Некоторые интервалы между простыми паралогиками[1]

В. М. Попов

ABSTRACT. Some intervals between simple paralogics are characterized, in particular their cardinalities are pointed out.

Ключевые слова: паранепротиворечивость, параполнота, паранормальность.

Охарактеризованы некоторые интервалы между простыми паралогиками. Определяем язык L как стандартный пропозициональный язык с алфавитом $\{\&, \vee, \supset, \neg,), (, p_1, p_2, p_3, \dots\}$. Принимаем обычные соглашения об опускании скобок в L-формулах и используем «формула» как сокращение для «L-формула». Квазиэлементарной формулой называем формулу, в которую не входит ни $\&$, ни $\vee$, ни $\supset$. Логикой называем непустое множество формул, замкнутое относительно правила подстановки в L и правила модус поненс в L. Теорией логики L называем множество формул, включающее L и замкнутое относительно правила модус поненс в L. Ясно, что множество Form всех формул является логикой и теорией любой логики. Для всякой логики L называем множество всех формул тривиальной теорией логики L. Противоречивой теорией логики L называем такую теорию T логики L, что для некоторой формулы A верно: $A \in T$ и $\neg A \in T$. Паранепротиворечивой теорией логики L называем такую противоречивую теорию T логики L, что T не есть тривиальная теория логики L. Паранепротиворечивой логикой называем такую логику L, что существует паранепротиворечивая теория логики L. Простой паранепротиворечивой логикой называем такую паранепротиворечивую логику L, что для всякой паранепротиворечивой теории T логики L верно: если $A \in T$ и $\neg A \in T$, то

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 06-06-80292-а.

A есть квазиэлементарная формула. Полной теорией логики L называем такую теорию T логики L, что для всякой формулы A верно: $A \in T$ или $\neg A \in T$. Параполной теорией логики L называем такую теорию T логики L, что T не является полной теорией логики L и всякая полная теория логики L, включающая T, есть тривиальная теория логики L. Параполной логикой называем такую логику L, что существует параполная теория логики L. Простой параполной логикой называем такую параполную логику L, что для всякой параполной теории T логики L верно: существует такая квазиэлементарная формула e, что $e \notin T$ и $\neg e \notin T$. Простой паралогикой называем логику, которая является простой паранепротиворечивой логикой или простой параполной логикой. Простой паранормальной логикой называем логику, которая является простой паранепротиворечивой логикой и простой параполной логикой. Исчисления $HAVP$, $HVIK$, $HMAP$, $HLAP$, $HI_{0,\omega}$, $HI_{1,\omega}$, $HI_{2,\omega}$, $HI_{3,\omega}$ являются исчислениями гильбертовского типа. Язык каждого из этих исчислений есть L. Аксиомные схемы исчисления $HI_{0,\omega}$ (здесь и далее A, B и C есть переменные по формулам, а E — переменная по формулам, не являющимся квазиэлементарными формулами): (I) $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$, (II) $A \supset (A \vee B)$, (III) $B \supset (A \vee B)$, (IV) $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$, (V) $(A \& B) \supset A$, (VI) $(A \& B) \supset B$, (VII) $(C \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset (A \& B)))$, (VIII) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \& B) \supset C))$, (IX) $((A \& B) \supset C) \supset ((A \supset (B \supset C))$, (X) $((A \supset B) \supset A) \supset A$, (XI) $\neg E \supset (E \supset A)$, (XII) $(E \supset \neg(A \supset A)) \supset \neg E$. Аксиомные схемы исчисления $HI_{3,\omega}$: (I)-(XII) и (XIII) $(A \& \neg A) \supset (B \vee \neg B)$. Аксиомные схемы исчисления $HI_{1,\omega}$: (I)-(XI) и (XIV) $(B \supset \neg(A \supset A)) \supset \neg B$. Аксиомные схемы исчисления $HI_{2,\omega}$: (I)-(X), (XII) и (XV) $\neg B \supset (B \supset A)$. Аксиомные схемы исчисления $HAVP$: все аксиомные схемы исчисления $HI_{0,\omega}$, (XVI) $\neg\neg A \supset A$ и (XVII) $A \supset \neg\neg A$. Аксиомные схемы исчисления $HVIK$: все аксиомные схемы исчисления $HI_{3,\omega}$, (XVI) и (XVII). Аксиомные схемы исчисления $HMAP$: все аксиомные схемы исчисления $HI_{1,\omega}$, (XVI) и (XVII). Аксиомные схемы исчисления $HLAP$: все аксиомные схемы исчисления $HI_{2,\omega}$, (XVI) и (XVII). Правило модус поненс в L является единственным правилом вывода всякого из определяемых здесь исчислений. Доказательства в каждом из этих исчислений строятся обычным для гильбертовского типа исчислений образом. Через $I_{0,\omega}$ обозначаем множество всех формул, доказуемых в $HI_{0,\omega}$, через $I_{1,\omega}$ — множество всех формул, доказуемых в $HI_{1,\omega}$, через $I_{2,\omega}$ — множество всех формул, доказуемых в $HI_{2,\omega}$,через $I_{3,\omega}$ — множество всех формул, доказуемых в $HI_{3,\omega}$, через AVP — множество всех формул, доказуемых в $HAVP$, через VIK — множество всех формул, доказуемых в $HVIK$, через MAP — множество всех формул, доказуемых в $HMAP$, через LAP — множество всех формул, доказуемых в $HLAP$. Предполагая стандартное определение формулы, являющейся классической тавтологией, обозначаем через ClP множество всех формул, каждая из которых есть классическая тавтология. Разумеется, ClP является логикой. Называем M логическим интервалом с нижней границей L_1 и верхней границей L_2, если L_1 и L_2 являются логиками, $L_1 \subseteq L_2$ и M есть множество всех таких логик X, что $X \neq L_1$, $X \neq L_2$ и $L_1 \subseteq X \subseteq L_2$. Обозначаем через (L_1, L_2) логический интервал с нижней границей L_1 и верхней границей L_2. Доказано, что (1) AVP, VIK, MAP, LAP — попарно различные конечнозначные простые паралогики, а $I_{0,\omega}$, $I_{1,\omega}$, $I_{2,\omega}$, $I_{3,\omega}$ — попарно различные разрешимые простые паралогики, ни одна из которых не является конечнозначной; (2) AVP, VIK, $I_{0,\omega}$, $I_{3,\omega}$ — простые паранормальные логики, MAP, $I_{1,\omega}$ — паранепротиворечивые (но не параполные) логики, LAP, $I_{2,\omega}$ — параполные (но не паранепротиворечивые) логики; (3) $VIK = MAP \cap LAP$ и $I_{3,\omega} = I_{1,\omega} \cap I_{2,\omega}$; (4) $(AVP, MAP) = (AVP, LAP) = \{VIK\}$; (5) $(AVP, Form) = \{VIK, MAP, LAP, ClP\}$; (6) $(I_{1,\omega}, MAP)$ и $(I_{2,\omega}, LAP)$ — континуальные множества соответственно простых паранепротиворечивых логик и простых параполных логик; (7) $(I_{3,\omega}, VIK)$ и $(I_{0,\omega}, AVP)$ — континуальные множества простых паранормальных логик; (8) $(I_{3,\omega}, I_{1,\omega})$, $(I_{3,\omega}, I_{2,\omega})$ и $(I_{0,\omega}, I_{3,\omega})$ — континуальные множества соответственно простых паранепротиворечивых логик, простых параполных логик и простых паранормальных логик.

Литература

[1] *Попов В. М.* Интервалы простых паралогик //Смирновские чтения по логике. Материалы 5-й конференции 20-22 июня 2007, М., 2007. С.35-37.