Функциональная взаимовыразимость регулярных логик Клини

Е. Ю. Комендантская

ABSTRACT. We consider the family of regular 3-valued logics, two of which were introduced by Kleene under the names “strong” and “weak” logics, and the two others have recently emerged. These newly emerged “Kleene” logics — **Lisp** and **TwinLisp** — are of particular interest. We consider algebraic properties of these two logics and show that there is a partial ordering (D-containment) under which the four Kleene logics form a lattice.

Ключевые слова: трехзначные логики Клини, промежуточные регулярные логики.

1 Вступление

Идея создания многозначных регулярных логик принадлежит С. Клини [4]. Главное их достоинство — простота и естественность в применении к логической формализации частично-рекурсивных функций, т.е. функций, чьи значения могут быть не всюду определены. Регулярность является необходимым условием для того, чтобы пропозициональные связки были частично-рекурсивными операторами. Очевидная и прямая связь логик Клини с теорией вычислимых функций является их уникальной чертой. Позднее эти логики были применены и в программировании [9, 11].

Мы предварим эту статью[1] кратким пояснением о том, что Клини вкладывал в понятия «логика» и «регулярность» в данном контексте. В своей знаменитой книге [4] он определил две

[1]Эта сатья подготовлена по материалам моей дипломной работы «Регулярные Логики Клини» [5, 13] защищенной на кафедре логики МГУ. Я благодарна А.С. Карпенко за научное руководство и В.М. Попову за подробные обсуждения нескольких предварительных версий этой работы.

регулярные логики — «слабую» и «сильную». Его определение этих логик заключалось в описании их связок с помощью истинностных таблиц. То есть в данном контексте логика — это набор истинностных функций. Простой взгляд на определения этих функций убедит читателя в том, что при одном выделенном истинностном значении 1 у этих логик нет тавтологий: любая связка дает значение $\frac{1}{2}$ при значении аргументов $\frac{1}{2}$. Поэтому логики Клини так никогда и не получили прямой аксиоматической или секвенциальной формулировки и, в этом смысле, стоят в стороне от многозначных логик Лукасевича, которые могут быть аксиоматизированы, а значит — осмыслены с точки зрения теории доказательств. Такова была цена естественной вычислительной применимости логик Клини. Рассматривая эти логики, нам не остается ничего иного как разделить с Клини его понимание термина «логика». Заметим, что различные модификации логик Клини (в основном в стиле модальных логик) получили разнообразные аксиоматические и секвенциальные формулировки [10, 12, 15].

Регулярность Клини определяет так. Таблицы для пропозициональных связок нужно выбирать регулярными в следующем смысле: данный столбец (строка) содержит 1 в строке (столбце) для $\frac{1}{2}$ только при условии, что этот столбец (эта строка) состоит целиком из 1; аналогично для 0. Это операциональное определение может быть проанализировано в общепринятых теоретических терминах монотонности и нормальности.

Многозначная истинностная функция является *нормальной*, если таблица истинности для этой функции полностью совпадает на классических истинностных значениях 1,0 с распределением значений в классической логике. Функция F является *монотонной*, если для всякой пары значений a и b, таких, что $a \leq b$, соблюдается неравенство $F(a) \leq F(b)$.

Условимся, вслед за Клини, считать, что трехзначные функции рассматриваемых логик должны принимать неклассическое значение $\frac{1}{2}$ как минимум на одном из распределений значений. То есть мы не рассматриваем связки, содержащие в качестве значений только классические значения 1 или 0. В этом случае регулярность трехзначной логики Клини равнозначна нормальности и монотонности логики на порядке $\frac{1}{2} \leq 0$, $\frac{1}{2} \leq 1$, где 0 и

1 несравнимы. Такие свойства легко объяснимы в терминах рекурсивных функций: главное значение имеет то, остановилось ли вычисление значения рекурсивного предиката, и тогда при остановке мы получим 1 или 0 — что именно, это не важно с вычислительной точки зрения. Важность будет иметь тот факт, если вычисление не остановится и значение будет не определено.

Помимо сильной и слабой регулярных логик Клини, существуют еще две промежуточные трехзначные регулярные логики. Таблицы для конъюнкции и дизъюнкции одной из них были предложены Фиттингом [8], он назвал ее **Lisp**. В параграфе 2 мы определим эту логику и введем еще одну, новую, промежуточную логику **TwinLisp**. Мы доказали в [5], что эти четыре логики — единственно возможные трехзначные регулярные логики Клини. В параграфе 3 мы рассмотрим их свойства в сравнении друг с другом.

Значительная часть интереса к логикам Клини вызвана не только свойствами каждой из них, но и тем, как эти логики соотносятся друг с другом (см. [5, 11]). В параграфе 4 мы обсудим, какие взаимоотношения могут быть установлены между произвольными многозначными логиками. С самого начала высказывалось несколько предположений о взамосвязи логик Клини. Так, Клини предположил, что его сильная логика является самым сильным регулярным расширением классической логики. Фиттинг предположил, что любая промежуточная регулярная логика будет иметь средние значения между сильной и слабой логиками Клини.

В параграфе 5 мы однозначно ответим на вопрос о том, какого рода включение возможно между этими логиками. Мы покажем, что семейство трехзначных регулярных логик Клини образует решетку по отношению D-включения, т. е. по отношению функциональной выразимости связок. Также мы формально докажем, что сильная логика Клини является супремумом, а слабая логика Клини — инфинумом в этой решетке; а две логики **Lisp** и **TwinLisp** действительно являются промежуточными между ними в строго определенном смысле.

2 Регулярные Логики Клини

Все регулярные логики Клини разделяют одно классическое свойство, а именно: в каждой из них множества связок $\{\neg, \vee\}$ (равно как и $\{\neg, \wedge\}$) являются функционально полными. То есть связки $\wedge, \supset, \equiv$ выражаются посредством $\{\neg, \vee\}$ с помощью классических определений:

$$P \wedge Q = \neg(\neg P \vee \neg Q);$$

$$P \supset Q = \neg P \vee Q;$$

$$P \equiv Q = (P \supset Q) \wedge (Q \supset P).$$

Поэтому мы не будем следовать традиции и определять все 5 связок. Вместо этого ограничимся тремя: $\neg, \vee, \wedge$, взяв третью связку $\wedge$ в демонстрационных целях.

Сильная логика Клини $\mathbf{K}_3$ [4] была предложена первой:

p	$\sim p$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

$\vee$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\wedge$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0

Другой пример регулярных трехзначных таблиц — это так называемые **слабые связки Клини–Бочвара** [1, 4], которые определяют логику $\mathbf{K}_3^W$. Они получаются путем заполнения символом $\frac{1}{2}$ всех столбцов и строк, где хотя бы один раз встречается символ $\frac{1}{2}$.

p	$\sim p$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

$\cup$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\cap$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	$\frac{1}{2}$	0

В **логике Lisp [8] ($\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$)** оценка сложного выражения ведется по простым выражениям, входящим в него. Например, мы оцениваем выражение $P \wedge^{\rightarrow} Q$ слева направо, так что предложение P мы оцениваем первым. Если P приписано значение «ложно», то работа по приписыванию значений останавливается и всему выражению $P \wedge^{\rightarrow} Q$ приписывается значение «ложь». Если

P имеет значение «истина», то далее проводится приписывание значений Q, и значение Q становится значением всего выражения $P \wedge^{\rightarrow} Q$. Это ассиметричная или позиционная логика. Например, если P ложно, а Q не определено $(\frac{1}{2})$, то выражение $P \wedge^{\rightarrow} Q$ будет ложным, а $Q \wedge^{\rightarrow} P$ примет значение $\frac{1}{2}$.

Связки логики **Lisp**, условимся обозначать ее $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, могут быть представлены следующим образом.

p	$\sim p$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

$\vee^{\rightarrow}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\wedge^{\rightarrow}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	0	0

Следующую промежуточную логику мы назовем **«двойник Lisp»**, или **TwinLisp** ($\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$): истинностные функции этих двух логик взаимовыразимы. Несмотря на это, их решеточные свойства различны.

p	$\sim p$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

$\vee$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\wedge$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	0	$\frac{1}{2}$	0

Итак, мы определили 4 регулярные логики Клини. Две из них были определены Клини, одна (**Lisp**) — Фиттингом, и одна — впервые вводится в данной статье, см. также [5]. Мы показали в [5], что все эти логики нормальны, монотонны на порядке $\frac{1}{2} \leq 0$, $\frac{1}{2} \leq 1$, и регулярны. Более того, мы показали, что эти четыре логики — единственно возможнные нормальные монотонные трехзначные логики на заданном порядке истинностных значений.

3 Решеточные свойства регулярных трехзначных логик

Рассмотрим решеточные свойства четырех представленных логик.

Итак, логики $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_3^W$, $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ идемпотентны:

(a) $x \vee x = x$

(b) $x \wedge x = x$

$\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_3^W$ — коммутативны, но $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ и $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ не коммутативны, т.е. не выполняются соотношения:

(a) $x \vee y = y \vee x$

Так, например, для $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, если $x = \frac{1}{2}$, а $y = 1$, то $x \vee^{\rightarrow} y$ примет значение 1, а $y \vee^{\rightarrow} x$ примет значение $\frac{1}{2}$.

(b) $x \wedge y = y \wedge x$

Так, если $x = 0$, а $y = \frac{1}{2}$, то значение $x \wedge^{\rightarrow} y$ будет равно 0, а $y \wedge^{\rightarrow} x$ — $\frac{1}{2}$.

Далее, в $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_3^W$, $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ имеют место законы ассоциативности и дистрибутивности, в $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ проходит закон поглощения, в $\mathbf{K}_3$ и $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ проходит закон Клини. Отметим, что в $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ законы поглощения, а в $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ закон Клини выполняются только при условии, что переставлены местами дизъюнктивные и конъюнктивные члены.

Ассоциативность:

(a) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

(b) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

Поглощение в $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_3^W$, $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$:

(a) $x \vee (x \wedge y) = x$

(b) $x \wedge (x \vee y) = x$

Поглощение в $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$:

(a) $(y \wedge^{\leftarrow} x) \vee^{\leftarrow} x = x$

(b) $(y \vee^{\leftarrow} x) \wedge^{\leftarrow} x = x$

Не претерпевают изменения законы дистрибутивности:

(a) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

(b) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

Во всех перечисленных логиках сохраняется истинность законов *де Моргана*, так как для одноместного оператора $\sim$ (инволюция) выполняются тождества:
$\sim\sim x = x$
$\sim (x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$
$\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$.
А также имеет место закон Клини:

(K) $(x \wedge \sim x) \vee (y \vee \sim y) = y \vee \sim y$,

в $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ при условии, что дизъюнктивные члены переставлены местами:

(K') $(y \wedge^{\rightarrow} \sim y) \vee^{\rightarrow} (x \vee^{\rightarrow} \sim x) = y \vee^{\rightarrow} \sim y$.

Таким образом, **Lisp** и **TwinLisp** являются **некоммутативными алгебрами Клини**.

Для сравнения: сильная логика Клини $\mathbf{K}_3$ удовлетворяет условиям алгебры Клини, в ней имеют место все вышеперечисленные законы. В слабой логике Клини $\mathbf{K}_3^W$ не имеют места законы поглощения и закон Клини, соответственно $\mathbf{K}_3^W$ является квазирешеткой. В $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, в отличие от $\mathbf{K}_3^W$, проходят законы поглощения и закон Клини (в них переставлены местами дизъюнктивные члены), но не проходит коммутативность. В $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ имеют место все законы, что и в $\mathbf{K}_3$, кроме коммутативности, в том числе и поглощение и закон Клини без каких-либо изменений.

4 Взаимоотношения регулярных трехзначных логик

В этом параграфе мы рассмотрим возможные отношения включения на множествах многозначных логик. Мы обоснуем, почему именно D-включение было выбрано нами для анализа логик Клини, более того, мы объясним, почему этот род включения наиболее оптимален в данном контексте.

Одна многозначная логика может содержаться в другой в нескольких разных смыслах [11].

1. Множество тавтологий логики X может содержать множество тавтологий логики Y. В таком случае говорят, что

X *T-содержит* Y. Например, большинство многозначных логик T-содержится в классической.

2. Логика X может содержать логику Y в следующем смысле. Все истинностные значения Y также являются истинностными значениями X и если в таблице истинности для X вычеркнуть или стереть все колонки и ряды, которые являются дополнительными к таблице истинности Y, то останется просто таблица истинности для Y.

   В таком случае говорят, что X *S-содержит* Y (от слова исключение (suppression)). Например, четырехзначная логика $\mathbf{K}_4$ S-содержит $\mathbf{K}_3$, а регулярные логики Клини S-содержат классическую, в силу своей нормальности.

3. Логика X также может содержать логику Y, если мы можем идентифицировать каждое истинностное значение X с каким-либо истинностным значением Y, возможно, теряя в ходе этого процесса какие-либо истинностные значения, имевшиеся в системе Y. В этом случае говорят, что система X *I-содержит* Y (в смысле отождествления (identification)).

   Существуют алгебраические эквиваленты для некоторых типов включения. Так, X *S-содержит* Y, если Y является субалгеброй X. X *I-содержит* Y, если Y — это гомоморфное отображение X.

4. D-включение имеет место, когда все связки одной логики могут быть выражены через связки другой. То есть включение одной логики в другую происходит посредством определения (definition) связок одной через связки другой.

   Так, $\mathbf{K}_3$ может быть определена через логику Лукасевича $\mathbf{L}_3$, т. е. $\mathbf{L}_3$ *D-содержит* $\mathbf{K}_3$.

Можно доказать следующие соотношения:

(1) S-включение влечет T-включение, но не наоборот.

(2) I-включение в общем случае не влечет T-включения, и наоборот.

(3) S-включение не влечет I-включения, и, обратно, I-включение не влечет S-включения.

Перейдем теперь к рассмотрению отношений между регулярными трехзначными логиками.

Итак, были рассмотрены регулярные трехзначные логики $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_3^W$, $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$. Таблицы истинности этих логик таковы, что не может идти речи об S- или I-включении. Однако очевидно, что мы с легкостью находим T- и D-включения между регулярными трехзначными логиками.

Обсудим сначала отношение T-включения. Что касается тавтологий, то ни одна из перечисленных логик не имеет тавтологий при одном выделенном значении. Таким образом, их взаимное T-включение тривиально.

Рассмотрим отношение D-включения. Как было определено ранее, отношение D-включения имеет место, если связки одной системы представимы через связки другой. Мы посвятим дальнейшее рассмотрение установлению взаимоотношений D-включения между регулярными логиками Клини.

5 D-включение регулярных логик Клини

Одним из первых проблемой перевода связок одной системы в другую заинтересовался В. М. Шестаков [7], его результаты касались определения функционально полных систем связок для трехзначных логик, а также их взамовыразимости. Как известно, вслед за переводами Шестакова появился перевод слабых связок Клини–Бочвара посредством сильных связок Клини, осуществленный В. К. Финном [6]:

$$p \cap q = (p \wedge q) \vee (p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim q).$$

Также было показано, что хотя слабые связки и выразимы через сильные, но обратное соотношение не имеет места. То есть было показано, что между $\mathbf{K}_3$ и $\mathbf{K}_3^W$ существует отношение D-включения. Покажем, что между всеми четырьмя логиками $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_3^W$, $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ существует отношение D-включения, и, таким образом, докажем высказанное Фиттингом предположение о том, что все регулярные связки, отличные от $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_3^W$, являются промежуточными между $\mathbf{K}_3$ и $\mathbf{K}_3^W$.

ТЕОРЕМА 1. *Логика* **Lisp** *является промежуточной между сильной и слабой логиками Клини, т.е.* $\mathbf{K}_3^W$ *D-включается в* $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$*, а* $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ *D-включается в* $\mathbf{K}_3$.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно осуществить определения связок **Lisp** через сильные связки Клини и слабых связок через связки **Lisp**.

Определения могут быть осуществлены следующим образом:

$$p \cap q = (p \wedge^{\rightarrow} q) \vee^{\rightarrow} (q \wedge^{\rightarrow} p)$$

$$p \cup q = (p \vee^{\rightarrow} q) \wedge^{\rightarrow} (q \vee^{\rightarrow} p)$$

$$p \vee^{\rightarrow} q = (\sim p \wedge q) \vee p$$

$$p \wedge^{\rightarrow} q = (\sim p \vee q) \wedge p.$$

Итак, $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ может быть выражена через $\mathbf{K}_3$, а $\mathbf{K}_3^W$ — через $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$.

Обратное же не имеет места, иначе можно было бы доказать, что $\mathbf{K}_3$ эквивалентна $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, и $\mathbf{K}_3^W$ эквивалентна $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, а, значит, и то, что $\mathbf{K}_3$ эквивалентна $\mathbf{K}_3^W$, что неверно. Q.E.D.

ТЕОРЕМА 2. *Логика* **TwinLisp** *является промежуточной между сильной и слабой логиками Клини. То есть* $\mathbf{K}_3^W$ *D-включается в* $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$*, и* $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ *D-включается в* $\mathbf{K}_3$.

Доказательство. Для доказательства осуществим определения более слабых связок через более сильные и докажем, что противоположные переводы не могут быть осуществлены.

$$p \cap q = (p \wedge^{\leftarrow} q) \vee^{\leftarrow} (q \wedge^{\leftarrow} p)$$

$$p \cup q = (p \vee^{\leftarrow} q) \wedge^{\leftarrow} (q \vee^{\leftarrow} p)$$

$$p \vee^{\leftarrow} q = (p \wedge \sim q) \vee q$$

$$p \wedge^{\leftarrow} q = (p \vee \sim q) \wedge q.$$

Факт, что обратные определения невозможны, доказывается от противного. Если бы $\mathbf{K}_3$ можно было выразить через $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$, а $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ через $\mathbf{K}_3^W$, то $\mathbf{K}_3$ была бы эквивалентна $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$, и $\mathbf{K}_3^W$ эквивалентна $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$, а, значит, $\mathbf{K}_3$ была бы эквивалентна $\mathbf{K}_3^W$, что неверно. Q.E.D.

Таким образом, **Lisp** и **TwinLisp** являются промежуточными логиками между сильной и слабой логиками Клини по отношению D-включения. Нам осталось показать взаимоотношения этих двух промежуточных логик.

ТЕОРЕМА 3. *Логики* **Lisp** *и* **TwinLisp** *функционально эквивалентны. То есть* $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ *D-включается в* $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$, *и* $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ *D-включается в* $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$.

Доказательство.

$$p \vee^{\rightarrow} q = q \vee^{\leftarrow} p$$

$$p \vee^{\leftarrow} q = q \vee^{\rightarrow} p$$

Аналогично для конъюнкций. Q.E.D.

Взаимосвязь рассмотренных логик можно иллюстрировать так:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{K_3} & \\
\mathbf{K_3^{\leftarrow}} \arrow[ur, "\subseteq^D"] \arrow[rr, Leftrightarrow, "\equiv^D"] & & \mathbf{K_3^{\rightarrow}} \arrow[ul, "\subseteq^D"'] \\
 & \mathbf{K_3^W} \arrow[uu, "\subseteq^D"'] \arrow[ul, "\subseteq^D"] \arrow[ur, "\subseteq^D"'] &
\end{tikzcd}$$

Итак, имеется четырехэлементное множество, элементами которого являются рассмотренные трехзначные логики, и для доказательства существования между этими логиками решеточного порядка необходимо доказать существование супремума и инфинума для любых двух элементов данного множества. Между логиками $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_3^W$, $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ было обнаружено отношение порядка по отношению выразимости одного множества связок через другое. Это отношение действительно является отношением порядка, поскольку оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Обозначим отношение D-включения как $\subseteq^D$. Используя теоремы 1 и 2, покажем, что $\mathbf{K}_3$ является супремумом, а $\mathbf{K}_3^W$ — инфинумом. Итак, для всех рассмотренных логик $\mathbf{K}_3$ и $\mathbf{K}_3^W$ являются верхней и нижней гранями соответсвенно: легко проверить, что $(\forall X(X \subseteq^D \mathbf{K}_3))$ и $(\forall X(\mathbf{K}_3^W \subseteq^D X))$. Поскольку здесь верхняя и нижняя грани единственны, факт что $\mathbf{K}_3$ —

наименьшая верхняя грань, а $\mathbf{K}_3^W$ — наибольшая нижняя грань устанавливается тривиальным образом. Итак, доказано, что логики Клини образуют решетку.

Заметим, что простое теоретико-множественное объединение и пересечение множеств связок промежуточных логик позволяет нам упорядочить регулярные логики Клини таким образом: $\mathbf{K}_3^{\rightarrow} \bigcup \mathbf{K}_3^{\leftarrow} \subseteq^D \mathbf{K}_3$, а $\mathbf{K}_3^{\rightarrow} \bigcap \mathbf{K}_3^{\leftarrow} \subseteq^D \mathbf{K}_3^W$. Однако неверно, что $\mathbf{K}_3^{\rightarrow} \bigcup \mathbf{K}_3^{\leftarrow} \equiv^D \mathbf{K}_3$, а $\mathbf{K}_3^{\rightarrow} \bigcap \mathbf{K}_3^{\leftarrow} \equiv^D \mathbf{K}_3^W$. Покажем это.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Через множество связок, полученное путем объединения множества связок логики $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ с множеством связок логики $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$, невозможно получить сильные связки логики $\mathbf{K}_3$.*

Доказательство. Допустим, что существует формула, представляющая выражение какой-либо двухместной связки $\mathbf{K}_3$ через связки $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ и $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$. Но, поскольку логики $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ и $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ взаимовыразимы, то искомая формула может быть преобразована в формулу, содержащую только связки $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ или $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$. И, таким образом, мы получили бы формулу, с помощью которой мы могли бы доказать эквивалентность системы связок $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$(или $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$) и $\mathbf{K}_3$. Но, как было показано в теоремах 1 и 2, это невозможно. Утверждение доказано. Q.E.D.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Через множество связок, полученное путем пересечения множества связок логики $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ с множеством связок логики $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$, невозможно получить слабые связки логики Клини $\mathbf{K}_3^W$.*

Доказательство. Пересечение множеств связок логик $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ и $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ дает следующее множество связок: $\{\equiv, \sim\}$. Нужно отметить, что эквивалентность в логиках $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_3^W$, $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ определяется с помощью таблиц истинности абсолютно одинаково. То есть искомый перевод $\mathbf{K}_3^{\rightarrow} \cap \mathbf{K}_3^{\leftarrow} \equiv^D \mathbf{K}_3^W$ должен был бы заключаться в определении всех связок $\mathbf{K}_3^W$ через $\{\equiv, \sim\}$. Но множество $\{\equiv, \sim\}$ не является полной системой связок даже для классической логики, т. е. любая возможная формула выразимости $\wedge$, $\vee$ или $\supset$ через $\{\equiv, \sim\}$ будет проваливаться как минимум на классических значениях. Утверждение доказано. Q.E.D.

6 Заключение

Таким образом, были рассмотрены все возможные регулярные трехзначные логики, их решеточные свойства, в том числе было определено, что $\mathbf{K}_3$ представляет собой решетку, а также модель алгебры Клини, $\mathbf{K}_3^W$ — квазирешетку, а $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ и $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ — некоммутативные алгебры Клини. Кроме того, было показано, что множество всех трехзначных регулярных логик образует решетку по отношению D-включения, причем $\mathbf{K}_3$ является супремумом, а $\mathbf{K}_3^W$ инфинумом.

Литература

[1] *Бочвар Д. А.* Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления // Математический сборник. 1938. Т. 4. № 2. С. 287–308.

[2] *Бочвар Д. А.* К вопросу о непротиворечивости одного трехзначного исчисления // Математический сборник. 1944. Т. 12. № 3. С. 353–359.

[3] *Карпенко А. С.* Многозначные логики (монография). Логика и компьютер. Вып. 4. М.: Наука, 1997.

[4] *Клини С. К.* Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957.

[5] *Лукъяновская (Комендантская) Е. Ю.* Дипломная работа «Регулярные логики Клини». Кафедра логики философского ф-та МГУ, 2003.

[6] *Финн В.К.* Аксиоматизация некоторых трехзначных исчислений высказываний и их алгебр// Философия в современном мире: Философия и логика. М., 1974. С. 398–438.

[7] *Шестаков В. И.* О взаимоотношениях некоторых трехзначных логических исчислений // Успехи математических наук. 1964. Т. 19. Вып. 2. № 116. С. 177–181.

[8] *Fitting M.* Kleene's Three Valued Logics and Their Children // Fundamenta informaticae. 1992. Vol. 20. P. 113–131.

[9] *Fitting M.* A Kripke-Kleene semantics for logic programs // Journal of Logic Programming. 1985. Vol. 2. P. 295–213.

[10] *Fitting M.* Tableaux for many-valued modal logics // Studia Logica. 1995. Vol. 55. № 1. P. 63–87.

[11] *Hitzler P. and Seda A.* Characterizations of Classes of Programs by Three-Valued Operators // Proc. LPNMR'99, LNAI. Vol. 1730. P. 357–371.

[12] *Kripke S. A.* Outline of a theory of truth // Journal of Philosophical Logic. 1975. Vol. 72. P. 690–716.

[13] *Lukyanovskaya E.* Kleene Regular Intermediate Three-Valued Logics // Proceedings of Smirnov Readings, 4th Interantional Conference. IPhRAS, 2003. P. 80–82.

[14] *Rescher N.* Many-valued logics. N.Y., 1969. P. 55–62, 71–76.

[15] *Turner R.* Truth and modality for knowledge representation. London, 1990.