# Об одном свойстве универсумов в моделях реализуемости для интуиционистской теории множеств

В. Х. Хаханян

**ABSTRACT.** We consider the universe of sets for models for intuitionistic set theory from [1] and [2] and proved some property of such universe.

*Ключевые слова:* аксиома, универсум, функция, множество, интуиционизм, экстенсиональность.

Напомним определение универсума множеств неформальным образом (для формального определения см. [1] или [2]). Универсум $\Delta$ определяется индукцией по классу ординалов так же, как универсум фон Неймана (кумулятивная иерархия) или универсум Гёделя конструктивных множеств (для выполнимости аксиомы выбора). $\Delta$ есть объединение $\Delta_\alpha$, где $\alpha$ — ординал и каждое множество из универсума состоит из пар $<$натуральное число, множество меньшего ранга уже построенное$>$. На предельном ординале происходит объединение всех ранее построенных множеств (объединение по меньшим ординалам), а на ординале-последователе берутся подмножества уже построеннных к данному шагу множеств, но только такие, которые не разбивают отношения эквивалентности $\approx$ и для которых существует частично-рекурсивная функция, являющаяся функцией экстенсиональности. Опишем отношение $\approx$. Мы говорим, что $x \approx y$, если вторые члены упорядоченных пар у $x$ и $y$ одни и те же и если существуют две частично-рекурсивные функции (ч-р.ф), одна из которых сводит $x$ к $y$, а вторая, наоборот, $y$ к $x$. Мы говорим, что ч-р.ф $f(n,m)$ сводит $x$ к $y$, если для всякой пары $< n, z >\in x!f(n,m)$ (здесь m — функция экстенсиональности для множества $z$ (множество $z$ уже построено ранее и у него существует функция экстенсиональности!)) и $< f(n,m), z >\in y$.

Мы говорим, что ч-р.ф $g(n,m,p)$ является функцией экстенсиональности для множества $z$, если для любых множеств $u$ и $v$ (из нашего универсума $\Delta$) и ч-р.ф $h$ и $q$, если $< n,u >\in z$ и $u \approx v$ с функциями $h$ и $q$, то $!g(n,h,q)$ и $< g(n,h,q), v >\in z$. Конечно, всюду имеем дело не с ч-р.ф, а с их гёделевыми номерами. Итак, если множество принадлежит универсуму, то (по построению!) у него есть функция экстенсиональности.

ЛЕММА 1. *Для всякой ч-р.ф $f(n,h,q)$ существует множество $x$ из универсума $\Delta$ такое, что данная функция не является его функцией экстенсиональности.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Не существует ч-р.ф такой, которая была бы функцией экстенсиональности для всех множеств из универсума $\Delta$.*

**Доказательство.** Рассмотрим три группы функций, которые исчерпывают все ч-р.ф от трех аргументов и для функции из каждой группы приведем нужное множество из универсума $\Delta$. Мелкие детали обоснования оставляем читателю.

1. $\exists n,m,p \neg ! f(n,m,p)$. Тогда $x = < n, \emptyset >$. Заметим, что данное множество имеет функцию экстенсиональности (какую?), т.е. принадлежит универсуму и что пустое множество эквивалентно самому себе с любыми функциями.

2. $\exists n,m,p f(n,m,p) \neq n$. Тогда требуемое множество $x$ то же самое, что из пункта 1.

3. $\forall n,m,p f(n,m,p) = n$, т.е. для любых фиксированных $m$ и $p$ функция $f$ как функция первого аргумента является тождественной. Требуемое множество таково: $x = < 0,z > |z \approx y \bigcup < 1,y >$, где $y \neq \emptyset$ и $y$ принадлежит нашему универсуму ($z \approx y$ означает, что существуют ч-р.ф, сводящие $z$ к $y$ и $y$ к $z$). Функцией экстенсиональности множества $x$ будет, например, функция g(n,m,p), которая для всех m и p $g(n,m,p) = 0$, в частности, $g(1,m,p) = 0$ обязательно. А тогда $x$ и есть требуемое множество, так как исходная функция f по любым фиксированным второму и третьему аргументам является тождественной.

Q.E.D.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Данное свойство универсума ($\Delta$) можно попытаться использовать для получения контрпримера сильного принципа униформизации для доказательства независимости этого принципа от тезиса Чёрча с выбором в интуиционистской теории множеств. В записи этого контрпримера формула $\varphi$ не содержит параметров (раньше удалось доказать независимость сильного принципа униформизации от тезиса Чёрча с выбором в интуиционистской теории множеств с объемностью для формулы $\varphi$ с одним параметром ровно). Однако для этого необходимо дать запись этой формулы в языке теории множеств.

## Литература

[1] *Хаханян В.Х.* Теория множеств и тезис Чёрча // Исследования по неклассическим логикам и формальным системам. М.: Наука, 1983. С. 198–208.

[2] *Хаханян В.Х.* Непротиворечивость интуиционистской теории множеств с принципами Чёрча и униформизации // Вестник Моск. Университета, серия Математика. Механика. 1980. № 5. С. 3–7.

[3] *Хаханян В.Х.* Невыводимость принципа униформизации из тезиса Чёрча в интуиционистской теории множеств // Математические заметки. 1988. Т.43. Вып. 5 (май). С. 685–691.

**Замечание.** В статье «Интуиционистская арифметика с принципами Маркова и P» (Выпуск 14 «Логических исследований», стр. 283–285) в приведенной автором модели (штрих-реализуемость Клини) принцип P НЕ ВЫПОЛНЯЕТСЯ (невозможно доказать выводимость для формулы в заключении принципа P). Для принципа M доказательство остается верным, верным остается и результат: теория HA+M обладает свойствами дизъюнктивности и экзистенциальности, так же как и теория HA+P. Оба последних утверждения получены в 1971 г. или ранее A.C. Трулстрой. Теория же HA+M+P совпадает с классической арифметикой и свойствами эффективности НЕ ОБЛАДАЕТ. Все замечания верны и легко следуют из имеющихся фактов.