Оператор истины для классической сентенциональной логики и ее расширения на область неправильно построенных формул[1]

С. А. Павлов

abstract. In the paper axiomatic truth theory with truth operator for classical sentential logic is proposed. Such theory is extended on domain of not well-formed formulae and on sentential logic that was enriched by quantifiers.

Ключевые слова: оператор истинности, теория истины, аксиоматический подход, неправильно построенные формулы, кванторы по сентенциональным переменным.

Цель данной работы состоит в построении аксиоматической теории истины с оператором истинности для классической сентенциональной логики, обогащении языка кванторами и ее расширении на область неправильно построенных формул.

Пусть имеем язык классической сентенциональной (пропозициональной) логики высказываний с отрицанием $\sim$ и импликацией $\longrightarrow$. Сентенциональные переменные: $s, s_1, s_2 \ldots$ (Var — множество переменных).

Правила построения формул стандартные.

Пусть A, $\sim A, (A \longrightarrow B)$ есть формулы этого языка. A, B — метапеременные для формул (For — множество формул, предложений).

Символически обозначим этот язык $L(s, s_1, s_2 \ldots, \sim, \longrightarrow)$ или более кратко $L(\sim, \longrightarrow)$.

Построим интерпретацию языка $L(\sim, \longrightarrow)$.

Функция оценки v есть отображение множества Var на множество $\{T, F\}$ (сокр. $v : Var \rightarrow \{T, F\}$).

[1]Работа поддержана РГНФ, грант № 07-03-00242.

$$v(\sim A) = \left\{ \begin{array}{l} T, \text{ если } v(A) = F, \\ F, \text{ если } v(A) = T. \end{array} \right\}$$

$$v(A \longrightarrow B) = \left\{ \begin{array}{l} T, \text{ если } v(A) = F \text{ или } v(B) = T, \\ F, \text{ если } v(A) = T \text{ и } v(B) = F. \end{array} \right\}$$

Для построения аксиоматической теории истины с оператором истины необходимо сформулировать основные положения, касающиеся свойств этого оператора. Сначала в качестве метаязыка будем использовать фрагмент естественного языка, в котором действует классическая логика.

Первым положением, которое отвечает утверждению $For \rightarrow \{T, F\}$, является принцип бивалентности: всякая формула (высказывание) A либо истинна, либо ложна.

Будем символически обозначать операторы истинности и ложности посредством знаков $|, -$, соответственно. Тогда принцип бивалентности можно записать так: $\mid A$ либо $-A$.

Условия истинности для отрицания будем задавать, следуя Д. Гильберту и В. Аккерману [3], которые принимали, что $\overline{X}$ обозначает высказывание, которое истинно, если X ложно, и ложно, если X истинно.

Используя язык $L(\sim, \longrightarrow)$ и операторы истинности и ложности, выразим эти условия следующим образом:

$|\sim A$ е.т.е. $-A$,

$- \sim A$ е.т.е. $\mid A$.

Также эти условия отвечают функции оценки для отрицания.

Условия истинности для импликации, гласящие в [3], что $X \longrightarrow Y$ обозначает высказывание, которое ложно в том и только том случае, когда X истинно, а Y ложно.

Также эти условия отвечают функции оценки для импликации.

$-(A \longrightarrow B)$е.т.е. $\mid A \wedge -B$,

$\mid (A \longrightarrow B)$е.т.е. $- A \vee \mid B$.

Завершающим положением могла бы быть выраженная с помощью оператора истинности T-эквивалентность:

$\mid A$ е.т.е. A.

Однако для оператора истинности имеются еще два положения, отвечающие особенностям его употребления в языке. Одно касается возможности его итерировать, т. е. иметь дело с формулами вида: $(|| A), (||| A)$ и т.д. И второе, связанное с возможностью ввести этот оператор в язык-объект. Тем самым этот подход отличается от подхода, реализованного в семантической теории истины Тарского. Обсуждение использования оператора истинности в логических построениях смотри в [4], а также в статье [2].

Эти положения реализуются при обогащении исходного языка $L(\sim, \longrightarrow)$ оператором истинности. Таким образом получаем язык $L^T(s, s_1, s_2 \ldots, |, \sim, \longrightarrow)$.

Также для формализации вышеприведенных положений необходимо вместо естественного языка ввести формальный. В качестве такового будем использовать язык $L^T(|, \sim, \longrightarrow)$.

Перейдем к формулировке теории истины с оператором истинности для классической сентенциональной логики.

1 Формулировка теории истины TT_2

Алфавит TT_2:

$s,\ s_1,\ s_2 \ldots$ сентенциальные переменные;

$|, \sim, \longrightarrow$ логические константы, обозначающие оператор истинности, отрицание и импликацию;

$(,)$ технические символы.

Правила образования ппф

(i) Если q есть сентенциональная переменная, то (q) есть правильно построенная формула (ппф).

(ii) Если A, B есть ппф, то $(\sim A), (| A), (A \longrightarrow B)$ есть ппф.

(iii) Ничто иное не является ппф.

Метапеременные: $A, B, C, \ldots$ для ппф.

Примем стандартные соглашения относительно опускания скобок.

Введем следующие сокращения для формул.

Высказывание о ложности предложения A рассматривается как сокращение для высказывания об истинности отрицания предложения A («$-$» содержательно означает «есть ложно»):

D1.1. $-A =_{df} | \sim A$.

D1.2.1-D1.2.3. Конъюнкция $\&$, дизъюнкция $\vee$ и эквиваленция $\longleftrightarrow$ определяется классическим образом.

Для высказывания о строгой истинности предложения A: «$\lceil A$» содержательно означает «есть истинно и неложно».

D1.3. $\lceil A =_{df} -(A \longrightarrow -A)$.

Определим импликацию $\supset$, которую назовем D-импликацией, и ряд производных связок.

D1.4.1. $(A \supset B) =_{df} (\lceil A \longrightarrow \lceil B)$,

D1.4.2. $(A \wedge B) =_{df} -(A \supset -B)$,

D1.4.3. $(A \vee B) =_{df} (-A \supset B)$,

D1.4.4. $(A \equiv B) =_{df} (A \supset B) \wedge (B \supset A)$,

D1.4.5. $(A \veebar B) =_{df} (A \vee B) \wedge -(A \wedge B)$.

Из всего класса ппф выделим подкласс формул, которые образованы из префиксированных оператором истинности формул. Будем называть их T-формулами (T-ф.).

(iv) Если A есть ппф, то $(\mid A\ )$ есть T-ф.

(v) Если P_1, P_2 есть T-ф., то $(\sim P_1)$, $(P_1 \longrightarrow P_2)$, есть T-ф.

Метапеременные: P, P_1, $P_2, \ldots$ для T-ф.

Аксиомы теории истины TT_2

Исходные положения теории истины выразим в языке $L^T(\mid, \sim, \longrightarrow)$. Разобьем аксиомы на 3 группы:

1) аксиомы классической логики для T-формул,
2) аксиомы, выражающие условия истинности для отрицания и для импликации,
3) принцип бивалентности и аксиома, выражающая T-эквивалентность,
4) аксиомы классической сентенциональной логики.

Некоторые из них зависимы от других, поэтому не все войдут в список исходных аксиом.

Схемы аксиом

A1.1. $(P_1 \supset (P_2 \supset P_1))$

A1.2. $(P_1 \supset (P_2 \supset P_3)) \supset ((P_1 \supset P_2) \supset (P_1 \supset P_3))$

A1.3. $(-P_1 \supset -P_2) \supset (P_2 \supset P_1)$

A2.1. $- \sim A \equiv \mid A$

A2.2.1. $\mid (A \longrightarrow B) \equiv (-A \vee \mid B)$

A2.2.2. $-(A \longrightarrow B) \equiv (\mid A \wedge -B)$

A3. $(\mid A \veebar -A)(\mid A \veebar -A)$

Правило вывода $A, (A \supset B)/B$ MP

Определение вывода стандартное.

Еще одно соотношение для отрицания следует из определения оператора ложности.

T1. $\mid\sim A \equiv -A$

T-эквивалентность с оператором истинности является теоремой.

T2.1. $(\mid A \longleftrightarrow A)$

T2.2. $\mid P \equiv P$

В формулировке данной теории используются два сорта метапеременных: $A, B, C, \ldots$ для ппф языка исчисления и $P, P_1, P_2, \ldots$ для T-формул.

Для каждого сорта переменных можно поставить вопрос о том, к какой логике относятся теоремы, в формулировке которых присутствуют те или иные метапеременные.

На вопрос о классической сентенциональной логике отвечают теоремы T3.1-3.4, соответствующие ее аксиомам и правилу вывода.

Тем самым имеем метатеорему:

MT1. Классическая сентенциональная логика $CL(s, s_1, s_2 \ldots, \sim, \longrightarrow)$ является подсистемой TT_2.

Для T-формул имеем следующую метатеорему:

MT2. Логика со схемами аксиом A_{CL} является подсистемой TT_2 и является классической логикой. Будем обозначать ее $CL(-, \supset)$.

Также имеем метатеорему:

MT3. Исчисление $TT_2(s, s_1, s_2 \ldots, |, \sim, \longrightarrow)$ дедуктивно эквивалентно классической сентенциональной логике $CL(s, s_1, s_2, \ldots, \sim, \longrightarrow)$.

Другими словами, особенностью выше сформулированного исчисления является то, что оно дедуктивно эквивалентно своей собственной части.

В языке исчисления TT_2 имеем теоремы, выражающие законы противоречия и исключенного третьего в семантической и несемантической формулировках.

T.4.1. $-(| A \wedge -A)$ (семантическая формулировка закона противоречия)

T4.2. $\sim (A \ \& \sim A)$

T5.1. $(| A \vee -A)$ (семантическая формулировка закона исключенного третьего)

T5.2. $(A \ \mathrm{V} \sim A)$

Также имеем теоремы:

T6.1 $|\sim \sim A \equiv | A$

T6.2 $\sim \sim A \longleftrightarrow A$

Металогические свойства теории TT_2 выражаются метатеоремами о непротиворечивости и семантической полноте.

MT4. $\vdash A \implies \models A$

MT5. $\models A \implies \vdash A$

2 Включение кванторов в язык $L^T(|, \sim, \longrightarrow)$

Для полноты рассмотрения обобщим рассматриваемую теорию истины для сентенциональной логики на случай включения в язык последней кванторов.

Введем квантор всеобщности по переменной для предложений (сентенциальной переменной). Такой способ введения кванторов подобен использованию кванторов с пропозициональными переменными в качестве операторных переменных в расширенном пропозициональном исчислении Лукасевича–Тарского, Рассела, в прототетике Лесневского.

Наличие квантора в языке логики позволяет задать тождественно-ложную формулу f и затем определить отрицание. Тем самым нет необходимости иметь отрицание в алфавите языка. В этом случае достаточно иметь оператор истинности, импликацию и квантор всеобщности.

Сформулируем теорию истины $TT_2(|, \longrightarrow, \forall)$.

Для того чтобы лишний раз не повторяться, запишем ниже только изменения в формулировках языка и аксиом $TT_2(|, \sim, \longrightarrow)$.

Об изменениях в алфавите сказано выше.

В правилах образования ппф заменим пункт (ii) на (ii)*.

(ii)* Если A, B есть ппф и q есть сентенциональная переменная, то $(|\ A)$, $(A \longrightarrow B)$, $(\forall q\ A)$ есть ппф.

Добавим метапеременные: q для сентенциальных переменных; $B(q)$, $C(A)$ для ппф B, C, в которые входят сентенциальная переменная q или ппф A.

Определим формулу f, являющуюся тождественно ложной, и отрицание.

D1.0.1. $f =_{df} (\forall s\ |\ s)$

D1.0.2. $\sim A =_{df} (A \longrightarrow f)$

В правилах образования T-формул заменим пункт (v) на (v)*.

(v)* Если P_1, P_2 есть T-ф. и q есть сентенциональная переменная, то $(P_1 \longrightarrow P_2)$ и $(\forall q\ P_1)$ есть T-ф.

Аксиому А2.1. заменим на аксиому А2.1*.

А2.1*. $-f$.

К схемам аксиом добавим следующие:

А4.1. $(\forall q\ B(q) \longrightarrow B(A))$, если ппф A не содержит свободных вхождений q, если ппф A свободна для q в $B(q)$.

А4.2. $(\forall q\ (A \longrightarrow B) \longrightarrow (A \longrightarrow \forall q B))$.

К правилу вывода MP добавим следующее:
$A/\ \forall q A$ Gen
Имеем следующее соотношение истинности для квантора всеобщности

T7. $(|\ (\forall q\ A)) \longleftrightarrow (\forall q\ |\ A)$.

Расширенное пропозициональное исчисление сводимо к классической логике CL. Подобным образом можно показать, что $TT_2(|, \longrightarrow, \forall)$ сводимо к $TT_2(|, \sim, \longrightarrow)$.

В расширенном пропозициональном исчислении константа «ложь» задается с помощью формулы $\forall s\ s$. Имеем теорему, связывающую различные определения (имеющие разный смысл, который обнаружится при дальнейшем обобщении $TT_2(|, \longrightarrow, \forall)$) константы «ложь» в расширенном пропозициональном исчислении и тождественно-ложной формулы в $TT_2(|, \longrightarrow, \forall)$.

T8. $(\forall s \mid s) \longleftrightarrow \forall s\ s$.

3 Расширение теории истины на область нестандартных формул

Несмотря на эквивалентность исчислений $TT_2(|, \sim, \longrightarrow)$ и $CL(\sim, \longrightarrow)$ формулировка исчисления TT_2 сложнее, чем формулировка CL. Возможности формулировки TT_2 проявятся далее, в случае расширения области определения операторов истинности и ложности за пределы области двузначных высказываний и предложений.

Понятия истинности и ложности обычно применяют к высказываниям и предложениям. А.Тарский пишет об этом так:«Предикат “истинно” ... относят к определенным физическим объектам — языковым выражениям, в частности, к предложениям» [5]. В то же время имеются трудности, связанные с определением того, что есть высказывание и предложение. А. Тарский пишет об этом: «Мы не знаем в точности, какие выражения являются предложениями» [5]. Там же А. Тарский говорит о новых возможностях: «тот факт, что нас прежде всего интересует понятие истины для предложений, не исключает возможности последующего расширения сферы применимости этого понятия на другие виды объектов».

Уже Аристотель не ограничивает применимость истинностных оценок только к утвердительным или отрицательным высказываниям, но применяет их к их частям, составляющим эти высказывания. Так, в главе четвертой Категорий [1] он пишет:

> «утверждение или отрицание получается сочетанием их [категорий], ведь всякое утверждение или отрицание, надо полагать, или истинно, или ложно, а из сказанного без какой-либо связи ничто не истинно и не ложно, например “человек”, “белое”, “бежит”, “побеждает”».

А в главе десятой Категорий Аристотель утверждает: «Да и вообще все, о чем говорится без какой-либо связи, не истинно и не ложно».

Д. Гильберт и В. Аккерман пишут в [3]: «Взятые сами по себе предикаты ни истинны, ни ложны».

У Г. Фреге в его статье «Функция и понятие» [6] имеется пример расширения сферы применимости функции, изображаемой в виде горизонтальной черты $—x$ на другие виды объектов. Он устанавливает, что «значением этой функции должна быть истина, когда в качестве аргумента берется истина, во всех же остальных случаях ее значение есть ложь — стало быть и тогда, когда он вообще не является значением истинности. В соответствии с этим, например,

$—1 + 3 = 4$, есть истина, тогда как

$—1 + 3 = 5$, есть ложь, так же как

$—4$»(см. [6]).

Выражение «4» не есть предложение, в отличие от предыдущих аргументов функции, но, тем не менее, Г. Фреге не затрудняется определить значение функции $-x$ с аргументом «4».

С точки зрения теории слов, которые определяются как цепочка символов языка, все формулы языка, как правильно построенные, так и неправильно построенные являются словами этого языка. Символьным выражением некоторого языка L называется любая конечная линейная последовательность (упорядоченная n-ка) символов из алфавита этого языка L. Синонимом символьного выражения являются слово, выражение или строка в алфавите, а также цепочка символов.

Язык логики, которая допускает логические операции в области символьных выражений языка, строится следующим образом.

К языку сентенциальной логики добавляем операторы истинности и ложности. Расширяем применение понятия истинности и ложности на класс выражений языка, которые определяются индуктивно. Такое расширение сферы применимости понятий истинности и ложности на универсум символьных выражений языка не ведет к трудностям или неясностям, так как все выражения, которые не являются предложениями (для любого определения предложения), заведомо ни истинны, ни ложны.

Неправильно построенные формулы обычно в логике не рассматриваются. Относительно них можно утверждать: 1) что они бессмысленны и 2) что они ни истинны, ни ложны. В стандартном языке сентенциональной логики нельзя выразить тот факт, что они ни истинны и ни ложны, так как в нем отсутствуют операторы истинности и ложности. Однако в предложенном выше языке $L^T(s, s_1, s_2, \ldots, |, \sim, \longrightarrow)$ утверждения о неистинности и неложности формул выразимы. В случае расширения области определения оператора истинности на область выражений языка, являющихся ни истинными, ни ложными, для последних будет иметь место следующее положение:

Обозначим неправильно построенную формулу Non-wff. Тогда $(- \mid (Non - wff) \wedge - - \ (Non - wff))$.

Определение неправильно построенной формулы может рассматриваться как парафраз последнего пункта правил образования ппф «Ничто иное не является ппф»: всякое иное выражение данного языка есть неправильно построенная формула. Такое определение неправильно построенных формул не индуктивно в отличие от определения ппф, однако для всякого выражения языка возможно выяснить, является ли оно ппф или нет.

В качестве исходных неправильно построенных формул возьмем отдельно записанные символы $|, \sim, \longrightarrow$ логических констант (оператора истинности, отрицания и импликации). Это ограничение не снизит общности рассмотрения. В этом частном случае будем называть их для определенности нестандартными формулами. Метапеременными для них будут служить $N, N_1, N_2, \dots$ Затем можно расширить классическую область определения оператора истинности присоединением к ней множества нестандартных формул. Метапеременные $E, E_1, E_2, \dots$ для этой расширенной области будем называть метапеременными для символьных выражений (сокращенно св).

Рассмотрим, какие необходимо внести изменения в формулировку $TT_2(|, \sim, \longrightarrow)$. Отметим сразу, что будут только добавления и обобщения.

Начнем с правил образования. К ним добавятся:

(i)$^+$ Если N есть $|, \sim$ или $\longrightarrow$, то N есть нестандартная формула (нф).

(i)$^{++}$ Если E есть ппф или нф, то E есть символьное выражение (св).

(ii)$^+$ Если N есть нф, то $(\sim N)$, $(N \longrightarrow N_1)$, есть нф.

(iii)$^+$ Ничто иное не является нф и св.

(iv)$^+$ Если E есть св, то $(| \; E)$ есть T-ф.

В определениях все вхождения метапеременных для ппф замещаются (обобщаются) на метапеременные для св.

Для 3 групп схем аксиом: в первой добавляется аксиома

A1.4. $| \; P \equiv P$.

Во второй группе все вхождения метапеременных для ппф замещаются на метапеременные для св. В третьей добавляются следующие:

A3$^+$. $(- \mid N) \wedge (- - N)$.

В силу наличия предыдущей аксиомы принцип бивалентности отвергается и остается принцип непротиворечия.

A3^{++}. $-(\mid E \wedge -E)$

И, наконец, в правиле вывода все вхождения метапеременных для ппф замещаются на метапеременные для св.

Отметим те теоремы, которые остаются доказуемыми при замещении всех вхождений метапеременных для ппф на метапеременные для св. Это T1., T.4.1., T.6.1.

Добавляется ряд теорем, среди которых выделим следующую:

T2.1$^+$. $(\mid E \longleftrightarrow E) \equiv (\mid E \veebar -E)$, которая говорит о взаимоотношении T-эквивалентности и принципа бивалентности.

Обозначим полученную теорию $TT_3(\mid, \ \sim, \ \longrightarrow)$, так как она имеет трехзначную интерпретацию, к которой и перейдем.

Значения введем по аналогии с тем, как их вводит Дж. Данн в [7]. Он отождествляет множества со значениями следующим образом (приведем здесь три из четырех):

$(\{\alpha\}, \{\}) = T, (\{\}, \{\alpha\}) = F, (\{\}, \{\}) = N.$

Для теории истины в качестве исходного множества имеет содержательный смысл выбрать одноэлементное множество {истина} и образовать из него множество его подмножеств. И подобно предыдущему построению отождествить пары множеств со значениями:

$< \{\text{истина}\}, \{\} >= T, < \{\}, \{\text{истина}\} >= F, < \{\}, \{\} >= N.$

И, совсем абстрактно, можно в качестве исходного взять множество $\{\{\}\}$, образовать из него множество его подмножеств и затем построить следующие пары:

$< \{\{\}\}, \{\} >, < \{\}, \{\{\}\} >, < \{\}, \{\} >.$

Табличная интерпретация для исходных логических операторов следующая:

A	$\sim A$	$\mid A$
T	F	T
F	T	F
N	N	F

$\longrightarrow$	T	F	N
T	T	F	N
F	T	T	T
N	T	N	N

Отметим, что таблицы для связок отрицания и импликации в области трех значений подобны таблицам для соответствующих связок сильной логики Клини K_3^S.

В связи с тем, что для символьных выражений отбрасывается принцип бивалентности, имеет смысл вопрос о выразимости связок трехзначной логики Лукасевича, на который имеется положительный ответ.

В завершение, пользуясь вышеприведенными таблицами, доказываются метатеоремы непротиворечивости и семантической полноты для $TT_3(|,\ \sim,\ \longrightarrow)$:

MT6. $\vdash A \Rightarrow \models_3 A$.

MT7. $\models_3 A \Rightarrow \vdash A$.

Отметим, что сигнатура языка теории $TT_2(|,\ \sim,\ \longrightarrow)$ не изменилась при переходе к $TT_3(|,\ \sim,\ \longrightarrow)$.

Таким образом, построены аксиоматическая теория истины с оператором истинности для классической сентенциональной логики, для классической сентенциональной логики, язык которой обогащен кванторами, и также для ее расширения на неклассическую область неправильно построенных формул.

Литература

[1] *Аристотель.* Категории // Сочинения. Т. 2. М., 1978. С.51– 90.

[2] *Бессонов А.В.* Истина внутри языка выразима // Язык и логическая теория. М., 1987. С. 54-61.

[3] *Гильберт Д., Аккерман В.* Основы теоретической логики. М., 1947.

[4] *Павлов С.А.* Логика с операторами истинности и ложности. М., 2004.

[5] *Тарский А.* Семантическая концепция истины // Аналитическая философия: Становление и развитие. М., 1998.

[6] *Фреге Г.* Функция и понятие // Готтлоб Фреге. Логика и логическая семантика. М., 2000.

[7] *Dunn J.M.* Partiality and its Dual // Studia Logica. 2000. Vol. 65. P. 5–40.