О четырехзначных регулярных логиках

Н. Е. Томова

ABSTRACT. A set of four-valued regular logics is introduced in the article. It is shown that the set of four-valued regular logics does not coincide with the set of four-valued monotonic logics (if the set $\{1, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\}$ is ordered by that way: $\frac{1}{3} \leqslant 0$, $\frac{1}{3} \leqslant 1$, $1 \leqslant \frac{2}{3}$, $0 \leqslant \frac{2}{3}$, and 1 and 0 noncomparable).

Ключевые слова: трехзначные логики Клини, четырехзначные регулярные логики.

1 Введение

Под регулярной логикой будем понимать множество связок $\{\vee, \neg\}$, где $\vee$ есть регулярная дизъюнкция, а $\neg$ есть отрицание ($\neg 1 = 0, \neg 0 = 1, \neg\frac{2}{3} = \frac{2}{3}, \neg\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$). Нас будут интересовать только C-расширяющие логики, т. е. логики, в которых таблицы истинности для пропозициональных связок полностью совпадают на классических истинностных значениях $\{0, 1\}$ с распределением значений в классической логике. Говоря неформально, C-расширяющие логики содержат на множестве $\{0, 1\}$ классическую двузначную логику.

В работе [1] было представлено семейство трехзначных регулярных логик, описаны их свойства и взаимоотношения. Результаты, полученные в [1], можно обобщить и описать класс всех четырехзначных регулярных логик. Для этого необходимо: 1) вычислить количество всех четырехзначных регулярных логик, а затем 2) найти структуру, которую они могут образовывать. В данной статье остановимся на решении задачи 1). Для этого достаточно вычислить число всех четырехзначных регулярных дизъюнкций.

2 Трехзначные регулярные дизъюнкции

Идея создания многозначных регулярных логик принадлежит С. Клини [2]. При решении проблемы определения трехзначных логических связок С. Клини предложил регулярные таблицы и указал, что эти таблицы нужно выбирать регулярными в следующем смысле: данный столбец (строка) содержит 1 в строке (столбце) для $\frac{1}{2}$ только при условии, что этот столбец (эта строка) состоит целиком из 1; аналогично для 0.

В работе [1] было найдено число всех трехзначных регулярных логик, оно равно 4. Приведем таблицы для трехзначных регулярных дизъюнкций:

(I)

$\vee^I$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

(II)

$\vee^{II}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

(III)

$\vee^{III}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

(IV)

$\vee^{IV}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

Заметим, что первая таблица соответствует дизъюнкции в сильной логике Клини, последняя — дизъюнкции в слабой логике Клини, таблицы (II) и (III) соответствуют дизъюнкциям логики **Lisp** и дуальной ей логики **TwinLisp** соответственно.

В упомянутой работе [1] было также установлено, что логики **Lisp** и **TwinLisp** являются промежуточными между сильной и слабой логиками Клини, а также что множество всех трехзначных регулярных логик образует решетку по отношению D-включения, причем $\mathbf{K}_3$ — является супремумом, а $\mathbf{K}_3^W$ — инфинумом.

3 Семейство четырехзначных регулярных логик

Обобщая свойство регулярности, предложенное С. Клини, имеем: в случае четырехзначных регулярных логик пропозициональные связки будут определяться регулярными таблицами в следующем смысле: данный столбец (строка) содержит 1 в строке (столбце) для $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$ только при условии, что этот столбец (эта строка) состоит целиком из 1; аналогично для 0.

Будем рассматривать только четырехзначные регулярные дизъюнкции. Согласно сформулированному выше свойству регулярности, эти дизъюнкции будут определяться следующими четырьмя типами регулярных матриц:

(I)

$\vee^I$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
1	1	1	1	1
$\frac{2}{3}$	1	?	?	?
$\frac{1}{3}$	1	?	?	?
0	1	?	?	0

(II)

$\vee^{II}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
1	1	1	1	1
$\frac{2}{3}$	?	?	?	?
$\frac{1}{3}$	?	?	?	?
0	1	?	?	0

(III)

$\vee^{III}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
1	1	?	?	1
$\frac{2}{3}$	1	?	?	?
$\frac{1}{3}$	1	?	?	?
0	1	?	?	0

(IV)

$\vee^{IV}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
1	1	?	?	1
$\frac{2}{3}$	?	?	?	?
$\frac{1}{3}$	?	?	?	?
0	1	?	?	0

на месте ? — любое промежуточное значение ($\frac{1}{3}$ или $\frac{2}{3}$).

Нетрудно заметить, что таблицы (I) типа представляют собой обобщение на четырехзначный случай сильной трехзначной регулярной таблицы для дизъюнкции; таблицы (IV) типа — обобщение слабой трехзначной регулярной таблицы для дизъюнкции; таблицы (II) и (III) типов представляют собой обобщения на четырехзначный случай промежуточных трехзначных регулярных таблиц для дизъюнкции логик **Lisp** и **TwinLisp** соответственно. Используя указанные регулярные таблицы, можем вычислить число всех четырехзначных регулярных дизъюнкций. Итак, дизъюнкций

$$\begin{aligned} &\text{(I)} && \text{типа} — 2^8 \\ &\text{(II)} && \text{типа} — 2^{10} \\ &\text{(III)} && \text{типа} — 2^{10} \\ &\text{(IV)} && \text{типа} — 2^{12}. \end{aligned}$$

Таким образом, всего четырехзначных регулярных дизъюнкций 6400, и соответственно столько же четырехзначных регулярных логик.

4 Регулярность и монотонность

Напомним, что в случае трехзначных логик иногда регулярность (например, см. [3]) определяют также как монотонность на порядке $\frac{1}{2} \leqslant 1$, $\frac{1}{2} \leqslant 0$, причем 1 и 0 несравнимы. При так заданном порядке класс монотонных трехзначных логик совпадает с классом трехзначных регулярных логик.

Когда имеем дело с четырехзначными логиками, ситуация меняется.

Определение монотонности опирается на отношение порядка на множестве истинностных значений, а определение регулярности дается без учета того или иного порядка на этом множестве. Так, если установить порядок на множестве $\{1, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\}$ таким образом, что $\frac{1}{3} \leqslant 0$, $\frac{1}{3} \leqslant 1$, $1 \leqslant \frac{2}{3}$, $0 \leqslant \frac{2}{3}$, причем 1 и 0 несравнимы, то число регулярных четырехзначных дизъюнкций и число монотонных четырехзначных дизъюнкций совпадать не будет. Заметим, что установленный порядок представляет собой обобщение порядка Клини на четырехзначный случай.

Итак, можно сосчитать число всех монотонных дизъюнкций при указанном порядке на множестве $\{1, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\}$, оно равно 81, однако лишь 6 из них являются регулярными в смысле Клини («данный столбец (строка) содержит 1 в строке (столбце) для значений $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ только при условии, что этот столбец (строка) состоит целиком из 1; аналогично для 0»). Эти дизъюнкции определяются следующими таблицами:

(II)

$\vee^{II}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
1	1	1	1	1
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

(III)

$\vee^{III}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
1	1	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

(IV)

$\vee_1^{IV}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
1	1	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

(IV)

$\vee_2^{IV}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
1	1	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

(IV)

$\vee_3^{IV}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
1	1	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

(IV)

$\vee_4^{IV}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
1	1	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

Очевидно, дизъюнкции, определяемые регулярными таблицами $\vee^{II}$ и $\vee^{III}$, представляют собой обобщение на четырехзначный случай дизъюнкций логики **Lisp** и **TwinLisp**. Дизъюнкции $\vee_1^{IV}$, $\vee_2^{IV}$, $\vee_3^{IV}$, $\vee_4^{IV}$ являются обобщениями слабой дизъюнкции Клини.

Рассмотрим взаимоотношения между четырехзначными регулярными логиками $\{\neg, \vee^{II}\}, \{\neg, \vee^{III}\}, \{\neg, \vee_1^{IV}\}, \{\neg, \vee_2^{IV}\}, \{\neg, \vee_3^{IV}\}$, $\{\neg, \vee_4^{IV}\}$.

Итак, логика $\{\neg, \vee^{II}\}$ дуальна $\{\neg, \vee^{III}\}$ и наоборот, поскольку справедливы следующие равенства: $x \vee^{II} y = y \vee^{III} x$ и $x \vee^{III} y = y \vee^{II} x$.

Логика $\{\neg, \vee_2^{IV}\}$ дуальна $\{\neg, \vee_3^{IV}\}$ и наоборот, поскольку справедливо: $x \vee_2^{IV} y = y \vee_3^{IV} x$ и $x \vee_3^{IV} y = y \vee_2^{IV} x$.

Учитывая вышесказанное, а также следующие соотношения

$x \vee_2^{IV} y = \neg(\neg(x \vee^{II} y) \vee^{II} \neg(y \vee^{II} x))$

$x \vee_2^{IV} y = \neg(\neg(x \vee^{III} y) \vee^{III} \neg(y \vee^{III} x))$,

получаем, что $\{\neg, \vee_2^{IV}\} \subset \{\neg, \vee^{II}\}$, $\{\neg, \vee_2^{IV}\} \subset \{\neg, \vee^{III}\}$ и $\{\neg, \vee_3^{IV}\} \subset \{\neg, \vee^{II}\}$, $\{\neg, \vee_3^{IV}\} \subset \{\neg, \vee^{III}\}$.

***

Итак, в работе представлено семейство четырехзначных регулярных логик. В ходе исследования удалось установить тот факт, что в случае четырех значений класс регулярных логик не совпадает с классом монотонных. Однако, как показано в [1], это справедливо для трехзначных систем. Вопрос о структуре семейства четырехзначных регулярных логик пока остается открытым.

Литература

[1] *Комендантская Е. Ю.* Функциональная взаимовыразимость регулярных логик Клини // Логические исследования. Вып. 15. М., 2008.

[2] *Клини С.К.* Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957.

[3] *Fitting M.* Kleene's Three Valued Logics and Their Children // Fundamenta Informaticae. 1992. Vol. 20. P. 113–131.