Логические модальности как арифметичекие функции

Н. Л. Архиереев

ABSTRACT. In the paper some new approach to the theory of logical modalities is considered. This approach presupposes construction of basic logical notions of logical necessity, logical contingency,logical impossibility by means of Restricted and Relatively Restricted Sets of State-Descriptions(RSSD and RRSSD respectively), which can be also treated as ordered sets of possible truth-values for variables. Recalculation of RSSD and RRSSD for each particular formula is provided by arithmetical functions of special type.

Ключевые слова: логическая необходимость, возможность, случайность, возможный мир, модельная структура, ограниченное/относительно ограниченное множество описаний состояния, арифметическая фукция

1 Неформальные замечания

При построении семантик модальных исчислений в современной логике в качестве исходных обычно используются понятия модельной структуры, возможного мира и отношения достижимости между мирами. Несмотря на общепринятость данных понятий, их смысл во многом остается неясным. Так, иногда под возможным миром подразумевают мыслимое (возможное, действительное или необходимое) положение дел, состояние наших знаний об окружающем мире в определенный момент времени и т.д. Иногда предлагается вообще не конкретизировать понятие возможного мира, рассматривая его просто как абстрактную «точку соотнесения», выбор которой в качестве исходной («выделенной») в семантическом анализе модальных понятий определяется задачами данного анализа или же особенностями отношения достижимости в соответствующей системе. При этом «размножение» самих систем, называемых модальными, осуществляется в основном сугубо формальными методами, например, наложением дополнительных, зачастую весьма экзотических ограничений на отношение достижимости между мирами. Указанная ситуация кажется тем более странной, поскольку метод «возможных миров» широко используется не только для уточнения смысла алетических модальных понятий, но и при построении семантик для систем с временными, эпистемическими, деонтическими модальностями, при истолковании ряда интуиционистских и релевантных систем. Поэтому проблема построения семантик модальных исчислений, не использующих понятий «модельная структура», «возможный мир», «отношение достижимости», представляет интерес не только для модальной логики самой по себе, но и для всех логических систем, в основе которых лежат определенные модификации названных понятий.

Попытки содержательно истолковать указанные понятия предпринимались неоднократно. Так, Е.К. Войшвилло писал о семантике возможных миров для S5: «...Мир β естественно трактовать как множество фактов, относящихся к индивидам некоторого непустого множества с определенными на нем свойствами и отношениями... В языке это множество фактов представляет обычное классическое карнаповское описание состояния (о.с.)... описания мира β можно представить как $\Gamma \cup \alpha$, где α есть классическое о.с., а Γ — множество... законов и, возможно,... некоторых их следствий нефактического характера в языках рассматриваемых систем...

Существенно, что Γ ограничивает множество возможных различных фактических состояний мира. Так, при наличии закона $\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$ исключаются о.с. α, в которых имеются $A(a_i)$ и одновременно $\neg B(a_i)$ для любых индивидов a_i. Если М есть множество всех возможных классических о.с., то Γ выделяет из него подмножество M_Γ (которое не является пустым в в силу непротиворечивости Γ). Это последнее представляет собой модельную структуру S5, если учесть, что отношение достижимости R имеет место для любых $a_i, a_j \in M_\Gamma$» [2, с. 77].

В свою очередь из этого вытекает, что «функция оценки переменных в мире α определяется самим этим миром: $v(p, \alpha) = T \Leftrightarrow p \in \alpha$». Следовательно, «...Модальное высказывание..., отнесенное к некоторому миру β, детерминировано (если оно истинно) или недетерминировано самим этим миром» [2, с. 77]. «Суждение $\Box A$ истинно в некотором мире β не потому, что A истинно во всех возможных мирах, достижимых из β, а наоборот, *последнее имеет место потому, что необходимость ситуации A детерминирована в самом* β» [2, с. 80]. (Курсив мой — Н.А.)

Наличие сложных итерированных модальностей вида $\Diamond\Box$, $\Box\Diamond\Box$ в более «богатой» системе S4 предполагает, по мнению Е.К. Войшвилло, «возможность каких-то изменений Г, по крайней мере за счет появления каких-то следствий нефактического характера из имеющихся законов» [2, с. 78]. (Опровержимость формулы $\Diamond A \supset \Box\Diamond A$ в S4 подразумевает, что при $\neg\Box A$ (т.е. $\Diamond\neg A$) в исходном α может оказаться $\Box A$ в некотором β, достижимом из него.) Кроме того, отношение достижимости в S4 является, как известно, рефлексивным и транзитивным, но уже не симметричным, т.е. в S4-модельной структуре каждый мир не достижим из каждого, поэтому существенным оказывается понятие выделенного (действительного) мира. Тем не менее, «вполне возможен вариант семантической теории S4, в котором понятие модельной структуры можно исключить, как и в S5» [2, с. 78].

Основные принципы построения семантик исчислений S5, S4, M, в которых не используются понятия модельной структуры, возможного мира, отношения достижимости между мирами, а сами модальные понятия рассматриваются как логические, были предложены Ю.В. Ивлевым [3, с. 168-190]. При данном подходе каждое элементарное (атомарное) высказывание последовательно рассматривается как логически истинное (необходимое), логически недетерминированное (случайное), логически ложное (невозможное) высказывание. Далее, если два и более элементарных (атомарных) высказывания истолковываются одновременно как случайные, каждая их конъюнкция последовательно рассматривается как случайное или невозможное высказывание (поскольку конъюнкция случайных высказываний может оказаться логически ложной: «31 декабря 2012 года будет всемирный банковский кризис и 31 декабря 2012 года всемирного банковского кризиса не будет»). В результате таких интерпретаций — ограничений на допустимые истинностные значения элементарных высказываний — из исходного множества о.с. для формулы могут исключаться некоторые о.с. Так, если переменная рассматривается как обозначающая невозможное (логически ложное) высказывание, то из множества всех возможных о.с. для формулы, содержащей эту переменную, исключаются все о.с., в которые она входит *без отрицания*. В итоге на базе исходного множества о.с. для формулы создаются особые конструкции — ограниченные и относительно ограниченные множества описаний состояний (ОМОСы и ОГОСЫ соответственно), выполняющие роль модельных структур семантик возможных миров [3, с.169].

Дальнейшее изложение посвящено построению семантик указанного типа для систем S5, S4 К.И. Льюиса

2 Трехзначная не–истинностно–функциональная семантика для S5

Опишем семантику интересующего нас вида для пропозиционального фрагмента S5. Пусть язык содержит исходные символы $\neg, \supset, \Box$ (оператор логической необходимости). Понятие формулы и другие логические связки определяются обычным образом. Операторы логической возможности и случайности определяются, соответственно, как $\Diamond A = \neg\Box\neg A$, $\nabla A = \Diamond A \wedge \Diamond\neg A$.

Как указывает Ю.В. Ивлев, основой для ограничения возможных истинностных значений переменных формулы с модальными операторами являются элементарные содержательные соображения.

В качестве примера рассмотрим формулу $\Box q \supset \Diamond(p \supset \Box q)$ и все возможные о.с. для нее: $\alpha_1 = \{p, q\}$, $\alpha_2 = \{p, \neg q\}$, $\alpha_3 = \{\neg p, q\}$, $\alpha_4 = \{\neg p, \neg q\}$.

В описаниях состояний α_2, α_4 ложным является элементарное высказывание q, значит, и высказывание $\Box q$, поскольку высказывание, принимающее значение f («ложь») при некоторой интерпретации, не может считаться логически истинным (необходимым). Значит, в этих о.с. формула $\Box q \supset \Diamond(p \supset \Box q)$ принимает значение t («истина») независимо от значения p. В о.с. α_3 переменная p толкуется как обозачающая ложное высказывание, поэтому в этом о.с. формула $(p \supset \Box q)$ принимает значение t независимо от значений q и $\Box q$. (Иными словами, если p в данной формуле рассматривается как обозначающая невозможное высказывание, то исходная формула оказывается истинной при любом значении q.) Наконец, в о.с. α_1 истинными оказываются оба элементарных высказывания p и q. Что можно сказать в этом случае о значении исходной формулы? Необходимо рассмотреть 4 возможности: 1) p и q обозначают необходимые (логически истинные) высказывания; допустимым относительно такой интерпретации возможных значений переменных будет одноэлементное множество о.с. $\{\{p,q\}\}$; 2) p обозначает необходимое (логически истинное) высказывание, q — логически случайное; такому ограничению допустимых значений переменных будет соответствовать двухэлементное множество о.с. $\{\{p,q\},\{p,\neg q\}\}$; 3) p обозначает случайное, q — необходимое высказывание;такой интерпретации будет соответствовать набор о.с. $\{\{p,q\},\{\neg p,q\}\}$; 4) обе переменные обозначают логически недетерминированные высказывания; возможными наряду с α_1 оказываются все остальные о.с. для формулы.

Последний случай требует некоторых дополнительных ограничений на возможные сочетания высказываний p и q, поскольку, как указывалось выше, конъюнкция двух и более случайных высказываний сама может оказаться невозможным высказыванием. В подобных случаях необходимо учитывать все допустимые варианты образования таких «невозможных» конъюнкий. Какие же варианты будут допустимыми? Очевидно, что «детерминистская» интерпретация возможных значений некоторой переменной (т.е., скажем, $\Box p \vee \neg\Diamond p$) может задаваться единичным о.с., точнее, единичным множеством о.с., которое выполняет условия соответствующей интерпретации. Но чтобы при помощи последовательности (множества) о.с. корректно представить ограничение ∇p, соответствующее множество должно содержать не менее двух о.с., так как переменная p в этом множестве должна хотя бы однажды менять значение. Таким образом, допустимыми будем считать все такие варианты образования «невозможных» конъюнкций двух и более случайных высказываний, при которых сответствующее множество о.с. содержит «от» 2^1 «до» 2^n о.с., а каждая переменная в этом множестве по крайней мере однажды меняет значение.

Будем вслед за Ю.В. Ивлевым называть ОМОСом двухэлементное множество $\langle \text{ОГ}; W^{\text{ı}} \rangle$, где ОГ — интерпретация переменных, входящих в формулу, а $W^{\shortmid}$ — соответствующее такой интерпретации множество о.с.; $W^{\shortmid} \in 2^{2^n}$, где 2^n есть исходное множество о.с. для формулы с n переменными. Далее, если ОГ некоторого ОМОСа содержит две или более интерпретации вида $\triangledown p$, то на его основе строится множество всех допустимых (в указанном смысле) дополнительных ограничений на образование конъюнкций случайных высказываний, входящих в формулу. В результате по каждому такому ОМОСу мы получаем некоторое множество дополнительно ограниченных множеств о.с. (подомосов) вида $\langle ОГ^{\shortmid}; W^{\shortmid\shortmid} \rangle$, где $ОГ^{\shortmid}$ — полное ограничение указанной структуры, а $W^{\shortmid\shortmid}$ — соответствующее ему множество о.с. ($W^{\shortmid\shortmid} \subseteq W^{\shortmid}$). Тогда для вышеприведенной формулы возможными окажутся следующие истолкования ее переменных:

1. $\langle \{\Box p, \Box q\}; \{\{p, q\}\} \rangle$;
2. $\langle \{\Box p, \neg\Diamond q\}; \{\{p, \neg q\}\} \rangle$;
3. $\langle \{\neg\Diamond p, \Box q\}; \{\{\neg p, q\}\} \rangle$;
4. $\langle \{\neg\Diamond p, \neg\Diamond q\}; \{\{\neg p, \neg q\}\} \rangle$;
5. $\langle \{\Box p, \nabla q\}; \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}\} \rangle$;
6. $\langle \{\neg\Diamond p, \nabla q\}; \{\{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\} \rangle$;
7. $\langle \{\nabla p, \Box q\}; \{\{p, q\}, \{\neg p, q\}\} \rangle$;
8. $\langle \{\nabla p, \neg\Diamond q\}; \{\{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\} \rangle$;
9. $\langle \{\nabla p, \nabla q\}; \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}\{\neg p, \neg q\}\} \rangle$.

Для формулы с двумя переменными возможными оказались 9 ОМОСов. Поскольку каждая переменная последовательно интерпретируется как необходимая, невозможная либо случайная, в общем случае число ОМОСов для формулы с n различными переменными определяется выражением 3^n.

Девятый ОМОС содержит 2 ограничения вида ∇, поэтому на его основе образуем следующие подомосы:

1. $\langle \{\nabla p, \nabla q, \Diamond\{p \wedge q\}, \Diamond\{p \wedge \neg q\}, \Diamond\{\neg p \wedge q\}, \Diamond\{\neg p \wedge \neg q\}\}; \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\} \rangle$;

2. $\langle\{\nabla p, \nabla q, \neg\Diamond\{p \wedge q\}, \Diamond\{p \wedge \neg q\}, \Diamond\{\neg p \wedge q\}, \Diamond\{\neg p \wedge \neg q\}\};$
$\{\{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}\rangle;$

3. $\langle\{\nabla p, \nabla q, \Diamond\{p \wedge q\}, \neg\Diamond\{p \wedge \neg q\}, \Diamond\{\neg p \wedge q\}, \Diamond\{\neg p \wedge \neg q\}\};$
$\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}\rangle;$

4. $\langle\{\nabla p, \nabla q, \Diamond\{p \wedge q\}, \Diamond\{p \wedge \neg q\}, \neg\Diamond\{\neg p \wedge q\}, \Diamond\{\neg p \wedge \neg q\}\};$
$\{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}\rangle;$

5. $\langle\{\nabla p, \nabla q, \Diamond\{p \wedge q\}, \Diamond\{p \wedge \neg q\}, \Diamond\{\neg p \wedge q\}, \neg\Diamond\{\neg p \wedge \neg q\}\};$
$\{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}\}\rangle;$

6. $\langle\{\nabla p, \nabla q, \neg\Diamond\{p \wedge q\}, \Diamond\{p \wedge \neg q\}, \Diamond\{\neg p \wedge q\}, \neg\Diamond\{\neg p \wedge \neg q\}\};$
$\{\{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}\}\rangle;$

7. $\langle\{\nabla p, \nabla q, \Diamond\{p \wedge q\}, \neg\Diamond\{p \wedge \neg q\}, \neg\Diamond\{\neg p \wedge q\}, \Diamond\{\neg p \wedge \neg q\}\};$
$\{\{p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}\rangle.$

Нетрудно убедиться, что иных допустимых ограничений на конъюнкции двух случайных переменных не существует. Таким образом, число всех возможных подомосов для формулы с числом переменных $n = 2$ определяется выражением $2^{2^n} - 3^n$. Однако, при $n > 2$ формула для определения числа допустимых подомосов выглядит не столь элементарно. Чтобы обобщить ее для произвольных значений n, рассмотрим еще раз число ОМОСов 3^n.

При больших значениях n это число становится весьма значительным, поэтому хотелось бы иметь способ описания аналогов модельных структур более эффективный, чем простое поэлементное перечисление множества 3^n. Для этого данное число нужно представить в виде эквивалентной ему арифметической функции:

$$C_n^0 \times 2^n + C_n^1 \times 2^{n-1} + C_n^2 \times 2^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1} \times 2^1 + C_n^n \times 2^0 = 3^n,$$

где C_n^i есть биномиальный коэффициент, n — число переменных в формуле.

Каждое слагаемое в данной сумме описывает некоторый класс эквивалентности — группу ограниченных множеств о.с. с одинаковым числом переменных, проинтерпретированных в качестве случайных. Например, первое слагаемое описывает число множеств о.с., в которых все переменные истолковываются как имеющие свои значения по необходимости, второе слагаемое представляет число ОМОСов, в каждом из которых в качестве случайной истолковывается ровно одна переменная и т.д. Проиллюстрировать сказанное удобно при помощи таблицы:

Число ограничений типа ∇ в ОГ' каждого ОМОСа группы	Число ОМОСов в группе	Число о.с. в W'' каждого ОМОСа группы
0	$C_n^0 \times 2^n$	2^0
1	$C_n^1 \times 2^{n-1}$	2^1
$0 < k < n$	$C_n^k \times 2^{n-k}$	2^k
$n-1$	$C_n^{n-1} \times 2^1$	2^{n-1}
n	$C_n^n \times 2^0$	2^n

При определении числа корректных «кластеров» (дополнительно ограниченных множеств о.с.) для $n = 1$, $n = 2$ можно было исходить из следующих элементарных соображений: все переменные в таких множествах истолковываются как случайные, поэтому для определения числа корректных кластеров достаточно из общего числа 2^{2^n} вычесть число множеств с детерминистскими интерпретациями, т.е. 3^n. Для формул с данными значениями n получали, соответственно, 1 и 7. Однако, для исчерпывающего определения числа корректных кластеров при бо́льших значениях n необходимо существенным образом использовать представление числа 3^n в виде эквивалентной ему арифметической функции. В качестве примера рассмотрим подробно разложение на степенные слагаемые указанного вида числа 3^n для $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$.

Пусть $n = 3$; разбиение числа 3^n примет вид:

$$C_3^0 \times 2^3 + C_3^1 \times 2^2 + C_3^2 \times 2^1 + C_3^3 \times 2^0 = 27.$$

Третье слагаемое этой суммы описывает число ограниченных множеств о.с. с двумя случайными переменными. *Каждое* такое множество порождает набор дополнительных ограничений на образование конъюнкций случайных высказываний. Как мы выяснили, при $n = 2$ таких кластеров (подомосов) будет 7. То есть *каждый* элемент из группы $C_3^2 \times 2^1$ порождает 7 дополнительных кластеров, поэтому число допустимых ограничений на образование конъюнкций трех случайных высказываний будет определяться выражением:

$$2^{2^3} - [C_3^0 \times 2^3 + C_3^1 \times 2^2 + C_3^2 \times 2^1 \times 7 + C_3^3 \times 2^0] = 256 - 63 = 193.$$

Пусть $n = 4$; разбиение числа 3^n примет вид:

$$C_4^0 \times 2^4 + C_4^1 \times 2^3 + C_4^2 \times 2^2 + C_4^3 \times 2^1 + C_4^4 \times 2^0 = 81.$$

Каждый из элементов третьего и четвертого слагаемых данной суммы будет порождать, соответственно, по 7 и 193 дополнительных кластеров, следовательно, число допустимых ограничений на образование конъюнкций четырех случайных высказываний будет определяться выражением:

$$2^{2^4} - [C_4^0 \times 2^4 + C_4^1 \times 2^3 + C_4^2 \times 2^2 \times 7 + C_4^3 \times 2^1 \times 193 + C_4^4 \times 2^0] = 65536 - 1761 = 63775.$$

Соответственно, число допустимых ограничений на образование конъюнкций пяти случайных переменных буде определяться выражением

$$2^{2^5} - [C_5^0 \times 2^5 + C_5^1 \times 2^4 + C_5^2 \times 2^3 \times 7 + C_5^3 \times 2^2 \times 193 + C_5^4 \times 2^1 \times 63775 + C_5^5 \times 2^0] = 4.294.967.296 - 646.143 = 4.294.321.153.$$

Если теперь символом $N(k)$ обозначить число допустимых ограничений на образование конъюнкций k случайных переменных ($2 \leq k \leq n-1$), то обобщение полученного алгоритма для формул с произвольным конечным числом переменных n примет вид:

$$2^{2^n} - [C_n^0 \times 2^n + C_n^1 \times 2^{n-1} + C_n^2 \times 2^{n-2} \times N(2) + \ldots + C_n^k \times 2^{n-k} \times N(k) + \ldots + C_n^{n-1} \times 2^1 \times N(n-1) + C_n^n \times 2^0].$$

(Отдельно отметим, что первоначально данный алгоритм формулировался нами в виде последовательности вложенных разностных коэффициентов, что значительно его усложняло. Выяснилось, что в связи с проблемой организации пересчета модельных схем традиционной силлогистики формулировкой схожей закономерности занимался В.А. Бочаров. Приведенный выше алгоритм существенно использует результаты В.А. Бочарова, кроме того, как оказалось, число допустимых модельных схем традиционной силлогистики с n различными непустыми и неуниверсальными терминами совпадает с числом допустимых подомосов для формулы с n переменными, а использованное нами представление числа 3^n в виде арифметической функции удачно описывает число модельных схем аристотелевой силлогистики с n различными терминами. Более подробное исследование этого вопроса было проведено в отдельной работе.)

В предложенной семантике формулам следующим образом приписываются значения:

1. Пропозициональная переменная обычным образом принимает значение t или f в о.с. $\alpha \in W^{\text{ı}}(\alpha \in W^{\text{ıı}})$ в зависимости от того, входит ли в α она сама или ее отрицание.

2. Формула $\neg B$ принимает значение t в α, если и только если (е.т.е.) формула B принимает значение f в α.

3. Формула $A \supset B$ принимает значение t в α, е.т.е формула А принимает значение f в α или формула В принимает значение t в α.

4. Формула $\Box$B истинна в $\langle \text{ОГ}^{\text{ı}}; W^{\text{ıı}}\rangle$ (или в $\langle \text{ОГ}^{\text{ı}}; W^{\text{ıı}}\rangle$), е.т.е. В общезначима в $W^{\text{ı}}$ (в $W^{\text{ıı}}$), т.е. истинна в каждом о.с. из соответствующего множества.

5. Формула $\Diamond$B истинна в $\langle \text{ОГ}^{\text{ı}}; W^{\text{ıı}}\rangle$ (или в $\langle \text{ОГ}^{\text{ı}}; W^{\text{ıı}}\rangle$), е.т.е. В выполнима в $W^{\text{ı}}$ (в $W^{\text{ıı}}$), т.е. истинна в некотором (хотя бы одном) о.с. из соответствующего множества.

   (Фактически, при решении вопроса об истинности или ложности формул вида $\Box$B, $\Diamond$B в $\langle \text{ОГ}^{\text{ı}}; W^{\text{ıı}}\rangle$ (или в $\langle \text{ОГ}^{\text{ı}}; W^{\text{ıı}}\rangle$) мы соотносим их не с отдельным «миром» $\alpha \in W^{\text{ıı}}$, а с множеством о.с. $W^{\text{ıı}}$ в целом, т.е. расссматриваем операторы $\Box, \Diamond$ как кванторы $\forall, \exists$, пробегающие по элементам этого множества.)

6. Формула $\Box$B логически общезначима,е.т.е В общезначима в каждом $W^{\text{ı}} \in 2^{2^n}$ (в каждом элементе множества всех подмножеств исходного множества о.с. для формулы), е.т.е. В истинна в каждом о.с. $\alpha \in 2^n$.

7. Формула $\Box$B логически выполнима, е.т.е. B общезначима в некотором $W^{\text{I}} \in 2^{2^n}$ (существует множество о.с. $W^{\text{I}} \in 2^{2^n}$, возможно, одноэлементное, в каждом о.с. которого B истинна), е.т.е. B истинна в некотором $\alpha \in 2^n$.

8. Формула $\Diamond$B логически общезначима, е.т.е. B логически выполнима (имеется хотя бы одно о.с. $\alpha \in 2^n$, в котором B истинна).

(Согласно приведенным определениям, формула $(\Box p \supset \Diamond q) \supset \Box(p \supset q)$ будет ложной в множестве $\{\{p, q\}, \{p, \neg q\}\}$, т.е. в пятом ОМОСе, а формула $\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Diamond q)$ оказывается логически общезначимой.)

Таким образом, ***в качестве S5-модельных структур при данном подходе рассматриваются все возможные подмножества исходного множества о.с. для формулы. Все о.с., включенные в один кластер W^{I} или W^{II}, объединены общим набором законов ОГ (аналогом S5-отношения достижимости), в качестве которых выступают определенные ограничения допустимых истинностных значений переменных, входящих в формулу***.

В результате мы ***получили теоретико-множественную (экстенсиональную) трехзначную не–истинностно–функциональную семантику для S5: любая модальная формула принимает ровно одно значение из трехэлементного множества $\{N, C, I\}$ (логически необходимо, логически случайно, логически невозможно, соответственно), причем сами эти значения задаются на определенных семействах множеств подмножеств исходного множества о.с. для формулы.*** Не–истинностно–функциональный характер данной семантики проявляется в том, что интерпретации, скажем, ∇p будет соответствовать любая последовательность о.с. длины «от» 2^1 «до» 2^n, в каждой из которых p хотя бы однажды меняет значение.

Будем иметь в виду следующую формулировку S5.

К аксиомам и правилам вывода добавляются схемы аксиом:

A1. $\Box$(A $\supset$ B) $\supset$ ($\Box$A $\supset$ $\Box$B);

A2. $\Box$A $\supset$ A;

A3. $\neg\Box\neg$A $\supset$ $\Box\neg\Box\neg$A,

а также правило Гёделя: $\frac{\vdash \text{A}}{\vdash \Box\text{A}}$.

МЕТАТЕОРЕМА 1. *Каждая теорема исчисления S5 Льюиса является логически общезначимой формулой.*

Рассмотрим лишь аксиому A3. Пусть в некотором W'' формула $\neg\Box\neg$A является истинной, а формула $\Box\neg\Box\neg$A — ложной. Тогда в некотором $\alpha \in W''$ формула A является истинной, а формула $\neg\Box\neg$A является ложной в множестве W''. Значит, в данном W'' истинна формула $\Box\neg$A, т.е. в каждом $\beta \in W''$ формула $\neg$A является истинной, следовательно, формула A является ложной. Пришли к противоречию, т.е. A3 — логически общезначимая формула.

МЕТАТЕОРЕМА 2. *Каждая логически общезначимая формула доказуема в S5.*

Доказательство. Доказательство осуществляется методом Кальмара.

Кратко изложим схему доказательства метатеоремы. Поскольку значения формул, содержащих модальные операторы, определяются не в отдельных о.с., а в их множествах, известная лемма, предшествующая доказательству метатеоремы о полноте методом Кальмара преобразуется в два утверждения.

1. Пусть D — формула, не содержащая вхождений модальных операторов, $\langle \text{ОГ}'; W''\rangle$ — подомос, $a_1, \ldots, a_n$ — все различные переменные, входящие в D, $b_1^\alpha, \ldots, b_n^\alpha$ — истинностные значения этих переменных в о.с. α таком, что $\alpha \in W''$. A_i^α есть a_i, если b_i^α есть t, и есть $\neg a_i$, если b_i^α есть f. Пусть D^α есть D или $\neg D$ в зависимости от того, принимает ли D значение t или f в α. Тогда $\text{ОГ}' \cup \{\text{A}_1^\alpha \ldots \text{A}_n^\alpha\} \vdash D^\alpha$.

2. Пусть D — формула, содержащая вхождения модальных операторов, $\langle \text{ОГ}'; W''\rangle$ — подомос, $a_1, \ldots, a_n$ — все различные переменные, входящие в D, $\{b_{1_k}^w \ldots b_{n_k}^w\}$ — k-элементное множество n-мерных логических векторов, допустимых наборов значений переменных $a_1, \ldots, a_n$ в описаниях состояния $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in W''$ $(1 \leq k \leq 2^n)$.

Пусть A_i ($A_i \in$ ОГ$^{\shortmid}$) есть $\Box a_i$, если $b^w_{i_k}$ есть t для каждого k, есть $\neg\Diamond$a$_i$, если $b^w_{i_k}$ есть f для каждого k, и есть ∇a_i, если для некоторых k $b^w_{i_k}$ есть t и для некоторых k $b^w_{i_k}$ есть f.

Пусть $\sim\Diamond(\sim a_1 \wedge \ldots \wedge \sim a_m)$ ($\sim\Diamond(\sim a_1 \wedge \ldots \wedge \sim a_m) \in$ ОГ$^{\shortmid}$, $2 \leq m \leq n$, $\sim a_i$ есть a_i или $\neg a_i$) есть $\Diamond(\sim a_1 \wedge \ldots \wedge \sim a_m)$, если соответствующая конъюнкция m случайных переменных интерпретируется как логически возможное высказывание, и есть $\neg\Diamond(\sim a_1 \wedge \ldots \wedge \sim a_m)$, если конъюнкция m случайных переменных интерпретируется как логически невозможное высказывание.

Пусть D^w есть D или $\neg D$ в зависимости от того, принимает ли D значение t или f в $W^{\shortmid\shortmid}$.

Тогда для любого набора гипотез $A_1 \ldots A_n$, $\sim\Diamond(\sim a_1 \wedge \ldots \wedge \sim a_m)_1$, …, $\sim\Diamond(\sim a_1 \wedge \ldots \wedge \sim a_m)_r$ ($r = 2^m$) выполняется:
$A_1 \ldots A_n$, $\sim\Diamond(\sim a_1 \wedge \ldots \wedge \sim a_m)_1$, …, $\sim\Diamond(\sim a_1 \wedge \ldots \wedge \sim a_m)_r$ $\vdash D^w$.

Оба утверждения доказываются возвратной математической индукцией по числу вхождений символов $\neg$, $\supset$ и $\Box$ в D, не считая вхождений этих символов в элементарные формулы.

Результатом доказательства является истинность утверждения: если формула D общезначима, то для любого набора ограничений ОГ$^{\shortmid}$ верно, что ОГ$^{\shortmid}$ $\vdash D$.

Далее, в результате последовательного применения $\vee$-удаления к гипотезам из ОГ$^{\shortmid}$ выясняется, что при любой интерпретации переменных, входящих в общезначимую формулу D, в качестве необходимых, невозможных или случайных высказываний D доказуема в S5. Q.E.D.

3 Трехзначная не–истинностно–функциональная семантика для S4

Построение семантики интересующего нас вида для S4 несколько усложняется двумя факторами: во-первых, существенным оказывается понятие выделенного мира (точнее, какой-либо аналог этого понятия); во-вторых, в отличие от S5, в S4 имеются собственные несводимые модальности неэлементарного уровня ($\Box\Diamond, \Diamond\Box, \Diamond\Box\Diamond, \Box\Diamond\Box$ и их отрицательные напарники). С другой стороны, в S4 имеется всего 12 несводимых модальностей ненулевого уровня, и, как мы увидим, предлагаемый подход позволяет построить интуитивно ясные и технически простые семантические модели всех итерированных модальностей S4-типа.

Будем использовать следующую формулировку S4:

A1. $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$;

A2. $\Box A \supset A$;

A3. $\Box A \supset \Box\Box A$,

а также правило Гёделя $\frac{\vdash A}{\vdash \Box A}$.

Язык пропозиционального фрагмента S4 содержит те же базовые символы и определения операторов логической возможности и случайности, что и вышеприведенный фрагмент S5.

Пусть W — 2^n-элементное множество исходно возможных о.с. для формулы с n переменными. По каждому $\alpha_i \in W$ мы строим множество всех возможных ограничений на истинностные значения переменных формулы. Поскольку каждое о.с. содержит n переменных, а каждая переменная может истолковываться как имеющая свое значение случайно или по необходимости, изначально допустимыми по каждому $\alpha_i \in W$ оказываются 2^n таких истолкований. При этом данное число удобнее рассматривать в качестве арифметической функции — суммы элементов строки треугольника Паскаля с основанием n, в которой слагаемое вида C_n^k обозначает число интерпретаций, толкующих в качестве случайных какие-либо k переменных. По каждой интерпретации, в которой $2 \leq k \leq n$, строится, как и в семантике для S5, набор дополнительных ограничений на образование конъюнкций случайных высказываний, в результате чего из исходного множества о.с. для формулы могут исключаться некоторые элементы.

Таким образом, *в качестве наиболее простых аналогов S4-модельных структур мы будем использовать трехэлементные множества* $\langle \text{ОГ}_1^{\text{I}}; \alpha_i; W_1^{\text{II}} \rangle$, *где* α_i *— исходное о.с. (аналог выделенного мира), относительно которого рассматриваются все возможные ограничения логических форм элементарных высказываний,* ОГ_1^{I} *— одна из таких интерпретаций, выполняющая роль отношения достижимости семантик возможных миров,* W_1^{II} *— множество о.с., выполняющих условия* ОГ_1^{I}. Каждое такое трехэлементное множество будем называть ***относительно ограниченным множеством описаний состояний (ОГОСом) первой степени***.

В ОГОСах первой степени следующим образом приписываются значения формулам без итерированных модальностей:

$$|\Box B|_{w_1''} = t \Leftrightarrow \forall\alpha(\alpha \in W_1'' \Rightarrow |B|_\alpha = t)$$

(формула $\Box$B истинна в $\langle \text{ОГ}'_1; \alpha_i; W_1'' \rangle$, е.т.е B истинна в каждом о.с. из W_1''),

$$|\Diamond B|_{w_1''} = t \Leftrightarrow \exists\alpha(\alpha \in W_1'' \wedge |B|_\alpha = t).$$

По сути, способ оценки формул с модальностями $\Box, \Diamond$ остается тем же, что и в семантике для S5.

Для определения значений формул с модальностями вида $\Box\Diamond$, $\Diamond\Box$ и их отрицательными напарниками по каждому ОГОСу первой степени следующим образом строится множество ОГОСов второй степени. Переменные, проинтерпретированные как необходимые или невозможные на первом шаге, сохраняют исходные значения во всех ОГОСах более высокого уровня (в силу A3). Переменные, истолкованные как случайные в некотором $\langle \text{ОГ}'_1; \alpha_i; W_1'' \rangle$, могут на втором шаге получить интерпретацию $\Box\nabla$ или $\nabla\nabla$; при этом способ представления таких интерпретаций в $\langle \text{ОГ}'_2; \alpha_i; W_2'' \rangle$ несколько усложняется по сравнению с $\langle \text{ОГ}'_1; \alpha_i; W_1'' \rangle$: если произвольное W_1'' есть множество о.с., то W_2'' есть *множество множеств о.с.*, т.е. элементами W_2'' оказываются объекты предыдущего уровня — множества W_1''. Если $\langle \text{ОГ}'_2; \alpha_i; W_2'' \rangle$ содержит для некоторой переменной p_i истолкование $\Box\nabla p_i$, то элементами W_2'' будут только такие множества W_1'', в каждом из которых p_i по крайней мере однажды меняет значение. Если же в $\langle \text{ОГ}'_2; \alpha_i; W_2'' \rangle$ содержится интерпретация $\nabla\nabla p_i$, то в W_2'' *она будет представлена тройкой множеств о.с., соответствующей истолкованию* $\Box\nabla p_i \vee \Box p_i \vee \neg\Diamond p_i$. Поясним сказанное на примерах.

Рассмотрим один из ОГОСов первой степени для формулы с тремя переменными. Пусть α_i есть $\{p, q, r\}$, $\text{ОГ}'_1$ есть $\Box p, \nabla q, \nabla r$. Тогда соответствующий $\langle \text{ОГ}'_1; \alpha_i; W_1'' \rangle$ примет вид:

$$\langle \{\Box p, \nabla q, \nabla r\}; \{p, q, r\}; \{\{p, q, r\}, \{p, q, \neg r\}, \{p, \neg q, r\}, \{p, \neg q, \neg r\}\} \rangle.$$

Переменная p интерпретируется как необходимая, q и r — как логически недетерминированные, поэтому возможными в S4 оказываются 4 $\langle \text{ОГ}'_2; \alpha_i; W_2'' \rangle$ по данному $\langle \text{ОГ}'_1; \alpha_i; W_1'' \rangle$:

1. $\langle\{\Box\Box p, \Box\nabla q, \Box\nabla r\}; \{p, q, r\}; \{\{\{p, q, r, \}\{p, q, \neg r\}, \{p, \neg q, r\}, \{p, \neg q, \neg r\}\}\}\rangle$ — поскольку все изначальные интерпретации допустимых истинностных значений переменных оцениваются как необходимые, $W_2^{''}$ данного ОГОСа будет одноэлементным множеством множеств о.с. Его единственный элемент — четырехэлементное множество о.с. $W_1^{''}$, входящее в исходный $\langle \text{ОГ}_1^{'}; \alpha_i; W_1^{''}\rangle$.

2. $\langle\{\Box\Box p, \Box\nabla q, \nabla\nabla r\}; \{p, q, r\}; \{\{\{p, q, r, \}, \{p, q, \neg r\}, \{p, \neg q, r\}, \{p, \neg q, \neg r\}\}; \{\{p, q, r\}, \{p, \neg q, r\}\}; \{\{p, q, \neg r\}, \{p, \neg q, \neg r\}\}\}\rangle$ — переменная r имеет неопределенностное значение вида $\Box\nabla r \vee \Box r \vee \neg\Diamond r$. В $W_2^{''}$ такая интерпретация будет представлена тройкой множеств о.с. Первое множество о.с. соответствует истолкованию $\Box\nabla r$, второе и третье — истолкованиям $\Box r$ и $\neg\Diamond r$ соответственно.

3. $\langle\{\Box\Box p, \nabla\nabla q, \Box\nabla r\}; \{p, q, r\}; \{\{\{p, q, r\}, \{p, q, \neg r\}, \{p, \neg q, r\}, \{p, \neg q, \neg r\}\}\ \{\{p, q, r\}, \{p, q, \neg r\}\}; \{\{p, \neg q, r\}, \{p, \neg q, \neg r\}\}\}\rangle$ — случай аналогичен предыдущему.

4. $\langle\{\Box\Box p, \nabla\nabla q, \nabla\nabla r\}; \{p, q, r\}; \{\{\{p, q, r\}, \{p, q, \neg r\}, \{p, \neg q, r\}, \{p, \neg q, \neg r\}\}; \{\{p, q, r\}, \{p, \neg q, r\}\}; \{\{p, q, \neg r\}, \{p, \neg q \neg r\}\}; \{\{p, q, r\}, \{p, q, \neg r\}\}; \{\{p, \neg q, r\}, \{p, \neg q, \neg r\}\}; \{\{p, q, r\}\}; \{\{p, q, \neg r\}\}; \{\{p, \neg q, r\}\}; \{\{p, \neg q, \neg r\}\}\}\rangle$ — неопределенностной интерпретации обеих первично случайных переменных соответствует девятиэлементное множество множеств о.с.

Таким образом, если k $(0 \leq k \leq n)$ — число случайных переменных в некотором ОГОСе первой степени, то он порождает 2^k ОГОСов второй степени, причем число элементов — множеств $W_1^{''} \in W_2^{''}$ этих ОГОСов — может варьироваться от 3^0 до 3^k.

Число $\langle \text{ОГ}_2^{'}; \alpha_i; W_2^{''}\rangle$ по отдельному α_i удобно представить в виде следующей арифметической функции:

$$C_n^0 \times 2^0 + C_n^1 \times 2^1 + C_n^2 \times 2^2 + \ldots + C_n^k \times 2^k + \ldots + C_n^n \times 2^n = 3^n.$$

Слагаемое $C_n^k \times 2^k$ представляет число $\langle \text{ОГ}_2^{'}; \alpha_i; W_2^{''}\rangle$, порожденных ОГОСами первой степени с k случайными переменными. Закономерности порождения различных $\langle \text{ОГ}_2^{'}; \alpha_i; W_2^{''}\rangle$ по некоторому $\langle \text{ОГ}_1^{'}; \alpha_i; W_1^{''}\rangle$ можно выразить в виде таблицы:

Число случайных переменных в каждом $\langle \text{ОГ}^{\shortmid}_1; \alpha_i; W^{\shortmid\shortmid}_1 \rangle$ группы	Число $\langle \text{ОГ}^{\shortmid}_2; \alpha_i; W^{\shortmid\shortmid}_2 \rangle$, порожденных каждой группой $\langle \text{ОГ}^{\shortmid}_1; \alpha_i; W^{\shortmid\shortmid}_1 \rangle$	Возможное число элементов $W^{\shortmid\shortmid}_1$ в каждом $\langle \text{ОГ}^{\shortmid}_2; \alpha_i; W^{\shortmid\shortmid}_2 \rangle$	Максимальное число о.с. в $W^{\shortmid}_1$
0	$C^0_n \times 2^0$	3^0	2^0
1	$C^1_n \times 2^1$	$3^0 \vee 3^1$	2^1
2	$C^2_n \times 2^2$	$3^0 \vee 3^1 \vee 3^2$	2^2
k	$C^k_n \times 2^k$	$3^0 \vee \ldots \vee 3^k$	2^k
n	$C^n_n \times 2^n$	$3^0 \vee \ldots \vee 3^n$	2^n

Формулам с модальностями вида $\Box\Diamond$, $\Diamond\Box$ следующим образом приписываются значения в $\langle \text{ОГ}^{\shortmid}_2; \alpha_i; W^{\shortmid\shortmid}_2 \rangle$:

$$|\Box\Diamond B|_{w^{\shortmid\shortmid}_2} = t \Leftrightarrow \forall W^{\shortmid\shortmid}_1 (W^{\shortmid\shortmid}_1 \in W^{\shortmid\shortmid}_2 \Rightarrow \exists \alpha (\alpha \in W^{\shortmid\shortmid}_1 \wedge |B|_\alpha = t))$$

(формула вида $\Box\Diamond B$ истинна в $W^{\shortmid\shortmid}_2$, е.т.е. B выполнима в каждом $W^{\shortmid}_1 \in W^{\shortmid\shortmid}_2$, т.е. истинна в некотором о.с. каждого $W^{\shortmid\shortmid}_1$),

$$|\Diamond\Box B|_{w^{\shortmid\shortmid}_2} = t \Leftrightarrow \exists W^{\shortmid\shortmid}_1 (W^{\shortmid\shortmid}_1 \in W^{\shortmid\shortmid}_2 \wedge \forall \alpha (\alpha \in W^{\shortmid\shortmid}_1 \Rightarrow |B|_\alpha = t)).$$

Таким образом, при определении значений формул с модальностями вида $\Box\Diamond$, $\Diamond\Box$ мы соотносим их с множеством $W^{\shortmid\shortmid}_2$ в целом, т.е. рассматриваем их как сложные кванторы, пробегающие по элементам $W^{\shortmid\shortmid}_2$.

(Отметим, что вышеприведенный пример построения ОГОСов второй степени по некоторому ОГОСу первой степени удачно иллюстрирует опровержимость в S4 схемы аксиом $\Diamond A \supset \Box\Diamond A$. В исходном $\langle \text{ОГ}^{\shortmid}_1; \alpha_i; W^{\shortmid\shortmid}_1 \rangle$ формула $(\Diamond p \supset (q \supset r))$ истинна, а вот формула $\Box\Diamond(p \supset (q \supset r))$ ложна в четвертом $\langle \text{ОГ}^{\shortmid}_2; \alpha_i; W^{\shortmid\shortmid}_2 \rangle$, поскольку среди элементов $W^{\shortmid\shortmid}_2$ этого ОГОСа имеется множество $\{\{p, q, \neg r\}\}$, в котором $(p \supset (q \supset r))$ невыполнима.)

Значения формул с модальностями вида $\Box\Diamond\Box$, $\Diamond\Box\Diamond$ определяются в ОГОСах третьей степени. Общее число $\langle \text{ОГ}^{\shortmid}_3; \alpha_i; W^{\shortmid\shortmid\shortmid}_3 \rangle$ по отдельному α_i описывается арифметической функцией вида

$$C^0_n \times 3^0 + C^1_n \times 3^1 + C^2_n \times 3^2 + \ldots + C^k_n \times 3^k + \ldots + C^n_n \times 3^n = 4^n,$$

где слагаемое $C^k_n \times 3^k$ представляет число $\langle \text{ОГ}^{\shortmid}_3; \alpha_i; W^{\shortmid\shortmid\shortmid}_3 \rangle$, порождаемых теми ОГОСами первой степени, в каждом из которых в качестве случайных истолковываются какие-либо k переменных

$(0 \leq k \leq n)$. При этом элементами W''_3 будут объекты предыдущего уровня — множества множеств о.с. W''_2, а число таких элементов может варьироваться от 3^0 до 3^n.

Связь между степенью ОГОСа, числом случайных переменных в исходной интерпретации, типом и числом элементов в W''_i выразим при помощи таблицы:

Степень ОГОСа	Число случайных переменных в ОГ	Число элементов в W	Тип элементов W
$\langle \text{ОГ}'_1; \alpha_i; W''_1 \rangle$	$0 \leq i \leq n$ (n — число переменных в формуле)	2^i	о.с.
$\langle \text{ОГ}'_2; \alpha_i; W''_2 \rangle$	$0 \leq k \leq i$	3^k	Множества о.с.
$\langle \text{ОГ}'_3; \alpha_i; W''_3 \rangle$	$0 \leq m \leq k$	3^m	Множества множеств о.с.

Формулам с модальностями вида $\Box\Diamond\Box$, $\Diamond\Box\Diamond$ следующим образом приписываются значения в $\langle \text{ОГ}'_3; \alpha_i; W''_3 \rangle$:

$|\Box\Diamond\Box B|_{w''_3} = t \Leftrightarrow \forall W''_2(W''_2 \in W''_3 \Rightarrow \exists W''_1(W''_1 \in W''_2 \wedge \forall \alpha(\alpha \in W''_1 \Rightarrow |B|_\alpha = t)))$

(формула вида $\Box\Diamond\Box B$ истинна в W''_3, е.т.е. формула $\Diamond\Box B$ истинна в каждом его элементе W''_2, е.т.е. формула $\Box B$ выполнима в каждом W''_2, е.т.е. в каждом множестве множеств о.с. W''_2 найдется хотя бы один элемент W''_1 такой, что формула B общезначима в нем, т.е. истинна в каждом о.с. из этого W''_1),

$|\Diamond\Box\Diamond B||_{w''_3} = t \Leftrightarrow \exists W''_2(W''_2 \in W''_3 \wedge \forall W''_1(W''_1 \in W''_2 \Rightarrow \exists \alpha(\alpha \in W''_1 \wedge |B|_\alpha = t)))$.

Как и ранее, модальности $\Box\Diamond\Box$, $\Diamond\Box\Diamond$ рассматриваются как своего рода кванторы, пробегающие по элементам некоторого W''_3 — множествам множеств о.с. W''_2.

Рассмотрим несколько примеров. Четвертый из приведенных выше $\langle \text{ОГ}'_2; \alpha_i; W''_2 \rangle$ для формулы с тремя переменными порождает 4 ОГОСа третьей степени, одним из которых будет такой $\langle \text{ОГ}'_3; \alpha_i; W''_3 \rangle$:

$<\{\Box\Box\Box p, \Box\nabla\nabla q, \nabla\nabla\nabla r\}; \{p, q, r\};$

$[\ \{\{p, q, r\}, \{p, q, \neg r\}, \{p, \neg q, r\}, \{p, \neg q, \neg r\}\};$

$\{\{p, q, r\}, \{p, \neg q, r\}\}; \{\{p, q, \neg r\}, p, \neg q, \neg r\}\};$
$\{\{p, q, r\}, \{p, q, \neg r\}\}; \{\{p, \neg q, r\}, \{p, \neg q, \neg r\}\};$
$\{\{p, q, r\}\}; \{\{p, q, \neg r\}\}; \{\{p, \neg q, r\}\}; \{\{p, \neg q, \neg r\}\}\ \big]$
$\big[\{\{p, q, r\}, \{p, \neg q, r\}\}; \{\{p, q, r\}\}; \{\{p, \neg q, r\}\}\big]$
$\big[\{\{p, q, \neg r\}, \{p, \neg q, \neg r\}\}; \{\{p, q, \neg r\}\}; \{\{p, \neg q, \neg r\}\}\big] >.$

Набору ограничений, входящему в данный $\langle \text{О}\Gamma_3^{'}; \alpha_i; W_3^{''} \rangle$, соответствует трехэлементное множество $W_3^{''}$. Каждый отдельный его элемент (множество множеств о.с.) мы выделили квадратными скобками. Формула $\Diamond\Box\Diamond(p \supset (q \supset r))$ истинна в данном $\langle \text{О}\Gamma_3^{'}; \alpha_i; W_3^{''} \rangle$. Это означает, что $W_3^{''}$ этого ОГОСа содержит (хотя бы) одно такое множество множеств о.с. $W_2^{''}$, что в каждом его элементе $W_1^{''}$ формула $(p \supset (q \supset r))$ выполнима. Таким множеством множеств о.с., причем единственным, является *второе* из выделенных квадратными скобками множеств. Два других $W_2^{''}$ содержат опровергающее одноэлементное множество о.с. $\{\{p, q, \neg r\}\}$.

В этом же $\langle \text{О}\Gamma_3^{'}; \alpha_i; W_3^{''} \rangle$ ложна формула $\Box\Diamond\Box(p \supset (q \wedge r))$; это озачает, что имеется $W_2^{''} \in W_3^{''}$, в котором формула $\Box(p \supset (q \wedge r))$ невыполнима, т.е. среди элементов этого $W_2^{''}$ нет ни одного множества о.с. $W_1^{''}$, в каждом о.с. которого формула $p \supset (q \wedge r)$ была бы истинной. Таким опровергающим $W_2^{''}$ является *третье* из выделенных квадратными скобками множеств множеств о.с. Это автоматически означает, что в данном $\langle \text{О}\Gamma_3^{'}; \alpha_i; W_3^{''} \rangle$ истинным является отрицание исходной формулы, т.е. $\Diamond\Box\Diamond\neg(p \supset (q \wedge r))$. Нетрудно убедиться, что формула $\Box\Diamond(p \wedge (\neg q \vee \neg r))$ истинна в том же $W_2^{''} \in W_3^{''}$.

Приведенных определений достаточно для установления значений формул с любым конечным числом модальных операторов в семантике для S4, поскольку все они сводятся к одному из двенадцати видов собственных несводимых модальностей, выделяемых в этой системе. Кроме того, в силу правил построения ОГОСов неэлементарного уровня по некоторому исходному $\langle \text{О}\Gamma_1^{'}; \alpha_i; W_1^{''} \rangle$, модализированные формулы каждого из основных типов, оцененные как истинные в ОГОСе соответствующего уровня, сохраняют истинность (*общезначимость* или *выполнимость*) при любых допустимых интерпретациях $\text{О}\Gamma^{'}$ более высокого уровня. К примеру, если формула вида $\Box\Diamond B$ принимает значение t в некотором $W_2^{''}$, то в любом допустимом относительно него множестве $W_n^{''}$ $(n > 2)$ эта оценка сохранится, так как $\Box\Diamond B \supset \Box\Box\Diamond B$ есть теорема S4; если формула $\Diamond\Box\Diamond B$ оценивается как истинная в некотором $W_3^{''}$, то ее истинность (*выполнимость*) сохраняется в любом $W_n^{''}$ $(n > 3)$, допустимом правилами построения относительно исходного $\langle \text{ОГ}_3^{'}; \alpha_i; W_3^{''} \rangle$, поскольку $\Diamond\Box\Diamond B \supset \Diamond\Diamond\Box\Diamond B$ есть теорема S4 и т.д.

4 Предварительные выводы

Изложенные в настоящей работе принципы построения семантик модальных систем предполагают использование только традиционных для логики понятий (логической) истинности, (логической) ложности, (логической) выполнимости, что, на наш взгляд, выгодно их отличает от семантик возможных миров. Кроме того, число ограниченных и относительно ограниченных множеств о.с., выполняющих роль модельных структур семантик возможных миров, *всегда конечно* при описании пропозициональных фрагментов модальных систем и конечно в случае их предикатных расширений при соблюдении дополнительного условия конечности предметной области. Это позволяет организовать эффективный пересчет *всех* аналогов модельных структур для произвольной формулы (множества формул), который и был осуществлен нами при помощи элементарных арифметических функций. Данный факт, в свою очередь, позволяет автоматизировать процесс проверки модальных формул на общезначимость и выполнимость.

За рамками настоящей статьи осталось описание сокращенных способов проверки модальных формул на общезначимость и выполнимость, а также детальное доказательство метатеорем о полноте исчислений S5, S4 относительно предложенных семантик. Эти вопросы будут рассмотрены в отдельном исследовании.

Литература

[1] *Архиереев Н.Л.* К вопросу о содержательном истолковании итерированных модальностей в системе S4 К. И. Льюиса // Труды научно–исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. М.: 2008. Вып. XIX, С. 7–19.

[2] *Войшвилло Е. К.* Содержательный анализ модальностей S4 и S5 // Филос. науки . М.: 1983. № 3, С. 76–80

[3] *Ивлев Ю. В.* Модальная логика. М.: 1991.