(i = 0, 1, \ldots, m-1)$;

2) система F является полной в K_m.

В частности, то, что глубина системы F в классе K_0 равна 0, означает, что F является полной в K_0.

3.1 Трехзначная логика Гейтинга

Как раз первым примером логики «глубины 2», чьи функциональные свойства были тщательно изучены, была трехзначная логика Гейтинга $\mathbf{G_3}$. Класс функций G_3, соответствующий логике $\mathbf{G_3}$, задается суперпозицией следующих исходных функций: $\neg, \Rightarrow, \&$ и $\vee$, где $\neg x = 1$, если $x = 0$, и $\neg x = 0$ в остальных случаях; $x \Rightarrow y = 1$, если $x \leq y$, и $x \Rightarrow y = y$, если $x > y$; $x \,\&\, y = min(x, y)$ и $x \vee y = max(x, y)$. Заметим, что $Ł_3 = [G_3 \cup \{\sim x\}]$.

М.Ф. Раца показал, что класс функций G_3 предполон в классе функций $Ł_3$ и установил критерий функциональной полноты для класса функций G_3. Но, главное, Раца доказал [3], что G_3 *содержит континуум различных замкнутых классов.* Для порождения континуального множества замкнутых классов функций М.Ф. Раца строит систему функций C, выраженную следующей формулой:

$$\{\&_{i=1}^{n}((\neg x_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \neg x_{i-1} \,\&\, \neg x_{i+1} \,\&\, \ldots \,\&\neg x_n) \Rightarrow \bot x_i) \,|\, n = 2,3,\ldots\},$$

где $\bot x = x \vee \neg x$.

Обозначим эти функции — двухместную, трехместную и т.д. символами C_2, $C_3, \ldots$ соответственно. Например, C_2 есть

$$(\neg x_2 \Rightarrow x_1 \vee \neg x_1) \,\&\, (\neg x_1 \Rightarrow x_2 \vee \neg x_2).$$

Условимся для любых функций $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k)$ и $g(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m)$ из G_3 обозначать символом $f(x_i/g)$ результат подстановки в f функции g вместо переменной x_i. Тогда для всякого $n = 2, 3, \ldots$ функция C_n является симметрической (т.е. при всякой перестановке аргументов остается равной себе) и удовлетворяет условиям:

1. $C_n = \bot C_n$,
2. $C_n(x_i/1) = 1 \;\; (1 \leq i \leq n)$,

3. $C_n(x_i/\bot y,\, x_j/\bot z) = 1 \ \ (1 \leq i < j \leq n)$.

М.Ф. Раца показывает, что при выполнении этих условий система функций C является независимой, откуда следует, что существует континуум различных замкнутых классов функций.

Поскольку класс функций G_3 предполон в $Ł_3$, то таковыми же континуальными свойствами обладает и сама $Ł_3$, и вообще, любая логика, в которой посредством исходных связок можно задать указанную выше систему функций C, является континуальной. Таким образом, можно говорить о некотором критерии континуальности для трехзначных логик.

Результат Раца является следствием более общей теоремы для предполных классов глубины 2 (такие классы называются еще *субмаксимальными клонами*) [8]:

Всего P_3 имеет 158 субмаксимальных клонов. Из них: 5 имеют конечное множество подклассов; 7 имеют счётное множество классов; остальные 146 имеют мощность континуума.

3.2 Трехзначная логика Бочвара

Класс функций B_3, соответствующий трехзначной логике Бочвара $\mathbf{B_3}$, задается суперпозицией следующих исходных функций: $\sim, \cap, \vdash$, где $x \cap y = min(x, y)$, если $x, y \in \{0, 1\}$, и $x \cap y = \frac{1}{2}$, в остальных случаях; $\vdash x = \neg \sim x$.

В [5] В.К. Финн установил критерий функциональной полноты для класса функций B_3. Также В.К. Финн показал, что класс функций H_3, соответствующий трехзначной логике Холдена $\mathbf{H_3}$, включается в один из предполных классов B_3. Класс функций H_3 задается суперпозицией следующих исходных функций: $\sim, \cap$ и $\triangle$, где $\triangle x = 0$, если $x = \frac{1}{2}$, и $\triangle x = 1$, в остальных случаях.

Тогда можно сделать *предположение* о глубине рассмотренных классов функций:

$$H_3 \subset B_3 \subset E_3 \subset Ł_3 \subset P_3,$$

где E_3 есть класс функций, соответствующей трехзначной логике Эббингауза $\mathbf{E_3}$, т.е. $E_3 = [B_3 \cup \{x \rightarrow_s y\}]$, где $x \rightarrow_s y$ есть импликация Собочиньского: $x \rightarrow_s y = 0$, если $x > y$, $\frac{1}{2} \rightarrow_s \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ и $x \rightarrow_s y = 1$, в остальных случаях [11].

Интересна гипотеза В.К. Финна (высказанная автору много лет назад), что мощность множества замкнутых классов B_3 является счётной, как и для P_2. Эта гипотеза основывалась на *предположении* о том, что в B_3 класс внутренних функций B_3^{in} (который порождается функциями $\sim, \cap$) и класс внешних функций B_3^{ex} (областью значения которых является множество $\{0, 1\}$) каждый сам по себе счётен, а в объединении они порождают всё множество функций B_3. Исходя из этого, гипотеза В.К. Финна выглядит очень естественной.

3.3 Другие предположения о счётности/континуальности

В [9] сформулирован следующий критерий счётности:

Пусть F есть подкласс P_n. Там существует отношение частичного порядка $\leq$ на F, удовлетворяющее следующим трем свойствам:

(a) $f \leq g \Rightarrow [f] \subseteq [g]$,

(b) *каждая цепь является вполне упорядоченной*[2] *(относительно $\leq$),*

(c) *каждая антицепь*[3] *(относительно $\leq$) имеет только конечное число элементов.*

Тогда F имеет как наибольшее только счётное множество различных подклассов.

Обратим внимание на свойство (a). Будем говорить, что функция $f(x_1, \ldots, x_m)$ не превосходит функцию $g(x_1, \ldots, x_m)$, и писать $f \leq g$, если для любого набора $(a_1, \ldots, a_m)$ из V_3^m выполняется

$$f(a_1, \ldots, a_m) \leq g(a_1, \ldots, a_m).$$

Нетрудно подобрать две функции, например, внутреннюю $\cap$ и внешнюю $\cap^{\vdash}$ конъюнкции из B_3, такие, что $(x \cap^{\vdash} y) \leq (x \cap y)$, где

[2] Т.е. каждое непустое подмножество обладает единственным минимальным элементом.

[3] *Антицепью* называется подмножество частично упорядоченного множества, состоящее из попарно несравнимых элементов, которых не меньше двух.

$x \cap^{\vdash} y = \vdash x \cap \vdash y$. Из теоремы В.К. Финна о критерии функциональной полноты B_3 следует, что пересечение множества внутренних функций B_3^{in} и множества внешних функций B_3^{ex} пусто. Это значит, что условие (a) из вышеприведенного критерия счётности в B_3 не выполняется. Однако вышеприведенный критерий счётности формулирует всего лишь *необходимое условие*.

Рассмотрим еще одно предположение в пользу континуальности B_3. В [1] предложен метод гильбертовской аксиоматизации широкого класса многозначных логик, основанный на расширении классической логики $\mathbf{C_2}$. Для этого должны выполняться следующие условия:

(1) Алгебра $< V_n; \vee, \wedge >$ является квазирешеткой;

(2) Наличие всех J_i-операторов:

$$j_i(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x = i \\ \\ 0, \text{если } x \neq i. \end{cases} \quad (\text{для всех } i \in V_n);$$

(3) Ограничения операций $\neg, \vee, \wedge, \supset$ на подмножество $\{0, 1\}$ множества V_n суть обычные классические операции отрицания, дизъюнкции, конъюнкции и импликации соответственно.

Логика $\mathbf{B_3}$ все эти условия выполняет, но не выполняет их логика $\mathbf{G_3}$: не все J_i-операторы здесь имеют место. Однако все J_i-операторы и не нужны, достаточно, $J_0(\neg)$ или $J_1(\vdash)$, поскольку с их помощью строится *изоморф* $\mathbf{C_2}$. Понятие изоморфа введено Д.А. Бочваром и означает, что логика $\mathbf{B_3}$ содержит фрагмент, который верифицирует аксиомы $\mathbf{C_2}$, а правило *modus ponens* сохраняет классическое отношение логического следования. Такие изоморфы названы «нормальными». Подробно об изоморфах см. диссертацию Л.Ю. Девяткина [2]. Таким образом, задается некоторый «минимум» функциональных свойств, который достаточен для аксиоматизации некоторой трехзначной логики $\mathbf{L_3}$. Заметим, что логика Холдена $\mathbf{H_3}$ не содержит операторов J_0 и J_1 и поэтому не может быть аксиоматизирована как расширение $\mathbf{C_2}$.

4 Гипотеза о континуальности

В связи с этим в качестве гипотезы можно сформулировать следующий критерий континуальности. Пусть $F \subseteq P_3$ и $|F|$ есть мощность множества F. Для класса F, *соответсвующего некоторой трехзначной логике* $\mathbf{L_3}$, $|F| = \mathcal{C}$ *т.т.т., когда* $\mathbf{L_3}$ *аксиоматизируема как расширение* $\mathbf{C_2}$. Таким образом, функциональные свойства некоторого множества функций F связываются с чисто логическими свойствами класса формул соответствующей логики $\mathbf{L_3}$.

Литература

[1] *Аншаков О. М., Рычков С. В.* О многозначных логических исчислениях // Семиотика и информатика. 1982. Вып. 19. С. 90–117.

[2] *Девяткин Л.Ю.* Многозначные изоморфы классической пропозициональной логики. Автореферат на соискание ученой степени кандидата философских наук. М.: ИФ РАН, 2008.

[3] *Раца М.Ф.* О классе функций трехзначной логики, соответствующем первой матрице Яськовского // Проблемы кибернетики. 1969. Вып. 21. С. 185–214.

[4] *Финн В.К.* О предполноте класса функций, соответствующего трехзначной логике Я. Лукасевича // Научно-техническая информация. Сер. 2. 1969. Вып. 10. С. 35–38.

[5] *Финн В.К.* О критерии функциональной полноты для B3 // Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам. М.: Наука, 1974. С. 194–199.

[6] *Яблонский С.В.* Функциональные построения в k-значной логике // Труды математического института им. В. А.Стеклова. 1958. Т. 51. С. 5–142.

[7] *Янов Ю. И., Мучник А. А.* О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Доклады Академии Наук СССР. 1959. Т. 127. С. 44–46.

[8] *Bulatov A., Lau D. and Strauch B.* The cardinalities of sublatticies of depth 2 in the latticies of clones on a 3-elementary set. Preprint Universität Rostock, 1996.

[9] *Lau D.* Function Algebras on Finite Sets: A Basic Course on Many-Valued Logic and Clone Theory. Berlin: Springer-Verlag, 2006.

[10] *Post E.L.* Two-valued iterative systems // Annals of Mathematical Studies. 1941. Vol. 5. Princeton-London.

[11] *Sobociński B.* Axiomatization of a partial system of three-valued calculus of propositions // The Journal of Computing Systems. 1952. Vol. 1. P. 23–55.