Интуиционистская арифметика с принципами Маркова и P

В. Х. Хаханян

abstract. We consider the theory HA+M+P, where M is Markov's principle (any, see [1]), P is the following, classically true, principle $(\neg\varphi \to \exists x\psi(x)) \to \exists x(\neg\varphi \to \psi(x))$ (alsow see [1]). We prove that such theory has numerical existentiality (and, of course, disjunctivity) and get some corollaries from this fact.

В [1] были рассмотрены следующие расширения интуиционистской арифметики: традиционный конструктивизм А.А. Маркова и антитрадиционный (нетрадиционный) конструктивизм. Было доказано, что оба расширения интуиционистской арифметики непротиворечивы относительно базисной системы интуиционистской арифметики с добавленным к ней в первом случае принципом Маркова (для простоты можно метаматематически использовать просто формальную арифметику Пеано FA). Оба расширения обладают свойством нумерической экзистенциальности и дизъюнктивности (см. [1]). Если рассмотреть интуиционистскую арифметику с принципами Чёрча (любым), Маркова (любым) и P, то такая теория уже будет противоречивой (см. [1]). Поэтому представляет интерес исследовать расширение интуиционистской арифметики с принципами Маркова и P. Ниже будет приведена модель типа реализуемости для доказательства свойств дизъюнктивности и экзистенциальности теории HA+M+P.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть φ есть формула языка арифметики. Определим понятие $r\varphi$ (формула φ реализуема) индукцией по построению формулы (это понятие было введено С.К. Клини, см., например, [2]).

1. $r(t = q) \rightleftharpoons t = q$ истинно в стандартной модели арифметики (здесь t и q являются арифметическими термами); сюда

входит и формула $\bot$, так как это атомарная формула; по определению $\neg\varphi \rightleftharpoons \varphi \to \bot$;

2. $r(\varphi \wedge \psi) \rightleftharpoons (r\varphi \wedge r\psi)$;

3. $r(\varphi \vee \psi) \rightleftharpoons (r\varphi \wedge \vdash \varphi) \vee (r\psi \wedge \vdash \psi)$;

4. $r(\varphi \to \psi) \rightleftharpoons ((r\varphi \wedge \vdash \varphi) \Rightarrow r\psi)$;

5. $r(\forall x\varphi(x)) \rightleftharpoons \forall n r\varphi(n)$; здесь n есть нумерал, изображающий в теории HA натуральное число n;

6. $r(\exists x\varphi(x)) \rightleftharpoons \exists n(r\varphi(n) \wedge \vdash \varphi(n))$.

Индукцией по выводу формулы в теории HA+M+P$^+$ доказывается

ТЕОРЕМА 2. *Если в теории HA+M+P$^+$ выводима формула φ, то эта формула реализуема.Здесь P$^+$ получается из P заменой формулы вида $\neg\varphi$ на произвольную формулу языка арифметики.*

Как следствие, получаем:

а) теории HA+M+P$^+$, HA+M+P, HA+P$^+$, HA+P, HA+M, обладающие свойствами нумерической экзистенциальности и дизъюнктивности;

б) все отмеченные в пункте а) теории не совпадают с формальной арифметикой Пеано FA.

ЗАМЕЧАНИЯ 3.

1. Принцип Маркова не выводим в интуиционистской арифметике (первоначальное доказательство было дано Г. Крайзелем, см. [3]; однако этот результат следует из непротиворечивости теории HA+CT+P, так как в случае выводимости M эта теория была бы противоречивой (см. выше); аналогично, принцип Маркова не выводим в теории HA+P$^+$;

2. В интуиционистской арифметике не выводится принцип P (и, конечно, P$^+$) (аналогично результату выше, так как теория HA+M+CT непротиворечива); в теории HA+M также не выводимы принципы P и P$^+$.

3. Все доказательства даны в предположении непротиворечивости или ω-непротиворечивости базисной теории HA; для доказательства выполнимости в приведенной модели принципа M внешним образом используется принцип M; при доказательстве выполнимости в модели принципа P внешним образом используется принцип P^{+}. Также легко видеть, что достаточно потребовать простой непротиворечивости HA, так как эта теория также обладает свойствами дизъюнктивности и нумерической экзистенциальности.

Литература

[1] *Драгалин А.Г.* Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств. М., 1979.

[2] *Kleene S.C.* Realizability: a retrospective survey //Lecture Notes in Mathematics. 1973. № 337. P. 95–112 (см. стр. 96).

[3] *Kreisel G.* The non-derivability $\neg(x)A(x) \to ((Ex)A(x), A$ primitive recersive, in intuitionistic formal systems (abstract) // The Journal of Symbolic Logic. 1958. Vol. 23. № 4. P. 456–457.