О кирпичах математической логики[1]

М. И. Шейнфинкель (Москва)[2]

§ 1

Согласно существу аксиоматического метода, который сегодня получил признание, прежде всего благодаря работам Гильберта, нужно стремиться не только к максимальному ограничению числа и содержания *аксиом*, но стараться также максимально уменьшить число неопределяемых основных *понятий*. Это достигается выбором наиболее подходящих понятий, из которых можно построить все другие понятия рассматриваемой области науки. В соответствии с этим требованием простоты и стремятся задавать исходные понятия.

Основные *связки высказываний* математической логики я передаю здесь с помощью обозначений, использованных Гильбертом в его лекциях:

$$\overline{a}, \quad a \vee b, \quad a \ \& \ b, \quad a \rightarrow b, \quad a \sim b$$

(читается: “не-a”, “a или b”, “a и b”, “если a, то b”, “a эквивалентно b”). Как известно, из одной связки все остальные получить вообще нельзя, но можно получить из двух связок, приняв в качестве основных и неопределяемых отрицание и какую-то из следующих за ним трех связок. (Из этих трех способов редукции Рассел и Уайтхед избрали в качестве основы отрицание и дизъюнкцию, а Фреге – отрицание и импликацию).

[1] *Schönfinkel M.* Über die Bausteine der mathematischen Logik // Mathematische Annalen. 1924. Bd. 92. S. 305–316 / Перевод с нем. А.Л. Никифорова.

[2] Излагаемые ниже размышления были представлены автором 7 декабря 1920 г. Математическому обществу Геттингена. Их формальная и стилистическая правка для подготовки к печати была осуществлена Г. Беманом из Геттингена.

Тем не менее сведение к одной-единственной основной связке вполне возможно, если не ограничиваться теми связками, которые приведены выше. Недавно это было показано Шеффером[3]. В качестве основной связки можно выбрать, скажем, “не-a или не-b”, т.е. “из высказываний a и b по крайней мере одно ложно”. С помощью приведенных выше знаков ее можно представить в двух эквивалентных формах:

$$\overline{a} \vee \overline{b} \quad \text{и} \quad \overline{a \ \& \ b}$$

Теперь можно ввести новый знак

$$a|b,$$

и поскольку очевидно

$$\overline{a} = a|a, \quad a \vee b = (a|a)|(b|b),$$

то благодаря

$$a \ \& \ b = \overline{(\overline{a} \vee \overline{b})}, \quad (a \to b) = \overline{a} \vee b, \quad (a \sim b) = (a \to b) \ \& \ (b \to a)$$

сведение осуществлено.

Еще более замечательно то обстоятельство, что посредством подходящей модификации этой основной связки можно выразить также и оба высказывания более высокой ступени, а именно:

$$(x)f(x) \quad \text{и} \quad (Ex)f(x),$$

т.е. “Все индивиды обладают свойством f” и “Существует индивид, обладающий свойством f”, иными словами, обе операции (x) и (Ex), которые вместе с указанными выше связками составляют полную систему основных связок математической логики.

Если теперь в качестве основной связки мы будем рассматривать

[3]Am. Math. Soc. Trans. 1913. Vol. 14. P. 481.

$$(x)[\overline{f(x)} \vee \overline{g(x)}] \quad \text{или} \quad (x)\overline{(f(x)\ \ \&\ \ g(x))}$$

и запишем это в виде

$$f(x)|^x g(x),$$

тогда очевидно справедливо (поскольку константы мы можем представлять как функции от одного аргумента):

$$\begin{gathered}
\overline{a} = a|^x a, \quad a \vee b = (x)(\overline{\overline{a}} \vee \overline{\overline{b}}) = \overline{a}|^x \overline{b} = (a|^y a)|^x (b|^y b), \\
(x)f(x) = (x)(\overline{\overline{f(x)}} \vee \overline{\overline{f(x)}}) = \overline{f(x)}|^x \overline{f(x)} = \\
(f(x)|^y f(x))|^x (f(x)|^y f(x))
\end{gathered}$$

и благодаря

$$(Ex)f(x) = \overline{(x)\overline{f(x)}}$$

новое утверждение доказано.

Успехи, достигнутые на этом пути, побуждают к дальнейшему продвижению в данном направлении. Мысль о том, что можно попытаться с помощью подходящего сведения устранить также все еще остающиеся основные понятия высказывания, функции высказывания и переменной, на первый взгляд может показаться слишком смелой. Рассмотрение и анализ такой возможности были бы важны не только с точки зрения методического единства, но представляли бы ценность с философской или, если угодно, с эстетической точки зрения. Поскольку переменные в логическом высказывании есть не что иное, как знак того, что определенные аргументные места и операторы принадлежат к одному типу, постольку характер голой, неизменной, "вечной" сущности логического высказывания оказывается излишним вспомогательным понятием.

Кроме того, мне представляется примечательным то обстоятельство, что поставленная цель может быть достигнута посредством сведения к трем основным знакам.

§ 2

Для решения поставленной задачи нам нужно подготовить и разъяснить некоторые вспомогательные средства. Поэтому оставим пока нашу проблему в стороне и дадим набросок некоторого обобщенного *функционального исчисления*.

Как известно, в простейшем смысле под *функцией* понимают некоторое соподчинение между элементами какой-либо области величин, выступающих в качестве аргументов, и элементами (которые обычно мыслятся как совпадающие с первыми) из области значений функции – соподчинение такого рода, что каждому значению аргумента соответствует одно значение функции. Здесь понятие функции понимается в самом широком смысле, т.е. в качестве значений аргументов и значений функции могут выступать сами функции. Значение функции f для аргумента x мы обозначаем, просто помещая знак аргумента рядом со знаком функции:

$$fx$$

Опираясь на наше расширенное истолкование понятия функции, мы можем *функцию от нескольких аргументов* следующим образом свести к функции от одного аргумента.

Например, функцию

$$F(x, y)$$

мы можем истолковать как функцию от одного аргумента y, но не как определенно заданную, а как изменяющуюся в зависимости от x. (Речь здесь идет, разумеется, о зависимости самой *функции*, т.е. самого соподчинения, а не об обычной зависимости *значений* функции от аргумента). В математике в этих случаях обычно говорят о зависимости функции от некоторого параметра и записывают это так:

$$G_x(y)$$

Саму эту функцию G — ее вид, так сказать, — мы можем рассматривать как значение (функциональное значение) некоторой новой функции f, так что $G = fx$.

Поэтому в нашей символике мы записываем:

$$(fx)y$$

или, как это делается, например, в теории бесконечных рядов, договариваемся опускать скобки, стоящие слева, и пишем просто:

$$fxy,$$

где новую функцию f следует отличать от прежней функции F.

Предложенное преобразование я хотел бы сделать более понятным, показав его применение к конкретной числовой функции $x - y$. Если рассматривать это выражение как функцию только от одного y, то оно примет вид $x-$, что означает "разница между x и какой-то заданной величиной", а функция будет записываться так: $(x-)y$. Здесь существенно то обстоятельство, что для x и y значения подставляются не одновременно, а сначала только для x, скажем, значение a, благодаря чему в качестве промежуточной ступени возникает функция $a - y$ (короче: функция $a-$), которая зависит только от замены y каким-то определенным значением b.

Таким образом, теперь fx представляет функцию, которая при подстановке значений для x дает не объекты основной области (как было со значением $F(x, y)$), а опять приводит к функции, аргументом которой является y. Иными словами, f есть функция, аргумент которой никак не ограничен, а ее значением вновь является некоторая функция. Описанное выше преобразование мы можем провести для функций от нескольких переменных, которые теперь можно представлять в виде

$$fxyz\ldots,$$

что, как уже было сказано, является сокращением для

$$(((fx)y)z)\ldots$$

§ 3

Теперь нам нужно ввести целый ряд *индивидуальных функций* весьма общего характера. Я называю их следующим образом: функция тождества **I**, константная функция **C**, функция перестановки **T**, функция группировки **Z** и функция слияния **S**.

1. Под *функцией тождества* **I** я понимаю такую полностью определенную функцию, значения аргументов которой ничем не ограничены, а значение функции всегда совпадает со значением аргумента, т.е. каждый объект и каждая функция соподчиняются самим себе. Мы определяем ее посредством равенства

$$\mathbf{I}x = x,$$

где знак равенства следует понимать не как выражение логической эквивалентности в смысле обычного исчисления высказываний, а как говорящий просто о том, что выражения, стоящие слева и справа от него, означают одно и то же, т.е. что значение функции $\mathbf{I}x$ всегда совпадает со значением аргумента x. (Так, например, $\mathbf{II} = \mathbf{I}$).

2. Пусть теперь значение аргумента вновь ничем не ограничено, а значение функции, независимо от аргумента, всегда имеет одно и то же значение a. Эта функция зависит от a, поэтому имеет вид $\mathbf{C}a$. То, что значением этой функции всегда является a, выразим так:

$$(\mathbf{C}a)y = a$$

Поскольку a также может изменяться, постольку мы получаем:

$$(\mathbf{C}x)y = x \quad \text{или} \quad \mathbf{C}xy = x.$$

Это равенство определяет *константную функцию* **C**. Ясно, что функция **C** относится к тому виду функций, который был рассмотрен выше. При определенных значениях для x она дает некоторую функцию с аргументом y. В практическом применении она полезна тем, что позволяет нам ввести величину x в качестве “слепой” переменной.

3. Выражение

$$fxy$$

можно вновь рассматривать, очевидно, как возникшее из

$$F(x, y),$$

где F однозначно определена заданным f. Если, с другой стороны, записать это выражение в виде

$$gyx,$$

рассматривая y тоже как параметр, то эта новая функция также будет однозначно задана посредством F и, следовательно, f.

Поэтому функцию g мы можем истолковать как значение функции $\mathbf{T}$ для аргумента f. Эта *функция перестановки* $\mathbf{T}$ имеет в качестве аргумента функцию вида φxy, а значением функции

$$\psi = \mathbf{T}\varphi$$

будет та функция ψxy, для которой значение ψxy совпадает с φyx для всех значений аргументов x, y, для которых φyx имеет один смысл. Это определение мы кратко записываем так:

$$(\mathbf{T}\varphi)xy = \varphi yx,$$

где скобки опять можно опустить.

Функция $\mathbf{T}$ дает возможность изменять в выражении порядок членов и помогает в определенной мере компенсировать отсутствие коммутативных законов.

4. Если на месте аргумента некоторой функции f (зависящей от x) оказывается значение некоторой другой функции g, то

$$f(gx)$$

также зависит от x и может рассматриваться, следовательно, как значение некоторой третьей функции F, однозначно заданной посредством f и g. Как известно, в математическом анализе здесь неточно говорят о “функции от функции”, но более правильно говорить о функции от значения функции и обозначать посредством F функцию, "составленную" из f и g. Таким образом, функция F является значением определенной функции $\mathbf{Z}'$ от f и g.

Поэтому мы можем определить:

$$[\mathbf{Z}'(\varphi, \chi)]x = \varphi(\chi x)$$

Если теперь, опираясь на наши принятые выше соглашения, мы заменим $\mathbf{Z}'$ соответствующей функцией от одного аргумента, то получим определение *функции группировки* $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Z}\varphi\chi x = \varphi(\chi x)$$

Посредством функции $\mathbf{Z}$ мы можем перемещать скобки внутри сложного выражения (но не устранять их, поскольку они всегда домысливаются). Таким образом, она действует в смысле не выполняемых здесь ассоциативных законов.

5. Если в выражении

$$fxy$$

вместо y подставим значение некоторой функции g для того же x, который выступает в качестве аргумента f, то получим выражение

$$fx(gx),$$

которому можно придать следующий вид

$$(fx)(gx).$$

Это будет значением функции только от одного x, поэтому

$$(fx)(gx) = Fx,$$

где

$$F = \mathbf{S}'(f, g)$$

вновь вполне определенным образом зависит от заданных функций f и g.

Поэтому мы получаем

$$[\mathbf{S}'(\varphi, \chi)]x = (\varphi x)(\chi x)$$

или, согласно использованному выше преобразованию,

$$\mathbf{S}\varphi\chi x = (\varphi x)(\chi x)$$

Это и есть определение *функции слияния* **S**.

Смысл этой функции полезно пояснить с помощью конкретного примера. Если, скажем, для fxy мы примем значение $^{x}log\, y$ (т.е. логарифм y при основании x), а для gz – функциональное значение $1+z$, то $(fx)(gx)$ примет вид $^{x}log(1+x)$, т.е. предстанет как значение функции от x, которая посредством нашей общей функции **S** однозначно связана с обеими данными функциями.

Практическая полезность функции **S** состоит, очевидно, в том, что она позволяет несколько вхождений какой-то переменной, в том числе в определенной мере и индивидуальных функций, свести к одному вхождению.

§ 4

Для решения наших логико-символических проблем большое значение имеет тот факт, что введенные выше пять индивидуальных функций **I**, **C**, **T**, **Z**, **S** не являются независимыми. Достаточно двух из них, а именно **C** и **S**, для того чтобы через них определить все остальные. Здесь имеют место следующие связи:

1. Согласно истолкованию функций **I** и **C**:

$$\mathbf{I}x = x = \mathbf{C}xy.$$

Поскольку y произвольно, постольку вместо него мы можем подставить любой объект или любую функцию, например, $\mathbf{C}x$. Тогда получаем:

$$\mathbf{I}x = (\mathbf{C}x)(\mathbf{C}x).$$

Согласно истолкованию **S** это означает:

$$\mathbf{SCC}x,$$

и в итоге мы получаем:

$$\mathbf{I} = \mathbf{SCC}.^4$$

Впрочем, в выражении **SCC** последний знак **C** не является важным. Если мы выше заменим y не на $\mathbf{C}x$, а на произвольную функцию φx, то соответственно получим:

$$\mathbf{I} = \mathbf{SC}\varphi$$

где вместо φ можно подставлять любую функцию[5].

2. В соответствии с истолкованием **Z** имеет место:

$$\mathbf{Z}fgx = f(gx).$$

Теперь можно осуществить уже известные преобразования:

$$f(gx) = (\mathbf{C}fx)(gx) = \mathbf{S}(\mathbf{C}f)gx = (\mathbf{CS}f)(\mathbf{C}f)gx.$$

Слияние по f дает:

$$\mathbf{S}(\mathbf{CS})\mathbf{C}fgx$$

таким образом:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{S}(\mathbf{CS})\mathbf{C}.$$

3. Опять-таки выражение

$$\mathbf{T}fyx = fxy$$

можно преобразовать следующим образом:

$$fx(\mathbf{C}yx) = (fx)(\mathbf{C}yx) = \mathbf{S}f(\mathbf{C}y)x = (\mathbf{S}f)(\mathbf{C}y)x = \mathbf{Z}(\mathbf{S}f)\mathbf{C}yx =$$
$$\mathbf{ZZS}f\mathbf{C}yx = (\mathbf{ZZS}f)\mathbf{C}yx = (\mathbf{ZZS}f)(\mathbf{CC}f)yx =$$
$$\mathbf{S}(\mathbf{ZZS})(\mathbf{CC})fyx.$$

---

[4] Об этом сведении мне сообщил г-н Босковитц, а о несколько более сложном, а именно $(\mathbf{SC})(\mathbf{CC})$ еще раньше — г-н Бернайс.

[5] Конечно, только такую, которая имеет смысл для любого x.

Отсюда получаем:

$$\mathbf{T} = \mathbf{S}(\mathbf{ZZS})(\mathbf{CC}).$$

Если вместо **Z** сюда подставить найденное выше выражение, то **T** также сведется к **C** и **S**.

§ 5

Теперь полученные нами результаты мы применим к конкретному логическому исчислению, основными элементами которого являются индивиды и функции функций-высказываний. Прежде всего нам нужна еще одна конкретная функция, свойственная этому исчислению. Выражение

$$fx|^x gx,$$

в котором f и g являются функциями-высказываниями от одного аргумента – мы можем ограничиться рассмотрением только таких функций согласно высказанному выше замечанию, — представляет собой определенную функцию от обеих функций f и g, т.е. имеет вид $\mathbf{U}(f, g)$ или, в соответствии с нашим принципом преобразования, $\mathbf{U}fg$. Таким образом, мы получаем:

$$\mathbf{U}fg = fx|^x gx,$$

где f и g являются обычными функциями-высказываниями, определение *функции несовместимости* **U**.

Представляется замечательным тот факт, что каждую логическую формулу можно выразить только с помощью наших индивидуальных функций **I**, **C**, **T**, **Z**, **S**, **U** и, таким образом, посредством функций **C**, **S** и **U**.

Прежде всего каждую логическую формулу можно выразить с помощью обобщенной штрих-символики, причем связанные переменные (мнимые переменные) помещаются на верхнем конце штриха. Это справедливо без ограничений для любой упорядоченности высказываний и их отношений. Далее можно постепенно при подходящем использовании других константных функций вводить вместо штрих-символа функцию **U**.

Здесь нет возможности провести целиком все построение. Мы лишь разъясним роль различных индивидуальных функций при этом сведении.

Мы получили такую функцию $\mathbf{C}$, что выражения, стоящие слева и справа от штриха, являются функциями от одних и тех же аргументов.

Тогда, например, для f, g и y выражение

$$fx|^x gy,$$

в которое x справа не входит, можно было бы записать следующим образом:

$$fx|^x \mathbf{C}(gy)x$$

Если же, напротив, x встречается справа, то можно использовать функцию $\mathbf{T}$, при этом освободить от скобок функцию $\mathbf{Z}$ и осуществить слияние функции $\mathbf{S}$, если она встречается несколько раз. Так мы получаем, например:

$$fx|^x gxy = fx|^x \mathbf{T}gyx = \mathbf{U}f(\mathbf{T}gy)$$

Или, если использовать более развернутый пример:

$$(fxy|^y gxy)|^x(hxz|^z kxz) = \mathbf{U}(fx)(gx)|^x \mathbf{U}(hx)(kx)$$

Здесь выражение, стоящее перед штрихом, можно развернуть следующим образом:

$$\mathbf{U}(fx)(gx) = \mathbf{ZU}fx(gx) = \mathbf{S}(\mathbf{ZU}f)gx.$$

Тогда все выражение примет вид:

$$\mathbf{S}(\mathbf{ZU}f)gx|^x \mathbf{S}(\mathbf{ZU}h)kx = \mathbf{U}[\mathbf{S}(\mathbf{ZU}f)g][\mathbf{S}(\mathbf{ZU}h)k]$$

Если бы в последнем примере f и g были тождественны, то мы пришли бы к выражению:

$$\mathbf{S}(\mathbf{ZU}f)f.$$

Для того чтобы осуществить здесь слияние относительно f, нам нужна функция $\mathbf{I}$, а дальше мы вычисляем:

$$\mathbf{S}(\mathbf{ZU}f)f = \mathbf{S}(\mathbf{ZU}f)(\mathbf{I}f) = [\mathbf{ZS}(\mathbf{ZU})f](\mathbf{I}f) = \mathbf{S}[\mathbf{ZS}(\mathbf{ZU})]\mathbf{I}f.$$

В качестве практического примера рассмотрим следующее высказывание: “Для каждого предиката существует несовместимый с ним предикат”, т.е. “Для каждого предиката f существует предикат g такой, что высказывание $fx \ \& \ gx$ не будет верным ни для одного x”.

Запишем это предложение в символике Гильберта:

$$(f)(Eg)(x)\overline{(fx \ \& \ gx)}$$

Из этого сначала получаем:

$$(f)(Eg)(fx|^x gx)$$

Затем высказывание о существовании представляем в виде отрицания общего высказывания:

$$(f)\overline{(g)\overline{(fx|^x gx)}} \quad \text{или} \quad (f)\overline{(g)\overline{(fx|^x gx) \ \& \ (fx|^x gx)}}$$

Это дает:

$$(f)\overline{(fx|^x gx)|^g(fx|^x \, gx)}$$

Далее проводим это для f и получаем:

$$\begin{gathered}(f)\overline{((fx|^x gx)|^g(fx|^x gx) \ \& \ (fx|^x gx)|^g(fx|^x \, gx))} = \\ = [(fx|^x gx)|^g(fx|^x gx)]|^f[(fx|^x gx)|^g(fx|^x gx)].\end{gathered}$$

Здесь штрих-символ оказывается единственной логической связкой. Если теперь мы введем функцию несовместимости $\mathbf{U}$, то сначала получим:

$$[(\mathbf{U}fg)|^g(\mathbf{U}fg)]|^f[(\mathbf{U}fg)|^g(\mathbf{U}fg)],$$

а затем:

$$[\mathbf{U}(\mathbf{U}f)(\mathbf{U}f)]|^f[\mathbf{U}(\mathbf{U}f)(\mathbf{U}f)].$$

Однако имеет место:

$$\mathbf{U}(\mathbf{U}f)(\mathbf{U}f) = (\mathbf{ZUU}f)(\mathbf{U}f) = \mathbf{S}(\mathbf{ZUU})\mathbf{U}f,$$

поэтому полученное выше выражение переходит в:

$$[\mathbf{S}(\mathbf{ZUU})\mathbf{U}f]|^f[\mathbf{S}(\mathbf{ZUU})\mathbf{U}f],$$

что означает:

$$\mathbf{U}[\mathbf{S}(\mathbf{ZUU})\mathbf{U}][\mathbf{S}(\mathbf{ZUU})\mathbf{U}].$$

§ 6

После того, как мы пришли к символам **C**, **S** и **U**, дальнейшая редукция требует новых средств.

Конечно, чисто схематически можно было бы **C**, **S** и **U** заменить одной-единственной функцией, введя новую функцию **J** посредством следующих определений:

$$\mathbf{JC} = \mathbf{U}, \quad \mathbf{JS} = \mathbf{C}, \quad \mathbf{J}x = \mathbf{S},$$

где x отличен от **C** и **S**. Мы устанавливаем, прежде всего, что **J** отличается от **C** и **S**, поскольку **J** принимает только три значения, а **C** и **S** – бесконечно много функциональных значений. Вследствие этого мы имеем:

$$\mathbf{JJ} = \mathbf{S}, \quad \mathbf{J}(\mathbf{JJ}) = \mathbf{JS} = \mathbf{C}, \quad \mathbf{J}[\mathbf{J}(\mathbf{JJ})] = \mathbf{JC} = \mathbf{U}$$

и редукция действительно осуществлена. Однако в силу ее произвольного характера она едва ли имеет существенное значение.

Следует заметить[6], что посредством иного, более естественного способа можно освободиться, по крайней мере, от знака **U**. Каждая логическая формула содержит знак **U** и имеется возможность, как мы видели это выше для любых символов, посредством индивидуальных функций обобщенного функционального исчисления, в частности, посредством **C** и **S**, преобразовать ее таким образом, что **U** окажется аргументом всего

[6] Следующие ниже рассуждения принадлежат редактору Г. Беману.

выражения, т.е. примет вид $F\mathbf{U}$, где F уже не будет содержать $\mathbf{U}$. Если опускать $\mathbf{U}$ как само собой разумеющееся, то действительно можно обойтись только $\mathbf{C}$ и $\mathbf{S}$.

С другой стороны, если отказаться от предельного сведения основных функциональных знаков, то можно установить требование полностью избегать употребления скобок. Если мы исходим из формы $F\mathbf{U}$, то благодаря $\mathbf{Z}$ мы можем записывать F без всяких скобок. Таким образом, каждую логическую формулу можно записывать как простую последовательность знаков $\mathbf{C}, \mathbf{Z}$ и $\mathbf{S}$ без скобок и тем самым исчерпывающим образом выражать ее каким-то числом этих знаков.

Что касается вопроса об *однозначности* рассмотренного сведения, то с чисто символической точки зрения о нем речь идти не может, поскольку каждая формула как старого, так и нового исчисления допускает самые разнообразные преобразования. Однако в некотором ограниченном смысле однозначность все-таки можно установить. Будем называть “равнозначными” такие формулы старого исчисления, которые могут быть сведены друг к другу только на основании определений, т.е. без использования логических аксиом, и в которых обобщенный штрих Шеффера является основной связкой. Если теперь будем считать равнозначными также те формулы, которые отличаются только типом своих переменных, то одной и той же формуле нового исчисления, а также всем формулам, которые получены из нее посредством символического вычисления, будут соответствовать все и только те формулы старого исчисления, которые равнозначны в разъясненном выше смысле. Таким образом, рассмотренное здесь сведение логических формул обладает тем замечательным свойством, что оно не зависит от аксиом логики. (Поступило 15. 3. 1924).