Независимая базируемость дедуктивных пропозициональных систем[1]

И. А. Горбунов

abstract. Some questions concerned the existence of independent bases for consequence operations and sentential calculi are considered in the present paper.

Ключевые слова: дедуктивные пропозициональные системы, независимая базируемость, компактность.

1 Введение

Понятие *дедуктивной системы* возникло в качестве некоторого «дополнительного» к понятию *логики* способа описания некоторых свойств естественной логики. Понимание, в математической логике, логики как некоторого множества формул акцентирует наше внимание на способности некоторых форм высказываний сохранять свою истинность вне зависимости от их интерпретации, в силу самой их формы. Понятие же дедуктивной системы обращает наше внимание на тот факт, что логика позволяет нам выводить одни положения из других, т. е. акцентирует внимание на логическом следовании. Этот подход возник, видимо, в работах Я. Лукасевича и А. Тарского, подробнее об этом можно узнать, например, из [1] и [2]. Поскольку число публикаций, находящихся в рамках этого подхода и изданных на русском языке мало́, то автор частично использовал терминологию из интересного обзора А.С. Карпенко [2] и частично ту, которая сложилась при обсуждении им этих вопросов с участниками семинара по математической логике в Тверском госуниверситете. Основными источниками определений и некоторых фактов послужили работы Р. Вуйцицкого [3] и [4].

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 06–06–80380, 07–06–00318 и 08–06–00414.

Перейдем к точным определениям.

Пропозициональным алфавитом будем называть пару $\langle V, \Sigma \rangle$, где V — счетное множество символов, называемых *пропозициональными переменными*, а Σ — не более чем счетное множество конечноместных функциональных символов, называемых *пропозициональными связками* алфавита. Всякий терм, построенный из символов алфавита $\langle V, \Sigma \rangle$, будем называть *формулой*. *Языком* $\mathcal{L}$ будем называть множество всех формул алфавита $\langle V, \Sigma \rangle$. Функцию $Cn : 2^{\mathcal{L}} \to 2^{\mathcal{L}}$ будем называть *операцией присоединения следствий* над языком $\mathcal{L}$, или, для краткости (и экономии бумаги), просто *следованием*, если для любых $X, Y \in 2^{\mathcal{L}}$

A1. $X \subseteq Cn(X)$,

A2. $Cn(X) = Cn(Cn(X))$,

A3. $X \subseteq Y \Rightarrow Cn(X) \subseteq Cn(Y)$.

Подстановкой будем называть отображение $\varepsilon : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, которое является продолжением отображения $\varepsilon : V \to \mathcal{L}$. Обозначим через $\mathbf{E}$ множество всех подстановок. Следование Cn будем называть *структурным*, если для любой подстановки ε и любого множества формул X выполняется условие

A4. $\varepsilon(Cn(X)) \subseteq Cn(\varepsilon(X))$.

Пару $\langle \mathcal{L}, Cn \rangle$, где Cn — структурная операция присоединения следствий, будем называть *пропозициональной дедуктивной системой*. Поскольку не пропозициональных дедуктивных систем мы рассматривать не будем, то далее пропозициональные дедуктивные системы будем называть дедуктивными системами. Если следование дедуктивной системы обладает некоторым свойством, то будем говорить, что этим свойством обладает дедуктивная система.

Следование будем называть *финитарным*, если для любого множества X верно, что $Cn(X) = \bigcup_{Y \subseteq X} Cn(Y)$, где Y — конечное множество. Следование будем называть *стандартным*, если оно структурно и финитарно.

Любое подмножество $\rho \subseteq 2^{\mathcal{L}} \times \mathcal{L}$ будем называть *правилом*, а любой элемент этого подмножества будем называть *схемой*. Правило ρ называем *структурным*, если для любого множества формул X и любой подстановки ε верно, что если $\langle X, \alpha\rangle \in \rho$, то $\langle \varepsilon(X), \varepsilon(\alpha)\rangle \in \rho$. Правило ρ будем называть *финитарным*, если для любой схемы $\langle X, \alpha\rangle \in \rho$ верно, что множество X конечно. Будем говорить, что правило ρ *порождено схемой* $\langle X, \alpha\rangle$, если $\rho = \{\langle \varepsilon(X), \varepsilon(\alpha)\rangle \mid \varepsilon \in \mathbf{E}\}$. Такое правило будем обозначать $\rho_{X/\alpha}$ (или, если это не будет вызывать недоразумений, просто X/α) и называть *секвенцией*. Секвенцию $\rho_{\varnothing/\alpha}$ будем называть *аксиоматическим правилом*, а элементы этого правила будем называть *аксиомами*. Правило будем называть *стандартным*, если оно является финитарной секвенцией, поэтому такое правило будем называть также *стандартной секвенцией*.

Множество $X \in 2^{\mathcal{L}}$ будем называть замкнутым относительно правила ρ, если для любого $Y \subseteq X$ и для любого $\alpha \in \mathcal{L}$ верно, что если $\langle Y, \alpha\rangle \in \rho$, то и $\alpha \in X$. Будем говорить, что следование C *базируется на множестве правил вывода* R (символически обозначать $C = Cn_R$), если для любого $X \in 2^{\mathcal{L}}$ множество $C(X)$ является наименьшим множеством, содержащим X и замкнутым относительно каждого правила из R. Множество правил R будем называть в этом случае *базисом следования* C. Базис R следования C будем называть *секвенциальным* (*стандартным*), если он состоит из секвенций (стандартных секвенций); мы также будем называть его *базисом дедуктивной системы* $\langle \mathcal{L}, C\rangle$.

В работе [3] доказано, что *следование* Cn *является структурным (стандартным) тогда и только тогда, когда оно имеет секвенциальный (стандартный) базис.*

Два базиса R и R' будем называть *эквивалентными* в том случае, если $Cn_R = Cn_{R'}$. Известно [3], что для каждого следования C существует такое множество правил вывода R, что $C = Cn_R$. Введем следующее обозначение: $Rl(C) = \bigcup\{Q : Cn_Q = C\}$. Элементы множества $Rl(C)$ будем называть правилами следования C. Очевидно, что множество $Rl(C)$ образует базис следования C. Для множества правил вывода R правила из множества $Rl(Cn_R)$ будем называть *правилами выводимыми из множества правил* R.

Множество правил вывода R будем называть *независимым базисом* следования C (дедуктивной системы $\langle \mathcal{L}, C\rangle$), если R является базисом C и для любого правила $\rho \in R$ верно, что $\rho \notin Rl(Cn_{R\setminus\{\rho\}})$. Очевидно, что объединение произвольного множества структурных (финитарных) правил является структурным (финитарным) правилом. Следовательно, если для некоторого структурного (финитарного) следования C мы объединим все структурные (финитарные) правила из $Rl(C)$, то получим структурное (финитарное) правило, которое будет являться независимым базисом этого следования. Таким образом, вопрос о независимости имеет смысл ставить только для секвенциальных базисов. Мы будем рассматривать вопрос о независимости только стандартных базисов. Поэтому далее везде секвенция — это финитарнная секвенция, а дедуктивная система — это стандартная дедуктивная система.

2 Теорема о компактности

Здесь мы докажем теорему о дедуктивной компактности, т. е. о том, что в дедуктивных системах правила выводятся из конечного числа посылок. Этот факт доказан для многих частных случаев дедуктивных систем классических, интуиционистских и других логик. Однако автору не встречалось единое доказательство дедуктивной компактности, проведенное для любых дедуктивных систем. Вполне возможно, что это лишь следствие его недостаточной настойчивости в литературных штудиях.

Всякая секвенция $\rho = \alpha_1, \ldots, \alpha_n/\alpha$ определяет частичную функцию $f_\rho : \mathcal{P}_n(\mathcal{L}) \times \mathbf{E} \to \mathcal{L}$, где $\mathcal{P}_n(\mathcal{L})$ — это множество всех n-элементных подмножеств языка $\mathcal{L}$. Поскольку сложилась традиция посылки секвенции записывать в виде списка, то нам будет удобнее сопоставить этой функции функцию $f_\rho : \mathcal{L}^n \times \mathbf{E} \to \mathcal{L}$ такую, что $f_\rho(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \iota) = \alpha$ (где ι — тождественная подстановка) и для любой подстановки ε

$$\varepsilon f_\rho(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \iota) = f_\rho(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \varepsilon) = f_\rho(\varepsilon\alpha_1, \ldots, \varepsilon\alpha_n, \iota) = \varepsilon\alpha.$$

Для этой функции верно, что для любой перестановки σ последовательности $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

$$\langle(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \varepsilon), \varepsilon\alpha\rangle \in f_\rho \Leftrightarrow \langle(\sigma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \varepsilon), \varepsilon\alpha\rangle \in f_\rho.$$

Множество всех таких функций, порожденных секвенциями языка $\mathcal{L}$, обозначим $F(\mathcal{L})$, а его подмножество, состоящее из функций $f : \mathcal{L}^n \times \mathbf{E} \to \mathcal{L}$, обозначим $F_n(\mathcal{L})$.

Будем рассматривать слова в алфавите, состоящем из следующих множеств:

- $\mathcal{SC} = \{f_1^0, f_2^0, \ldots, f_1^n, \ldots\}$ — множество функциональных символов, где верхний индекс i означает, что соответствующий функциональный символ имеет местность $i+1$;
- $\mathcal{F} = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ — множество символов формульных переменных;
- $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n, \ldots\}$ — множество символов подстановок;
- $\{(,)\}$ — множество вспомогательных символов.

Определим по индукции множество *термов вывода* $\mathcal{T}$:

- если $x \in \mathcal{F}$, то $x \in \mathcal{T}$;
- для любого $n \geq 0$ верно, что если $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$, $e \in \mathcal{E}$ и $f^n \in \mathcal{SC}$, то $f^n(t_1, \ldots, t_n, e) \in \mathcal{T}$.

Для термов $t_1, \ldots, t_n$ через $\mathcal{SC}(t_1, \ldots, t_n)$ будем обозначать множество всех функциональных символов, через $\mathcal{F}(t_1, \ldots, t_n)$ — множество всех символов переменных, а через $\mathcal{E}(t_1, \ldots, t_n)$ — множество всех символов подстановок, входящих в эти термы.

Интерпретацией термов будем называть взаимнооднозначное вложение I множества символов, входящих в эти термы, которое удовлетворяет следующим условиям:

- если $x \in \mathcal{F}$, то $I(x) = \alpha \in \mathcal{L}$;
- если $f^n \in \mathcal{SC}$, то $I(f^n) \in F_n(\mathcal{L})$;
- если $e \in \mathcal{E}$, то $I(e) = \varepsilon \in \mathbf{E}$;
- для любого $n \geq 0$ верно, что если $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$, $e \in \mathcal{E}$ и $f^n \in \mathcal{SC}$, то $I(f^n(t_1, \ldots, t_n, e)) = I(f^n)(I(t_1), \ldots, I(t_n), I(e))$.

Формулу α будем называть *значением терма* t (или его *интерпретантой*) при интерпретации I, если $I(t) = \alpha$. Для произвольного множества символов S и интерпретации I через $I(S)$ будем обозначать множество интерпретант символов из S.

Пусть Q — некоторое множество секвенций. Введем операцию $T_Q : \mathcal{P}(L) \to \mathcal{P}(L)$ следующим образом: $\alpha \in T_Q(X)$ если и только если существует такой терм вывода t и такая интерпретация I терма t, что при ней все формульные переменные этого терма принимают значения из X, все его функциональные символы принимают значения из Q и $\alpha = I(t)$. Операцию T_Q мы будем называть *операцией термального замыкания по множеству секвенций* Q.

Следующая лемма имеет техническое значение.

ЛЕММА 1. *Пусть* $t_1, \ldots, t_n$ *— термы,* $I_1, \ldots, I_n$ *— интерпретации такие, что* $\alpha_1 = I_1(t_1), \ldots, \alpha_n = I_n(t_n)$. *Тогда существуют термы* $t'_1, \ldots, t'_n$ *и интерпретация* I *такие, что* $\alpha_1 = I(t'_1), \ldots, \alpha_n = I(t'_n)$, *причем множество значений интерпретации* I *является объединением множеств значений интерпретаций* $I_1, \ldots, I_n$.

Доказательство. Если термы $t_1, \ldots, t_n$ не содержат вхождения одинаковых символов, кроме вспомогательных, или одинаковые символы в интерпретациях $I_1, \ldots, I_n$ интерпретируются одинаково, то полагаем $I = \bigcup\limits_{i=1}^{n} I_i$ и $t'_i = t_i$. Пусть некоторый символ l в интерпретациях $I_1, \ldots, I_n$ имеет m различных значений $(m > 1)$. Тогда заменяем каждое его вхождение в каждый из термов на один из символов $l'_1, \ldots, l'_m$ из того же множества символов алфавита, которому принадлежит l, не встречающихся ни в одном терме $t_1, \ldots, t_n$ (если $l \in \mathcal{SC}$, то местность новых символов совпадает с местностью l). Все вхождения l, имеющие одинаковое — скажем, j-ое значение, — заменяем символом l'_j. Символ l'_j интерпретируем так же, как и тот, который заменяли, т. е. полагаем $I'_i(l'_j) = I_i(l)$.

Также может оказаться, что входящие в разные термы разные символы, принадлежащие одному и тому же множеству символов алфавита, в разных интерпретациях принимают одно и то же значение. Тогда мы заменяем все вхождения таких символов на один и тот же символ и задаем новые интерпретации I''_i так, что каждая из них присваивает этому символу значение замененных символов.

В результате все одинаковые символы термов $t''_1, \ldots, t''_n$ при интерпретациях $I''_1, \ldots, I''_n$ будут интерпретироваться одинаково.

Тогда полагаем $I = \bigcup\limits_{i=1}^{n} I_i''$ и $t_i' = t_i''$. Q.E.D.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Для любого множества секвенций Q верно, что $T_Q = Cn_Q$.*

Доказательство. 1) Покажем, что T_Q является операцией присоединения следствий.

Так как формульная переменная является термом вывода, то $X \subseteq T_Q(X)$. Покажем, что $T_Q(T_Q(X)) = T_Q(X)$. Включение $T_Q(X) \subseteq T_Q(T_Q(X))$ выполняется по определению операции термального замыкания, поэтому нам достаточно доказать, что $T_Q(T_Q(X)) \subseteq T_Q(X)$.

Пусть $\alpha \in T_Q(T_Q(X))$. Тогда существует такой терм t и такая интерпретация I, что $I(t) = \alpha$, $I(\mathcal{SC}(t)) \subseteq Q$ и $I(\mathcal{F}(t)) \subseteq T_Q(X)$. Индукцией по построению терма докажем, что $\alpha \in T_Q(X)$.

Пусть $t = x_i$, тогда $I(x_i) = \alpha \in T_Q(X)$.

Пусть $t = f^n(t_1, \ldots, t_n, e)$ и верно, что существуют термы $t_1', \ldots, t_n'$ и их интерпретации $I_1, \ldots, I_n$ такие, что для любого i $(1 \leq i \leq n)$ $I_i(t_i') = I(t_i)$, причем $I_i(\mathcal{SC}(t_i')) \subseteq Q$, а $I_i(\mathcal{F}(t_i')) \subseteq X$. Тогда, в силу леммы 6, существуют термы $t_1'', \ldots, t_n''$ и интерпретация I' такие, что для любого i $(1 \leq i \leq n)$ $I_i(t_i') = I'(t_i'')$, причем область значений интерпретации I' совпадает с объединением областей значений интерпретаций $I_1, \ldots, I_n$. Построим интерпретацию I'' следующим образом. Она совпадает с I' для всех символов из термов $t_1'', \ldots, t_n''$. Пусть $g^n \in \mathcal{SC}$, и $g^n \notin \mathcal{SC}(t_1'', \ldots, t_n'')$, и $e_k \in \mathcal{E}$, и $e_k \notin \mathcal{E}(t_1'', \ldots, t_n'')$, тогда положим $I''(g^n) = I(f^n)$ и $I''(e_k) = I(e)$. Рассмотрим значение терма $t' = g^n(t_1'', \ldots, t_n'', e_k)$ при интерпретации I''.

$$\begin{aligned}
I''(t') &= I''(g^n(t_1'', \ldots, t_n'', e_k)) = \\
&= I''(g^n)(I''(t_1''), \ldots, I''(t_n''), I''(e_k)) = \\
&= I(f^n)(I'(t_1''), \ldots, I'(t_n''), I(e)) = \\
&= I(f^n)(I_1(t_1'), \ldots, I_n(t_n'), I(e)) = \\
&= I(f^n)(I(t_1), \ldots, I(t_n), I(e)) = \\
&= I(t) = \alpha.
\end{aligned}$$

И при этом $I''(\mathcal{SC}(t')) \subseteq Q$ и $I''(\mathcal{F}(t')) \subseteq X$. Значит, $\alpha \in T_Q(X)$.

Теперь покажем, что если $Y \subseteq X$, то $T_Q(Y) \subseteq T_Q(X)$. Если $\alpha \in T_Q(Y)$, то существуют такой терм t и интерпретация I, что $I(t) = \alpha$ и $I(\mathcal{F}(t)) \subseteq Y$. Тогда $I(\mathcal{F}(t)) \subseteq X$, и значит, $\alpha \in T_Q(X)$.

2) Докажем, что для любого множества формул X имеет место следующее включение: $T_Q(X) \subseteq Cn_Q(X)$. Доказывать будем индукцией по строению терма.

Если формула $\alpha \in X$, то очевидно, что она принадлежит обоим множествам. Рассмотрим случай, когда $\alpha \notin X$.

Пусть $\alpha \in T_Q(X)$, поскольку существует интерпретация I терма $f^n((t_1, \dots, t_n), e)$ (где $t_1, \dots, t_n$ — термы) такая, что $I(f^n) \in Q$ и для любого i, $I(t_i) \in Cn_Q(X)$ (по индукционному предположению). Следовательно, во множестве Q существует такая секвенция $\rho = \gamma_1, \dots, \gamma_n/\beta$, что для некоторой подстановки $\varepsilon = I(e)$ выполнено, что $\varepsilon\beta = \alpha$ и для любого i, $\varepsilon\gamma_i = I(t_i) \in Cn_Q(X)$. Множество $Cn_Q(X)$ замкнуто относительно секвенции ρ, поэтому из того, что $\langle\{\varepsilon\gamma_1, \dots, \varepsilon\gamma_n\}, \varepsilon\beta\rangle \in \rho$, и для любого i верно, что $\varepsilon\gamma_i \in Cn_Q(X)$, следует, что $\alpha \in Cn_Q(X)$.

3) Докажем, что для любого множества формул X верно, что множество $T_Q(X)$ замкнуто относительно любого правила из Q.

Пусть в Q существует такая секвенция $\varnothing/\beta$, что для некоторой подстановки ε $\varepsilon\beta = \alpha$. Тогда существует интерпретация I терма $f^0(e)$ такая, что $I(f^0) = \varnothing/\beta$, $I(e) = \varepsilon$, и значит, формула $\alpha = I(f^0(e))$. Следовательно, $\alpha \in T_Q(X)$.

Пусть во множестве Q существует секвенция $\rho = \gamma_1, \dots, \gamma_n/\beta$ такая, что для некоторой подстановки ε выполнено, что $\varepsilon\beta = \alpha$ и для любого i $\varepsilon\gamma_i \in T_Q(X)$. Следовательно, существуют термы $t_1, \dots, t_n$ и их интерпретации $I_1, \dots, I_n$ такие, что верны равенства $\varepsilon\gamma_1 = I_1(t_1), \dots, \varepsilon\gamma_n = I_n(t_n)$, причем функциональные символы термов интерпретируются элементами множества Q, а символы формульных переменных принимают значения из множества X. Тогда, в силу леммы 6, существуют термы $t'_1, \dots, t'_n$ и интерпретация I' такие, что $\varepsilon\gamma_1 = I'(t'_1), \dots, \varepsilon\gamma_n = I'(t'_n)$, причем область значений интерпретации I' совпадает с объединением областей значений интерпретаций $I_1, \dots, I_n$. Если секвенция ρ входит в область значений интерпретации I', то пусть f^n — функциональный символ такой, что $I'(f^n) = \rho$. Если секвенция ρ не входит в область значений I', то пусть f^n — функциональный символ, не входящий в термы $t'_1, \dots, t'_n$, и пусть I — такая интерпретация, что она совпадает с I' для всех символов из термов $t'_1, \ldots, t'_n$, а также $I(f^n) = \rho$ и $I(e) = \iota$. Тогда $\varepsilon\gamma_1 = I(t'_1)$, $\ldots$, $\varepsilon\gamma_n = I(t'_n)$, и значит,

$$I(f^n(t'_1, \ldots, t'_n, e)) = I(f^n)(I(t'_1), \ldots, I(t'_n), I(e)) =$$
$$= f_\rho(\varepsilon\gamma_1, \ldots, \varepsilon\gamma_n, \iota) = f_\rho(\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \varepsilon) = \varepsilon\beta = \alpha.$$

Значит, $\alpha \in T_Q(X)$.

Таким образом, T_Q — это операция следования, замкнутая относительно всех правил из Q. Причем, в силу определения (стр. 80), для любого множества формул X множество $Cn_Q(X)$ является минимальным. Тогда из того, что $T_Q(X) \subseteq Cn_Q(X)$, следует, что $T_Q(X) = Cn_Q(X)$, и значит, $T_Q = Cn_Q$. Q.E.D.

Известно, что верно следующее утверждение ([3]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Правило $\rho \in Rl(C)$, если и только если для любых X и α верно, что если $(X, \alpha) \in \rho$, то $\alpha \in C(X)$.*

Исходя из этого, несложно доказать следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Для любого множества секвенций Q верно, что секвенция $R = X/\alpha \in Rl(Cn_Q)$ тогда и только тогда, когда существуют такие терм t и его интерпретация I, что все функциональные символы терма интерпретируются элементами множества Q, а все формульные переменные интерпретируются формулами из X и $\alpha = I(t)$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Как следует из утверждения 3 и определения секвенции, $\rho = X/\alpha \in Rl(Cn_Q)$ тогда и только тогда, когда для любой подстановки ε верно, что $\varepsilon\alpha \in Cn_Q(\varepsilon X) = T_Q(\varepsilon X)$. Значит, для тождественной подстановки имеем, что $\alpha \in T_Q(X)$, а по определению термального замыкания это и означает, что такой терм и интерпретация существуют.

($\Leftarrow$) Пусть такой терм и такая интерпретация существуют. Тогда $\alpha \in T_Q(X) = Cn_Q(X)$. Докажем, что в этом случае для любой подстановки ε $\varepsilon\alpha \in T_Q(\varepsilon X) = Cn_Q(\varepsilon X)$. Если $\alpha \in X$, то это очевидно.

Допустим, что $\alpha \notin X$. Пусть терм t имеет вид $f^n(t_1, \ldots, t_n, e)$ (где $t_1, \ldots, t_n$ — термы) и существует интерпретация I такая, что $I(t) = \alpha$, $I(\mathcal{F}(t)) \subseteq X$ и $I(f^n) \in Q$. Следовательно, во множестве Q существует такая секвенция $\rho = \gamma_1, \ldots, \gamma_n/\beta$, что для некоторой подстановки $\varepsilon_1 = I(e)$ выполнено, что для любого i, где $1 \leq i \leq n$, $\varepsilon_1\gamma_i = I(t_i) \in Cn_Q(X)$ и $\varepsilon_1\beta = \alpha \in Cn_Q(X)$. Тогда для любого i и для любой подстановки ε $\varepsilon I(t_i) \in Cn_Q(\varepsilon X)$ по индукционному предположению. Так как ρ — секвенция, то из того, что $\langle\{\varepsilon_1\gamma_1, \ldots, \varepsilon_1\gamma_n\}, \varepsilon_1\beta\rangle \in \rho$, следует, что для любой подстановки ε имеет место, что $\langle\{\varepsilon\varepsilon_1\gamma_1, \ldots, \varepsilon\varepsilon_1\gamma_n\}, \varepsilon\varepsilon_1\beta\rangle \in \rho$. Так как $\rho \in Q$ и $\varepsilon I(t_i) = \varepsilon\varepsilon_1\gamma_i \in Cn_Q(X)$, то отсюда следует, что $\varepsilon\varepsilon_1\beta \in Cn_Q(\varepsilon X)$, значит, $\varepsilon\alpha \in Cn_Q(\varepsilon X)$. Q.E.D.

Как следствие получаем теорему о компактности.

ТЕОРЕМА 5. *(О компактности) Пусть стандартная секвенция ρ выводима из множества стандартных секвенций R, тогда существует такое конечное подмножество $Q \subseteq R$, что ρ выводимо из Q.*

Доказательство. Если $\rho \in R$, то это очевидно.

Пусть $\rho \notin R$. Если секвенция ρ выводима из множества секвенций R, то, в силу предыдущего утверждения, существует соответствующий терм t и интерпретация I. Пусть множество $Q = \{\mu \in R | \exists f \in \mathcal{SC}(t)(\mu = I(f))\}$, тогда ρ выводимо из Q и $Q \subseteq R$. Так как число различных функциональных символов в терме конечно, то множество Q конечно. Q.E.D.

3 Независимая аксиоматизируемость и свойства решетки дедуктивных систем

Обозначим через $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ множество всех операций присоединения следствий языка $\mathcal{L}$. Определим на этом множестве отношение $\leq$ следующим образом. Положим, что $C_1 \leq C_2$, если и только если для любого множества формул X верно, что $C_1(X) \subseteq C_2(X)$. Если $C_1 \leq C_2$, то будем говорить, что C_1 *не сильнее*, чем C_2, а C_2 *не слабее*, чем C_1. При этом верно следующее утверждение ([3]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. *Произвольное следование C_1 не сильнее, чем произвольное следование C_2, если и только если верно, что $Rl(C_1) \subseteq Rl(C_2)$.*

Нетрудно заметить, что введенное выше отношение $\leq$, является отношением частичного порядка.

Напомним некоторые основные понятия теории частично упорядоченных множеств. Пусть на множестве A определен частичный порядок $\leq$. Подмножество $B \subseteq A$ будем называть *цепью*, если верно, что $\forall x, y \in A((x \leq y \vee y \leq x)$. Элемент $x \in A$ будем называть *верхней* (*нижней*) *гранью множества* B, если верно, что $\forall y \in B(y \leq x)(\forall y \in B(x \leq y))$. Элемент $x \in A$ будем называть *точной верхней гранью* (*супремумом*) *множества* B (соответственно, *точной нижней гранью* (*инфинумом*) *множества* B), если он является наименьшей (соответственно, наибольшей) верхней (нижней) гранью этого множества, т. е. для x верно, что $\forall z \in A(\forall y \in B(y \leq z) \rightarrow x \leq z)$ (соответственно, $\forall z \in A(\forall y \in B(z \leq y) \rightarrow z \leq x))$. Элемент $x \in B \subseteq A$ будем называть *максимальным* (*минимальным*) *во множестве* B, если верно что, $\forall y \in B(y \neq x \rightarrow x \nleq y)(\forall y \in B(y \neq x \rightarrow y \nleq x))$. В цепи ее максимальный (минимальный) элемент единственен и является ее супремумом (инфинумом). Частично упорядоченное множество будем называть *полной решёткой*, если любое его подмножество имеет инфинум и супремум.

Обозначим через $\mathcal{C}^s_{\mathcal{L}}$ частично упорядоченное множество всех стандартных следований данного языка $\mathcal{L}$. Известно, что оно образует полную решетку ([4]). Порядок $\leq$, введенный на следованиях фиксированного языка, индуцирует изоморфный порядок на множестве $D^s_{\mathcal{L}}$ всех дедуктивных систем данного языка. А именно считаем, что $\langle \mathcal{L}, C_1 \rangle \leq \langle \mathcal{L}, C_2 \rangle$, если и только если $C_1 \leq C_2$. Причем решетка $D^s_{\mathcal{L}}$ изоморфна решетке $\mathcal{C}^s_{\mathcal{L}}$, поэтому в дальнейшем мы их различать не будем.

Наше доказательство будет опираться на положение, известное как *лемма Цорна*. Будем говорить, что элемент $x \in A$ *мажорируется* элементом $y \in A$, если $x \leq y$.

ЛЕММА 7. *(Лемма Цорна) Каждый элемент непустого частично упорядоченного множества A, в котором каждая цепь B имеет верхнюю границу (говорят, что A индуктивно упорядочено), мажорируется некоторым максимальным во множестве A элементом.*

Положим, что $a < b \rightleftharpoons a \leq b \wedge a \neq b$. *Интервалом* частично упорядоченного множества A, заданным элементами $a, b \in A$, будем называть множество $(a, b) = \{x \in a \mid a < x < b\}$. Элемент $b \in A$ будем называть *непосредственным предшественни-*

ком элемента $a \in A$, если $a < b$ и $(a, b) = \varnothing$. Следование будем называть *финитно базируемым*, если оно имеет конечный базис.

ТЕОРЕМА 8. *(Односторонний критерий независимой базируемости) Пусть следование C_2 имеет независимый базис. Тогда для любого интервала (C_1, C_2) решётки $\mathcal{C}^s_{\mathcal{L}}$ верно, что если следование C_1 финитно базируемо, то следование C_2 имеет в этом интервале непосредственного предшественника.*

Доказательство. Пусть R — независимый базис следования C_2 и Q — конечный базис следования C_1. Тогда, в силу утверждения 6, верно, что $Q \subseteq Rl(C_2)$. По теореме о компактности, всякая секвенция множества Q выводима из некоторого конечного подмножества секвенций $S \subseteq R$. Положим, что множество $R \setminus S = \{\rho_1, \ldots, \rho_n, [\ldots]\}$. Обозначим через T_i следование с базисом $S \cup \{\rho_1, \ldots, \rho_{i-1}, \rho_{i+1}, \ldots, \rho_n, [\ldots]\}$. Если интервал (T_i, C_2) пуст, то следование T_i и является непосредственным предшественником следования C_2. Если же этот интервал не пуст, то всякая цепь этого интервала входит в состав некоторой максимальной в этом интервале цепи. В силу полноты решетки для любой максимальной цепи существует супремум всех ее элементов — следование C_{max}, — базис которого является объединением базисов всех элементов цепи. Таким образом, если секвенция ρ_i входит хоть в какой-нибудь базис следования C_{max}, то она выводима из некоторого конечного множества секвенций, входящих в базис некоторого следования C из данной максимальной цепи интервала (T_i, C_2). Но в этом случае $C = C_2$, и значит, $C_2 \in (T_i, C_2)$. Противоречие. Таким образом, $\rho_i \notin Rl(C_{max})$, и значит, $C_{max} < C_2$.

Докажем, что интервал $(C_{max}, C_2) = \varnothing$. Допустим, что C_{max} не является непосредственным предшественником следования C_2, т. е. существует следование C, такое, что $C_{max} < C < C_2$. В этом случае цепь, имеющая своим супремумом следование C_{max}, не является максимальной. Q.E.D.

4 Абсолютная независимая базируемость и относительная независимая базируемость

Базис следования будем также называть *абсолютным базисом* этого следования. Множество секвенций Q будем называть *от-*

носительным базисом следования C_2 над следованием C_1, если $C_2 = Cn_{Q \cup Rl(C_1)}$. Заметим, что если множество правил Q является базисом C_2 над C_1 и множество правил R является базисом следования C_1, то верно, что $C_2 = Cn_{Q \cup R}$. Независимое множество секвенций будем также называть *абсолютно независимым*. Множество секвенций Q будем называть *независимым над множеством правил R*, если для любой секвенции $\rho \in Q$ верно, что $\rho \notin Rl(Cn_{R \cup (Q \setminus \{\rho\})})$. Множество секвенций Q будем называть *независимым над следованием C*, если для любой секвенции $\rho \in Q$ верно следующее: $\rho \notin Rl(Cn_{Rl(C) \cup (Q \setminus \{\rho\})})$. Заметим, что и в этом случае, если множество правил R является базисом следования C и множество правил Q независимо над C, то оно независимо и над множеством R. Абсолютный абсолютно независимый базис следования будем называть его *абсолютно независимым базисом*. Множество секвенций Q будем называть *относительным независимым базисом следования C_2 над следованием C_1*, если множество Q является базисом следования C_2 над C_1 и оно независимо над C_1. Рассмотрим вопрос о взаимосвязи абсолютной и относительной независимыми базируемостями.

Нетрудно заметить, что верно следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. *Если следование C_1 финитно базируемо и следование C_2 имеет над C_1 независимый базис, то C_2 является абсолютно независимо базируемым.*

Доказательство. Пусть множество секвенций R является финитным базисом следования C_1 и не пустое множество секвенций Q образует относительный независимый базис следования C_2 над C_1. Поскольку $C_1 < C_2$, то $R \subset Rl(Cn_{R \cup Q})$. Как замечено выше, $C_2 = Cn_{Q \cup R}$. Рассмотрим множество секвенций $S = \{\rho \mid \rho \in R \wedge \rho \notin Rl(Cn_{Q \cup R \setminus \{\rho\}})\}$. В силу того, что $S \cup Q \subseteq R \cup Q$, имеем включение $Cn_{S \cup Q} \subseteq Cn_{R \cup Q}$. С другой стороны, все правила из множества $R \cup Q \in Cn_{S \cup Q}$, и следовательно верно, что $Cn_{R \cup Q} \subseteq Cn_{S \cup Q}$. Значит, $Cn_{S \cup Q} = Cn_{R \cup Q} = C_2$. Таким образом, множество $S \cup Q$ — абсолютный базис следования C_2.

Докажем независимость этого множества. Допустим, что некоторая принадлежащая ему секвенция ρ выводима из множества секвенций $(S \cup Q) \setminus \{\rho\}$. Так как $Cn_{S \cup Q} = Cn_{R \cup Q}$, получаем, что

$Cn_{(S\cup Q)\setminus\{\rho\}} = Cn_{(R\cup Q)\setminus\{\rho\}}$. Следовательно, $\rho \in Rl(Cn_{(R\cup Q)\setminus\{\rho\}})$. Тогда секвенция $\rho \notin S$, в силу определения этого множества, и $\rho \notin Q$, в силу независимости последнего над C_1. Из того, что получено противоречие, следует, что наше предположение о выводимости секвенции ρ неверно.

Таким образом, множество секвенций $S \cup Q$ является абсолютно независимым базисом следования C_2. Q.E.D.

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. *Если C_2 — абсолютно независимо базируемое следование и для финитно базируемого следования C_1 верно, что оно не сильнее следования C_2, то C_2 независимо базируемо над C_1.*

Доказательство. Если $C_1 = C_2$, то утверждение очевидно. Пусть $C_1 \neq C_2$ и конечное множество секвенций R — это базис следования C_1, а абсолютно независимое множество секвенций Q — это базис следования C_2.

1) Допустим, что множество Q конечно. Рассмотрим множество секвенций $P = Q \setminus Rl(C_1)$. Если P независимо над C_1, то P — искомый базис. Если же это не так, то определим следующую последовательность множеств. Перенумеруем все секвенции из списка P натуральными числами. Допустим, что список $P = \langle \rho_0, \dots \rho_{m-1} \rangle$. Положим, что $S_0 = P$. Далее, для любого натурального i положим

$$S_{i+1} = \begin{cases} S_i \setminus \{\rho_i\}, & \text{если } \rho_i \in Rl(Cn_{R\cup(S_i\setminus\{\rho_i\})}), \\ S_i, & \text{если } \rho_i \notin Rl(Cn_{R\cup(S_i\setminus\{\rho_i\})}). \end{cases}$$

Множество S_m будет независимым над C_1 и не будет пустым, так как $C_1 \neq C_2$. Все секвенции множества Q выводимы из $S_m \cup R$, и значит, $C_2 \leq Cn_{S_m \cup R}$. Так как $C_1 \leq C_2$, то $S_m \cup R \subseteq Rl(C_2)$, и значит, $Cn_{S_m\cup R} \leq C_2$. Таким образом, $C_2 = Cn_{S_m \cup R}$. Следовательно, секванции списка S_m будут образовывать искомый базис.

2) Пусть множество Q бесконечно. В силу теоремы о компактности и конечности множества R существует такое минимальное по включению конечное множество секвенций P, что $P \subset Q$ и $R \subseteq Rl(Cn_P)$, и таким образом, $C_1 \leq Cn_P$. Множество секвенций $T = Q \setminus P$ независимо над C_1, так как это множество

независимо над Cn_P, а $C_1 \leq Cn_P$. Таким образом, T — независимый базис следования C_2 над Cn_P. Если $Cn_P = C_1$, то T — искомый базис.

Пусть $Cn_P \neq C_1$. Рассмотрим множество $P \cup T = Q$. Допустим, что оно не является независимым над C_1, т. е. хотя бы одна секвенция, скажем ρ, выводима из остальных. Тогда для этой секвенции верно одно из двух: $\rho \in T$ или $\rho \in P$.

Пусть $\rho \in T$. Тогда $\rho \in Rl(Cn_{(T \setminus \{\rho\}) \cup P \cup Rl(C_1)})$. В силу того, что $R \subseteq Rl(Cn_P)$, получаем, что $\rho \in Rl(Cn_{(T \setminus \{\rho\}) \cup Rl(Cn_P)})$. Это противоречит абсолютной независимости Q. Следовательно, $\rho \notin T$, и значит, $\rho \in P$. Тогда положим $S_0 = P$. В силу конечности множества P мы можем построить систему множеств $S_0, \ldots, S_n$, аналогичную той, которая построена в пункте 1) данного доказательства. Множество $S_n \cup T$ будет независимым над C_1. Так как все секвенции из $(P \setminus S_n) \subseteq Rl(Cn_{S_n \cup T \cup R})$, то $C_2 = Cn_{S_n \cup T \cup Rl(C_1)}$. Таким образом, множество $S_n \cup T$ и будет являться искомым независимым базисом C_2 над C_1. Q.E.D.

Из утверждений 9 и 10 непосредственно следует

ТЕОРЕМА 11. *Следование C_2 имеет абсолютный независимый базис тогда и только тогда, когда оно имеет независимый базис над любым финитно базируемым следованием, которое не сильнее C_2.*

Таким образом, свойства абсолютной независимой базируемости и относительной независимой базируемости над финитно базируемыми дедуктивными системами оказываются совпадающими.

5 Заключение (дедуктивные системы и логики)

Логикой языка $\mathcal{L}$ будем называть множество формул, замкнутое относительно любой подстановки и некоторого множества секвенций, называемых *постулированными* для данной логики правилами вывода. Рассмотрим взаимосвязь между так понимаемыми логиками и дедуктивными системами. Известно, что для всякой структурной операции присоединения следствий C множество $C(\varnothing)$ является замкнутым относительно любой подстановки, и значит, является логикой в вышеуказанном смысле. Постулированными для этой логики правилами вывода могут считаться секвенции из любого базиса следования C. Эту логику будем называть *базовой логикой* следования C.

Насколько известно автору, вопросы о взаимосвязи свойств дедуктивных систем и свойств их базовых логик недостаточно изучены. Касается это и свойства независимости.

Так, неизвестно, верно ли, что *если следование имеет абсолютно независимый базис, то и его базовая логика независимо аксиоматизируема.* Не исследована и верность обратного утверждения, не говоря уже о взаимосвязи свойств относительных аксиоматизируемости и базируемости. Таким образом, представляется интересным изучить взаимосвязи между свойствами логик и дедуктивных систем, поскольку это позволит связать между собой оба «дополнительных» подхода к описанию логики.

Литература

[1] *Czelakowski J. and Malinowski G.* Key Notions of Tarski's Methodology of Deductive Systems // Stadia Logica. 1985. V. 44. №4. P. 321-351.

[2] *Карпенко А.С.* Предмет логики в свете основных тенденций ее развития // Логические исследования. Вып. 11. 2004. С. 149-171.

[3] *Wojcicki R.* Matrix Approach In Methodology Of Sentential Calculi // Studia Logica. 1973. V. 32. P. 7-37.

[4] *Wojcicki R.* Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations. Dordrecht: Kluwer, 1988.