Позитивная силлогистика С3^{+} с константой исчерпываемости[1]

В. И. Маркин

abstract. We set out the syllogistic system $\mathbf{OC3^{+}}$ with standard constants $\mathbf{a}$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{o}$ and new constants $\mathbf{u}$ and $\mathbf{q}$: the statement of the form $S\mathbf{u}P$ means "Everything is either S or P"; the statement of the form $S\mathbf{q}P$ means "Something is neither S nor P". We demonstrate that $\mathbf{OC3^{+}}$ is embedded into the predicate calculus under the following translation χ: $\chi(S\mathbf{a}P) = \forall x\,(Sx \supset Px)\ \&\ \exists xSx\ \&\ \exists x\neg Px$, $\chi(S\mathbf{e}P) = \forall x\,(Sx \supset \neg Px)\ \&\ \exists xSx\ \&\ \exists xPx$, $\chi(S\mathbf{i}P) = \exists x\,(Sx\ \&\ Px) \vee \neg\exists xSx \vee \neg\exists xPx$, $\chi(S\mathbf{o}P) = \exists x\,(Sx\ \&\ \neg Px) \vee \neg\exists xSx \vee \neg\exists x\neg Px$, $\chi(S\mathbf{u}P) = \forall x\,(\neg Sx \supset Px)\ \&\ \exists x\neg Sx\ \&\ \exists x\neg Px$, $\chi(S\mathbf{q}P) = \exists x\,(\neg Sx\ \&\ \neg Px) \vee \neg\exists x\neg Sx \vee \neg\exists x\neg Px$, $\chi(\neg\mathbf{A}) = \neg\chi(\mathbf{A})$, $\chi(\mathbf{A}\nabla\mathbf{B}) = \chi(\mathbf{A})\nabla\,\chi(\mathbf{B})$, where ∇ is any binary connective.

Ключевые слова: силлогистика, исчисление предикатов, погружающая операция.

В.А. Смирновым [3] был предложен следующий перевод формул позитивной силлогистики в язык логики предикатов:

$\chi(S\mathbf{a}P) = \forall x\,(Sx \supset Px)\ \&\ \exists xSx\ \&\ \exists x\neg Px$,

$\chi(S\mathbf{e}P) = \forall x\,(Sx \supset \neg Px)\ \&\ \exists xSx\ \&\ \exists xPx$,

$\chi(S\mathbf{i}P) = \exists x\,(Sx\ \&\ Px) \vee \neg\exists xSx \vee \neg\exists xPx$,

$\chi(S\mathbf{o}P) = \exists x\,(Sx\ \&\ \neg Px) \vee \neg\exists xSx \vee \neg\exists x\neg Px$,

$\chi(\neg\mathbf{A}) = \neg\chi(\mathbf{A})$,

$\chi(\mathbf{A}\nabla\mathbf{B}) = \chi(\mathbf{A})\nabla\,\chi(\mathbf{B})$ (∇ — произвольная бинарная связка).

Легко заметить, что в соответствии с данным переводом в истинных общих высказываниях — как утвердительных, так и отрицательных — оба термина должны быть непустыми и неуниверсальными. Таким образом, согласно переводу χ константа $\mathbf{a}$ трактуется как знак отношения включения объема непустого и неуниверсального субъекта в объем непустого и неуниверсального предиката, а константа $\mathbf{e}$ — как знак отношения несовме-

[1] Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 07-03-00314а.

стимости по объему двух непустых и неуниверсальных терминов.

Ранее [1] мною была построена система позитивной силлогистики $\mathbf{C3}^+$, которая погружается в классическое исчисление предикатов посредством перевода χ. Сформулируем данную систему в несколько модифицированном виде. Схемами аксиом $\mathbf{C3}^+$ являются

A0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний,

A1. $(M\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{a}M) \supset S\mathbf{a}P$,

A2. $(M\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{a}M) \supset S\mathbf{e}P$,

A3. $S\mathbf{e}P \supset P\mathbf{e}S$,

A4. $S\mathbf{a}P \supset (S\mathbf{a}S \& P\mathbf{a}P)$,

A5. $S\mathbf{e}P \supset S\mathbf{a}S$,

A6. $S\mathbf{i}S$,

A7. $S\mathbf{i}P \equiv \neg S\mathbf{e}P$,

A8. $S\mathbf{o}P \equiv \neg S\mathbf{a}P$.

Единственное правило вывода в $\mathbf{C3}^+$ — *modus ponens*.

Основная трудность в доказательстве погружаемости $\mathbf{C3}^+$ в исчисление предикатов посредством χ заключалась в том, что в переводах некоторых силлогистических формул фигурируют формулы первопорядкового языка $\exists x \neg Sx$ и $\neg\exists x \neg Sx$, несущие информацию о неуниверсальности и универсальности термина S. Подобная информация невыразима в рамках системы фундаментальной позитивной силлогистики, адекватной стандартному переводу, а также в рамках дефинициально эквивалентных ей силлогистик.

Для преодоления указанной трудности была использована построенная мною [2] система обобщенной фундаментальной силлогистики (исчисление **ОФС**). В силлогистический язык, наряду с обычными константами **a**, **i**, **e**, **o**, вводятся дополнительно две новые константы **u** и **q**. Силлогистическая константа **u** трактуется как аналог отношения исчерпываемости, а **q** — как аналог отношения неисчерпываемости универсума. Эти отношения трактуются следующим образом: объемы субъекта и предиката высказывания находятся в отношении исчерпываемости, если и только если их объединение совпадает с универсумом; в противном случае, они находятся в отношении неисчерпываемости.

В языке появляются два новых типа элементарных формул: $S\mathbf{u}P$ и $S\mathbf{q}P$. $S\mathbf{u}P$ может быть прочитано так: «Всякий объект есть S или P», а $S\mathbf{q}P$ — следующим образом: «Некий объект не есть ни S, ни P». В языке системы **ОФС**, таким образом, имеются формулы, содержащие информацию об универсальности и о неуниверсальности термина S, — это выражения $S\mathbf{u}S$ и $S\mathbf{q}S$ соответственно.

Постулатами исчисления **ОФС** являются:

Ф0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний,

Ф1.	$(M\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{a}M) \supset S\mathbf{a}P$,	**Ф9.**	$S\mathbf{o}P \supset S\mathbf{i}S$,
Ф2.	$(M\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{a}M) \supset S\mathbf{e}P$,	**Ф10.**	$S\mathbf{q}P \supset S\mathbf{q}S$,
Ф3.	$M\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{u}M) \supset S\mathbf{u}P$,	**Ф11.**	$S\mathbf{o}P \supset S\mathbf{q}S$,
Ф4.	$(M\mathbf{u}P \,\&\, S\mathbf{e}M) \supset S\mathbf{a}P$,	**Ф12.**	$S\mathbf{i}P \equiv \neg S\mathbf{e}P$.
Ф5.	$S\mathbf{e}P \supset (P\mathbf{e}S$,	**Ф13.**	$S\mathbf{o}P \equiv \neg S\mathbf{a}P$.
Ф6.	$S\mathbf{u}P \supset P\mathbf{u}S$,	**Ф14.**	$S\mathbf{q}P \equiv \neg S\mathbf{u}P$.
Ф7.	$S\mathbf{a}S$,	**Ф15.**	$S\mathbf{i}S \vee S\mathbf{q}P$.
Ф8.	$S\mathbf{i}P \supset S\mathbf{i}S$,	**R1.**	*modus ponens.*

В [2] доказана теорема о погружаемости обобщенной позитивной силлогистики **ОФС** в исчисление предикатов посредством «фундаментального» перевода * — стандартной интерпретации в первопорядковом языке категорических высказываний, естественным образом расширенной в связи с добавлением формул видов $S\mathbf{u}P$ и $S\mathbf{q}P$:

$$\begin{array}{ll}
(S\mathbf{a}P)^* = \forall x(Sx \supset Px), & (S\mathbf{i}P)^* = \exists x(Sx \,\&\, Px), \\
(S\mathbf{e}P)^* = \forall x(Sx \supset \neg Px), & (S\mathbf{o}P)^* = \exists x(Sx \,\&\, \neg Px), \\
(S\mathbf{u}P)^* = \forall x(Sx \vee Px), & (S\mathbf{q}P)^* = \exists x(\neg Sx \,\&\, \neg Px), \\
(\neg \mathbf{A})^* = \neg \mathbf{A}^*, & (\mathbf{A} \nabla \mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* \nabla \mathbf{B}^*.
\end{array}$$

Системы обобщенной позитивной силлогистики имеют самостоятельную значимость. В них преодолевается ограниченность стандартных силлогистик, где не представляется возможным выразить некоторые важные объемные отношения между двумя терминами (например, отношение исчерпываемости). Известно также, что конструкции «Всякий объект есть S или P» и «Некий объект не есть ни S, ни P» предлагал ввести в язык логических теорий А. Де Морган, поэтому обобщенные силлогистики представляют определенный интерес и с историко-логической точки зрения.

В [2] было сформулировано обобщение в языке с константами **a**, **i**, **e**, **o**, **u** и **q** не только фундаментальной позитивной силлогистики, но и традиционного варианта последней, который с семантической точки зрения базируется на принятии исходной предпосылки о непустоте и неуниверсальности всех терминов.

Аналогичная работа может быть проделана и для системы $\mathbf{C3}^+$. В данной статье будет предложено ее расширение — исчисление $\mathbf{OC3}^+$ в языке обобщенной позитивной силлогистики.

Возникает вопрос об условиях истинности и ложности новых типов формул в силлогистике, базирующейся на $\mathbf{C3}^+$. Выше уже говорилось, что общие высказывания предполагают здесь непустоту и неуниверсальность своих терминов. В силу того, что $S\mathbf{u}P$ также является общим высказыванием, его естественно трактовать как утверждение о том, что объединение объемов непустых и неуниверсальных терминов S и P совпадает с универсумом. Что же касается $S\mathbf{q}P$, то оно должно быть истинным в том и только в том случае, когда истинно $S\mathbf{u}P$.

Расширим в соответствии с указанной трактовкой определение функции χ:

$\chi(S\mathbf{u}P) = \forall x(\neg Sx \supset Px) \,\&\, \exists x \neg Sx \,\&\, \exists x \neg Px$,

$\chi(S\mathbf{q}P) = \exists x(\neg Sx \,\&\, \neg Px) \vee \neg\exists x \neg Sx \vee \neg\exists x \neg Px$.

Обобщенная позитивная силлогистика, соответствующая расширенному переводу χ, может быть аксиоматизирована следующим образом — к дедуктивным постулатам $\mathbf{C3}^+$ добавляются следующие схемы аксиом:

A9.	$(M\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{u}M) \supset S\mathbf{u}P$,	**A12**.	$S\mathbf{u}P \supset S\mathbf{a}S$,
A10.	$(M\mathbf{u}P \,\&\, S\mathbf{e}M) \supset S\mathbf{a}P$,	**A13**.	$S\mathbf{q}S$,
A11.	$S\mathbf{u}P \supset P\mathbf{u}S$,	**A14**.	$S\mathbf{q}P \equiv \neg S\mathbf{u}P$,

Назовем полученное исчисление $\mathbf{OC3}^+$.

В дальнейшей части статьи излагается доказательство погружаемости системы $\mathbf{OC3}^+$ в классическое исчисление предикатов посредством вышеуказанного обобщения перевода χ В.А. Смирнова.

Идея этого доказательства состоит в использовании обобщенной фундаментальной силлогистики **ОФС** в качестве «промежуточной» системы: предварительно демонстрируется погружаемость $\mathbf{OC3}^+$ в **ОФС**, причем погружающая операция выбирается таким образом, что ее композиция с «фундаментальным» переводом * оказывается равносильной в исчислении предикатов функции χ.

Зададим перевод ψ_1 из $\mathbf{OC3^+}$ в $\mathbf{O\Phi C}$ такой, что $\psi_1(\mathbf{A})^*$ эквивалентна в исчислении предикатов $\chi(\mathbf{A})$ для любой силлогистической формулы $\mathbf{A}$:

$$\psi_1(S\mathbf{a}P) = S\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{q}P, \qquad \psi_1(S\mathbf{i}P) = S\mathbf{i}P \vee S\mathbf{e}S \vee P\mathbf{e}P,$$
$$\psi_1(S\mathbf{e}P) = S\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{i}P, \qquad \psi_1(S\mathbf{o}P) = S\mathbf{o}P \vee S\mathbf{e}S \vee P\mathbf{u}P,$$
$$\psi_1(S\mathbf{u}P) = S\mathbf{u}P \,\&\, S\mathbf{q}S \,\&\, P\mathbf{q}P, \qquad \psi_1(S\mathbf{q}P) = S\mathbf{q}P \vee S\mathbf{u}S \vee P\mathbf{u}P,$$
$$\psi_1(\neg\mathbf{A}) = \neg\psi_1(\mathbf{A}), \qquad \psi_1(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B}) = \psi_1(\mathbf{A}) \nabla \psi_1(\mathbf{B}).$$

В процессе доказательства погружаемости одной силлогистической системы в другую будем использовать предложенный В.А. Смирновым критерий: перевод ψ_1 погружает исчисление $\mathbf{S_1}$ в исчисление $\mathbf{S_2}$, е.т.е. (1) для произвольной формулы $\mathbf{A}$ языка $\mathbf{S_1}$, если $\mathbf{A}$ доказуема в $\mathbf{S_1}$, то $\psi_1(\mathbf{A})$ доказуема в $\mathbf{S_2}$; и существует перевод ψ_2 из $\mathbf{S_2}$ в $\mathbf{S_1}$, такой что (2) для произвольной формулы $\mathbf{A}$ языка $\mathbf{S_2}$, если $\mathbf{A}$ доказуема в $\mathbf{S_2}$, то $\psi_2(\mathbf{A})$ доказуема в $\mathbf{S_1}$, и (3) для любой формулы $\mathbf{A}$ языка $\mathbf{S_1}$ формула $\mathbf{A} \equiv \psi_2(\psi_1(\mathbf{A}))$ является теоремой $\mathbf{S_1}$.

ТЕОРЕМА 1. *Перевод* ψ_1 *погружает* $\mathbf{OC3^+}$ *в* $\mathbf{O\Phi C}$.

Доказательство.

Покажем сначала, что перевод ψ_1 удовлетворяет первой части критерия В.А. Смирнова. Применяем индукцию по длине доказательства формулы $\mathbf{A}$ в системе $\mathbf{OC3^+}$. Продемонстрируем сначала доказуемость ψ_1-перводов всех ее аксиом в исчислении $\mathbf{O\Phi C}$.

А0. Переводы аксиом данного типа являются аксиомами $\mathbf{O\Phi C}$.

А1. $\psi_1((M\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{a}M) \supset S\mathbf{a}P) = (M\mathbf{a}P \,\&\, M\mathbf{i}M \,\&\, P\mathbf{q}P \,\&\, S\mathbf{a}M \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, M\mathbf{q}M) \supset (S\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{q}P)$ выводится непосредственно из $\mathbf{\Phi 1}$ по правилам классической логики высказываний **(КЛВ)**.

Аналогично обосновываются аксиомы типов **А2**, **А3**, **А6**, **А9**, **А10**, **А11** и **А13**:

А2. $\psi_1((M\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{a}M) \supset S\mathbf{e}P) = (M\mathbf{e}P \,\&\, M\mathbf{i}M \,\&\, P\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{a}M \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, M\mathbf{q}M) \supset (S\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{e}P)$ выводится из $\mathbf{\Phi 2}$;

A3. $\psi_1(SP \supset P\mathbf{e}S) = (S\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{i}P) \supset (P\mathbf{e}S \,\&\, P\mathbf{i}P \,\&\, S\mathbf{i}S)$ выводится из **Ф5**;

A6. $\psi_1(S\mathbf{i}S) = S\mathbf{i}S \vee S\mathbf{e}S \vee S\mathbf{e}S$ выводится из частного случая **Ф12** ($S\mathbf{i}S \equiv \neg S\mathbf{e}S$);

A9. $\psi_1((M\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{u}M) \supset S\mathbf{u}P) = (M\mathbf{a}P \,\&\, M\mathbf{i}M \,\&\, P\mathbf{q}P \,\&\, S\mathbf{u}M \,\&\, S\mathbf{q}S \,\&\, M\mathbf{q}M) \supset (S\mathbf{u}P \,\&\, S\mathbf{q}S \,\&\, P\mathbf{q}P)$ выводится из **Ф3**;

A10. $\psi_1((M\mathbf{u}P \,\&\, S\mathbf{e}M) \supset S\mathbf{a}P) = (M\mathbf{u}P \,\&\, M\mathbf{q}M \,\&\, P\mathbf{q}P \,\&\, S\mathbf{e}M \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, M\mathbf{i}M) \supset (S\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{q}P)$ выводится из **Ф4**;

A11. $\psi_1(S\mathbf{u}P \supset P\mathbf{u}S) = (S\mathbf{u}P \,\&\, S\mathbf{q}S \,\&\, P\mathbf{q}P) \supset (P\mathbf{u}S \,\&\, P\mathbf{q}P \,\&\, S\mathbf{q}S)$ выводится из **Ф6**;

A13. $\psi_1(S\mathbf{q}S) = S\mathbf{q}S \vee S\mathbf{u}S \vee S\mathbf{u}S$ выводится из частного случая **Ф14** ($S\mathbf{q}S \equiv \neg S\mathbf{u}S$).

A4. $\psi_1(S\mathbf{a}P \supset (S\mathbf{a}S \,\&\, P\mathbf{a}P)) = (S\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{q}P) \supset (S\mathbf{a}S \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, S\mathbf{q}S \,\&\, P\mathbf{a}P \,\&\, P\mathbf{i}P \,\&\, P\mathbf{q}P)$

1.	$(P\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{a}P) \supset S\mathbf{e}P$	**Ф2**
2.	$S\mathbf{e}P \supset P\mathbf{e}S$	**Ф5**
3.	$(P\mathbf{e}S \,\&\, S\mathbf{a}P) \supset S\mathbf{e}S$	**Ф2**
4.	$(P\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{a}P) \supset S\mathbf{e}S$	1,2,3;**КЛВ**
5.	$P\mathbf{i}P \equiv \neg P\mathbf{e}P$	**Ф12**
6.	$S\mathbf{i}S \equiv \neg S\mathbf{e}S$	**Ф12**
7.	$(S\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{i}S) \supset P\mathbf{i}P$	4,5,6;**КЛВ**
8.	$(S\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{u}S) \supset S\mathbf{u}P$	**Ф3**
9.	$S\mathbf{u}P \supset P\mathbf{u}S$	**Ф6**
10.	$(S\mathbf{a}P \,\&\, P\mathbf{u}S) \supset P\mathbf{u}P$	**Ф3**
11.	$(S\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{u}S) \supset P\mathbf{u}P$	8,9,10;**КЛВ**
12.	$S\mathbf{q}S \equiv \neg S\mathbf{u}S$	**Ф14**
13.	$P\mathbf{q}P \equiv \neg P\mathbf{u}P$	**Ф14**
14.	$(S\mathbf{a}P \,\&\, P\mathbf{q}P) \supset S\mathbf{q}S$	11,12,13;**КЛВ**
15.	$S\mathbf{a}S$	**Ф7**
16.	$P\mathbf{a}P$	**Ф7**
17.	$(S\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{q}P) \supset (S\mathbf{a}S \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, S\mathbf{q}S \,\&\, P\mathbf{a}P \,\&\, P\mathbf{i}P \,\&\, P\mathbf{q}P)$	7,14,15,16;**КЛВ**

A5. $\psi_1(S\mathbf{e}P \supset S\mathbf{a}S) = (S\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{i}P) \supset (S\mathbf{a}S \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, S\mathbf{q}S)$

1.	$(S\mathbf{e}P \,\&\, P\mathbf{a}S) \supset P\mathbf{e}P$	**Ф2**
2.	$P\mathbf{o}S \equiv \neg P\mathbf{a}S$	**Ф13**
3.	$P\mathbf{i}P \equiv \neg P\mathbf{e}P$	**Ф12**
4.	$(S\mathbf{e}P \,\&\, P\mathbf{i}P) \supset P\mathbf{o}S$	1,2,3;**КЛВ**
5.	$P\mathbf{o}S \supset S\mathbf{q}S$	**Ф11**
6.	$S\mathbf{a}S$	**Ф7**
7.	$(S\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{i}P) \supset (S\mathbf{a}S \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, S\mathbf{q}S)$	4,5,6;**КЛВ**

A7. $\psi_1(S\mathbf{i}P \equiv \neg S\mathbf{e}P) = (S\mathbf{i}P \vee S\mathbf{e}S \vee P\mathbf{e}P) \equiv \neg(S\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{i}P)$

1.	$S\mathbf{i}P \equiv \neg S\mathbf{e}P$	**Ф12**
2.	$S\mathbf{i}S \equiv \neg S\mathbf{e}S$	**Ф12**
3.	$P\mathbf{i}P \equiv \neg P\mathbf{e}P$	**Ф12**
4.	$(S\mathbf{i}P \vee S\mathbf{e}S \vee P\mathbf{e}P) \equiv \neg(S\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{i}P)$	1,2,3;**КЛВ**

A8. $\psi_1(S\mathbf{o}P \equiv \neg S\mathbf{a}P) = (S\mathbf{o}P \vee S\mathbf{e}S \vee P\mathbf{u}P) \equiv \neg(S\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{q}P)$

1.	$S\mathbf{o}P \equiv \neg S\mathbf{a}P$	**Ф13**
2.	$S\mathbf{i}S \equiv \neg S\mathbf{e}S$	**Ф12**
3.	$P\mathbf{q}P \equiv \neg P\mathbf{u}P$	**Ф14**
4.	$(S\mathbf{i}P \vee S\mathbf{e}S \vee P\mathbf{e}P) \equiv \neg(S\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{i}P)$	1,2,3;**КЛВ**

A12. $\psi_1(S\mathbf{u}P \supset S\mathbf{a}S) = (S\mathbf{u}P \,\&\, S\mathbf{q}S \,\&\, P\mathbf{q}P) \supset (S\mathbf{a}S \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, S\mathbf{q}S)$

1.	$(S\mathbf{u}P \,\&\, S\mathbf{e}S) \supset S\mathbf{a}P$	**Ф4**
2.	$S\mathbf{u}P \supset P\mathbf{u}S$	**Ф6**
3.	$(S\mathbf{u}P \,\&\, S\mathbf{e}S) \supset (S\mathbf{a}P \,\&\, P\mathbf{u}S)$	1,2;**КЛВ**
4.	$(S\mathbf{a}P \,\&\, P\mathbf{u}S) \supset P\mathbf{u}P$	**Ф4**
5.	$(S\mathbf{u}P \,\&\, S\mathbf{e}S) \supset P\mathbf{u}P$	3,4;**КЛВ**
6.	$S\mathbf{i}S \equiv \neg S\mathbf{e}S$	**Ф12**
7.	$P\mathbf{q}P \equiv \neg P\mathbf{u}P$	**Ф14**
8.	$(S\mathbf{u}P \,\&\, P\mathbf{q}P) \supset S\mathbf{i}S$	5,6,7;**КЛВ**
9.	$S\mathbf{a}S$	**Ф7**
10.	$(S\mathbf{u}P \,\&\, S\mathbf{q}S \,\&\, P\mathbf{q}P) \supset (S\mathbf{a}S \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, S\mathbf{q}S)$	8,9;**КЛВ**

A14. $\psi_1(S\mathbf{q}P \equiv \neg S\mathbf{u}P) = (S\mathbf{q}P \vee S\mathbf{u}S \vee P\mathbf{u}P) \equiv \neg(S\mathbf{u}P \,\&\, S\mathbf{q}S \,\&\, P\mathbf{q}P)$ доказывается аналогично переводу **A7** с использованием **Ф14.**

Из определения ψ_1 следует, что если $\psi_1(\mathbf{A} \supset \mathbf{B})$ и $\psi_1(\mathbf{A})$ доказуемы в **ОФС**, то $\psi_1(\mathbf{B})$ также доказуема в этой системе. Первая часть доказательства теоремы 1 завершена.

В качестве обратного перевода из **ОФС** в **ОС3**$^+$ рассмотрим функцию ψ_2:

$\psi_2(S\mathbf{a}P) = S\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P,$	$\psi_2(S\mathbf{i}P) = S\mathbf{i}P,$
$\psi_2(S\mathbf{e}P) = S\mathbf{e}P,$	$\psi_2(S\mathbf{o}P) = S\mathbf{o}P \,\&\, P\mathbf{a}P,$
$\psi_2(S\mathbf{u}P) = S\mathbf{u}P \vee S\mathbf{o}S \vee P\mathbf{o}P,$	$\psi_2(S\mathbf{q}P) = S\mathbf{q}P \,\&\, S\mathbf{a}S \,\&\, P\mathbf{a}P,$
$\psi_2(\neg\mathbf{A}) = \neg\psi_2(\mathbf{A}),$	$\psi_2(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B}) = \psi_2(\mathbf{A}) \nabla \psi_2(\mathbf{B}).$

Перевод ψ_2 играет чисто вспомогательную роль и не является погружающей операцией. Покажем, что он удовлетворяет второй части критерия В.А. Смирнова.

Снова применяем индукцию по длине доказательства формулы **A** — на этот раз в системе **ОФС**. Продемонстрируем сначала доказуемость ψ_2-переводов всех ее аксиом в исчислении **ОС3**$^+$.

Ф0. Переводы аксиом данного типа являются аксиомами **ОС3**$^+$.

Ф1. $\psi_2((M\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{a}M) \supset S\mathbf{a}P) = ((M\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P) \,\&\, (S\mathbf{a}M \vee M\mathbf{o}M)) \supset (S\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P)$.

1.	$(M\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{a}M) \supset S\mathbf{a}P$	**A1**
2.	$(M\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{a}M) \supset (S\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P)$	1;**КЛВ**
3.	$M\mathbf{a}P \supset (M\mathbf{a}M \,\&\, P\mathbf{a}P)$	**A4**
4.	$M\mathbf{o}M \equiv \neg M\mathbf{a}M$	**A8**
5.	$\neg(M\mathbf{a}P \,\&\, M\mathbf{o}M)$	3,4;**КЛВ**
6.	$(M\mathbf{a}P \,\&\, M\mathbf{o}M) \supset (S\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P)$	5;**КЛВ**
7.	$P\mathbf{o}P \supset (S\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P)$	закон **КЛВ**
8.	$((M\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P) \,\&\, (S\mathbf{a}M \vee M\mathbf{o}M)) \supset (S\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P)$	3,6,7;**КЛВ**

Ф2. $\psi_2((M\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{a}M) \supset S\mathbf{e}P) = (M\mathbf{e}P \,\&\, (S\mathbf{a}M \vee M\mathbf{o}M)) \supset S\mathbf{e}P$.

1.	$(M\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{a}M) \supset S\mathbf{e}P$	**A2**
2.	$M\mathbf{e}P \supset M\mathbf{a}M$	**A5**
3.	$M\mathbf{o}M \equiv \neg M\mathbf{a}M$	**A8**
4.	$\neg(M\mathbf{e}P \,\&\, M\mathbf{o}M)$	2,3;**КЛВ**
5.	$(M\mathbf{e}P \,\&\, M\mathbf{o}M) \supset S\mathbf{e}P$	4;**КЛВ**
6.	$(M\mathbf{e}P \,\&\, (S\mathbf{a}M \vee M\mathbf{o}M)) \supset S\mathbf{e}P$	1,5;**КЛВ**

Ф3. $\psi_2((M\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{u}M) \supset S\mathbf{u}P) = ((M\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P) \,\&\, (S\mathbf{u}M \vee S\mathbf{o}S \vee M\mathbf{o}M)) \supset (S\mathbf{u}P \vee S\mathbf{o}S \vee P\mathbf{o}P)$.

1.	$(M\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{u}M) \supset S\mathbf{u}P$	**A9**
2.	$(M\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{u}M) \supset (S\mathbf{u}P \vee S\mathbf{o}S \vee P\mathbf{o}P)$	1;**КЛВ**
3.	$(M\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{o}S) \supset (S\mathbf{u}P \vee S\mathbf{o}S \vee P\mathbf{o}P)$	закон **КЛВ**
4.	$M\mathbf{a}P \supset (M\mathbf{a}M \,\&\, P\mathbf{a}P)$	**A4**
5.	$M\mathbf{o}M \equiv \neg M\mathbf{a}M$	**A8**
6.	$\neg(M\mathbf{a}P \,\&\, M\mathbf{o}M)$	4,5;**КЛВ**
7.	$(M\mathbf{a}P \,\&\, M\mathbf{o}M) \supset (S\mathbf{u}P \vee S\mathbf{o}S \vee P\mathbf{o}P)$	6;**КЛВ**
8.	$P\mathbf{o}P \supset (S\mathbf{u}P \vee S\mathbf{o}S \vee P\mathbf{o}P)$	закон **КЛВ**
9.	$((M\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P) \,\&\, (S\mathbf{u}M \vee S\mathbf{o}S \vee M\mathbf{o}M)) \supset$ $(S\mathbf{u}P \vee S\mathbf{o}S \vee P\mathbf{o}P)$	2,3,7,8;**КЛВ**

Ф4. $\psi_2((M\mathbf{u}P \,\&\, S\mathbf{e}M) \supset S\mathbf{a}P) = ((M\mathbf{u}P \vee M\mathbf{o}M \vee P\mathbf{o}P) \,\&\, S\mathbf{e}M) \supset (S\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P)$.

1.	$(M\mathbf{u}P \,\&\, S\mathbf{e}M) \supset S\mathbf{a}P$	**A10**
2.	$(M\mathbf{u}P \,\&\, S\mathbf{e}M) \supset (S\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P)$	1;**КЛВ**
3.	$S\mathbf{e}M \supset M\mathbf{e}S$	**A3**
4.	$M\mathbf{e}S \supset M\mathbf{a}M$	**A5**
5.	$M\mathbf{o}M \equiv \neg M\mathbf{a}M$	**A8**
6.	$\neg(M\mathbf{o}M \,\&\, S\mathbf{e}M)$	3,4,5;**КЛВ**
7.	$(M\mathbf{o}M \,\&\, S\mathbf{e}M) \supset (S\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P)$	6;**КЛВ**
8.	$P\mathbf{o}P \supset (S\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P)$	закон **КЛВ**
9.	$((M\mathbf{u}P \vee M\mathbf{o}M \vee P\mathbf{o}P) \,\&\, S\mathbf{e}M) \supset (S\mathbf{a}P \vee$ $P\mathbf{o}P)$	2,7,9;**КЛВ**

Ф5. $\psi_2(S\mathbf{e}P \supset P\mathbf{e}S) = S\mathbf{e}P \supset P\mathbf{e}S$ — аксиома **A3** системы **OC3$^+$**.

Ф6. $\psi_2(S\mathbf{u}P \supset P\mathbf{u}S) = (S\mathbf{u}P \vee S\mathbf{o}S \vee P\mathbf{o}P) \supset (P\mathbf{u}S \vee P\mathbf{o}P \vee S\mathbf{o}S)$ выводится непосредственно из **A11** по правилам классической логики высказываний.

Ф7. $\psi_2(S\mathbf{a}S) = S\mathbf{a}S \vee S\mathbf{o}S$ выводится из частного случая **A8** ($S\mathbf{o}S \equiv \neg S\mathbf{a}S$).

Ф8. $\psi_2(S\mathbf{i}P \supset S\mathbf{i}S) = S\mathbf{i}P \supset S\mathbf{i}S$ выводится из **A6**.

Ф9. $\psi_2(S\mathbf{o}P \supset S\mathbf{i}S) = (S\mathbf{o}P \,\&\, P\mathbf{a}P) \supset S\mathbf{i}S$ выводится из **A6**.

Ф10. $\psi_2(S\mathbf{q}P \supset S\mathbf{q}S) = (S\mathbf{q}P \,\&\, S\mathbf{a}S \,\&\, P\mathbf{a}P) \supset (S\mathbf{q}S \,\&\, S\mathbf{a}S \,\&\, S\mathbf{a}S)$ выводится из **A13**.

Ф11. $\psi_2(S\mathbf{o}P \supset P\mathbf{q}P) = (S\mathbf{o}P \,\&\, P\mathbf{a}P) \supset (P\mathbf{q}P \,\&\, P\mathbf{a}P \,\&\, P\mathbf{a}P)$ выводится из частного случая **A13** ($P\mathbf{q}P$).

Ф12. $\psi_2(S\mathbf{i}P \equiv \neg S\mathbf{e}P) = S\mathbf{i}P \equiv \neg S\mathbf{e}P$ — аксиома **A7** системы **OC3$^+$**.

Ф13. $\psi_2(S\mathbf{o}P \equiv \neg S\mathbf{a}P) = (S\mathbf{o}P \,\&\, P\mathbf{a}P) \equiv \neg(S\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P)$

1.	$S\mathbf{o}P \equiv \neg S\mathbf{a}P$	**A8**
2.	$P\mathbf{o}P \equiv \neg P\mathbf{a}P$	**A8**
3.	$(S\mathbf{o}P \,\&\, P\mathbf{a}P) \equiv \neg(S\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P)$	1,2;**КЛВ**

Ф14. $\psi_2(S\mathbf{q}P \equiv \neg S\mathbf{u}P) = (S\mathbf{q}P \,\&\, S\mathbf{a}S \,\&\, P\mathbf{a}P) \equiv \neg(S\mathbf{u}P \vee S\mathbf{o}S \vee P\mathbf{o}P)$

1.	$S\mathbf{q}P \equiv \neg S\mathbf{u}P$	**A14**
2.	$S\mathbf{o}S \equiv \neg S\mathbf{a}S$	**A8**
3.	$P\mathbf{o}P \equiv \neg P\mathbf{a}P$	**A8**
4.	$(S\mathbf{q}P \,\&\, S\mathbf{a}S \,\&\, P\mathbf{a}P) \equiv \neg(S\mathbf{u}P \vee S\mathbf{o}S \vee P\mathbf{o}P)$	1,2,3;**КЛВ**

Ф15. $\psi_2(S\mathbf{i}S \vee S\mathbf{q}S) = S\mathbf{i}S \vee S\mathbf{q}S \,\&\, S\mathbf{a}S \,\&\, S\mathbf{a}S$ выводится из **A6**.

Из определения ψ_2 следует, что если $\psi_2(\mathbf{A} \supset \mathbf{B})$ и $\psi_2(\mathbf{A})$ доказуемы в **OC3$^+$**, то $\psi_2(\mathbf{B})$ также доказуема в этой системе. Вторая часть доказательства теоремы 1 завершена.

Остается продемонстрировать доказуемость в **OC3$^+$** формулы $\mathbf{A} \equiv \psi_2(\psi_1(\mathbf{A}))$ для произвольной $\mathbf{A}$. Применяем индукцию по числу пропозициональных связок в $\mathbf{A}$.

Рассмотрим сначала случаи, когда $\mathbf{A}$ не содержит пропозициональных связок.

(1) **A** есть $S\mathbf{a}P$. Тогда $\psi_2(\psi_1(\mathbf{A})) = \psi_2(S\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{q}P) = (S\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P) \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{q}P \,\&\, P\mathbf{a}P \,\&\, P\mathbf{a}P$.

1.	$P\mathbf{o}P \equiv \neg P\mathbf{a}P$	**A8**
2.	$((S\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P) \,\&\, P\mathbf{a}P) \supset S\mathbf{a}P$	1;**КЛВ**
3.	$((S\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P) \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{q}P \,\&\, P\mathbf{a}P \,\&\, P\mathbf{a}P) \supset S\mathbf{a}P$	2;**КЛВ**
4.	$S\mathbf{i}S$	**A8**
5.	$P\mathbf{q}P$	**A13**
6.	$S\mathbf{a}P \supset (S\mathbf{a}S \,\&\, P\mathbf{a}P)$	**A4**
7.	$S\mathbf{a}P \supset ((S\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P) \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{q}P \,\&\, P\mathbf{a}P \,\&\, P\mathbf{a}P)$	4,5,6;**КЛВ**
8.	$S\mathbf{a}P \equiv ((S\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P) \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{q}P \,\&\, P\mathbf{a}P \,\&\, P\mathbf{a}P)$	1,2,3;**КЛВ**

(2) **A** есть $S\mathbf{e}P$. Тогда $\psi_2(\psi_1(\mathbf{A})) = \psi_2(S\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{i}P) = S\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{i}P$

1.	$S\mathbf{i}S$	**A6**
2.	$P\mathbf{i}P$	**A6**
3.	$S\mathbf{e}P \equiv (S\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{i}P)$	1,2;**КЛВ**

(3) **A** есть $S\mathbf{u}P$. Тогда $\psi_2(\psi_1(\mathbf{A})) = \psi_2(S\mathbf{u}P \,\&\, S\mathbf{q}S \,\&\, P\mathbf{q}P) = (S\mathbf{u}P \vee S\mathbf{o}S \vee P\mathbf{o}P) \,\&\, S\mathbf{q}S \,\&\, S\mathbf{a}S \,\&\, S\mathbf{a}S \,\&\, P\mathbf{q}P \,\&\, P\mathbf{a}P \,\&\, P\mathbf{a}P$.

1.	$S\mathbf{o}S \equiv \neg S\mathbf{a}S$	**A8**
2.	$P\mathbf{o}P \equiv \neg P\mathbf{a}P$	**A8**
3.	$((S\mathbf{u}P \vee S\mathbf{o}S \vee P\mathbf{o}P) \,\&\, S\mathbf{a}S \,\&\, P\mathbf{a}P) \supset S\mathbf{u}P$	1,2;**КЛВ**
4.	$\psi_2(\psi_1(S\mathbf{u}P)) \supset S\mathbf{u}P$	3;**КЛВ**
5.	$S\mathbf{u}P \supset S\mathbf{a}S$	**A12**
6.	$S\mathbf{u}P \supset P\mathbf{u}S$	**A11**
7.	$P\mathbf{u}S \supset P\mathbf{a}P$	**A12**
8.	$S\mathbf{u}P \supset P\mathbf{a}P$	6,7;**КЛВ**
9.	$S\mathbf{q}S$	**A13**

10.	$P\mathbf{q}P$	**A13**
11.	$S\mathbf{u}P \supset \psi_2(\psi_1(S\mathbf{u}P))$	5,8,9,10;**КЛВ**
12.	$S\mathbf{u}P \equiv \psi_2(\psi_1(S\mathbf{u}P))$	4,11;**КЛВ**

(4)-(6) Случаи, когда **A** имеет вид $S\mathbf{i}P$, $S\mathbf{o}P$ и $S\mathbf{q}P$ сводятся соответственно к случаям (2), (1) и (3) в силу определений переводов ψ_1 и ψ_2, а также аксиом **A0**, **A8**, **A7** и **A14** системы $\mathbf{OC3}^+$.

Случаи, когда **A** содержит пропозициональные связки, легко обосновываются с использованием индуктивного допущения и определений переводов ψ_1 и ψ_2.

Поскольку все три части критерия погружаемости В.А. Смирнова справедливы для перевода ψ_1 и систем $\mathbf{OC3}^+$ и **ОФС**, теорема 1 доказана. Q.E.D.

ТЕОРЕМА 2. *Обобщенный перевод χ погружает силлогистику $\mathbf{OC3}^+$ в классическое исчисление предикатов.*

Доказательство. Из только что установленного факта погружаемости системы $\mathbf{OC3}^+$ в **ОФС** посредством перевода ψ_1 и доказанной в [2] теоремы о погружаемости силлогистики **ОФС** в классическое исчисление предикатов посредством перевода * вытекает, что $\mathbf{OC3}^+$ погружается в исчисление предикатов посредством композиции переводов ψ_1 и *. Таким образом, произвольная формула **A** языка обобщенной силлогистики доказуема в системе $\mathbf{OC3}^+$ тогда и только тогда, когда формула $\psi_1(\mathbf{A})^*$ доказуема в исчислении предикатов.

Индукцией по числу пропозициональных связок в силлогистической формуле **A** несложно доказать, что $\psi_1(\mathbf{A})^*$ логически эквивалентна в исчислении предикатов формуле $\chi(\mathbf{A})$, т. е. композиция переводов ψ_1 и * равносильна расширенному переводу χ. Отсюда следует, что формула $\psi_1(\mathbf{A})^*$ является теоремой первопорядкового исчисления в том и только в том случае, когда его теоремой является формула $\chi(\mathbf{A})$.

Из сказанного выше вытекает, что формула **A** языка обобщенной силлогистики доказуема в системе $\mathbf{OC3}^+$ тогда и только тогда, когда формула $\chi(\mathbf{A})$ доказуема в исчислении предикатов. Погружаемость силлогистики $\mathbf{OC3}^+$ в исчисление предикатов доказана. Q.E.D.

Литература

[1] *Маркин В.И.* Системы силлогистики, адекватные двум переводам силлогистических формул в исчисление предикатов В.А.Смирнова // Труды научно-иследовательского семинара логического центра Института философии РАН 1997. М.: ИФ РАН, 1998.

[2] *Маркин В.И.* Обобщенная позитивная силлогистика // Логические исследования. Вып.6. М.: РОССПЭН, 1999.

[3] *Смирнов В.А.* Адекватный перевод утверждений силлогистики в исчисление предикатов // Актуальные проблемы логики и методологии науки. Киев: Наукова думка, 1980.