Логика направленности и изменения Л. Роговского как функциональная система

Н.И. Стешенко

abstract. In this paper, we prove functional completeness of the four-valued logic of Rogowski by reduction to several well-known functionally complete systems by using J. Slupecki's completeness criterion. We also indicate the bases of this logic.

Логика направленности и изменения, созданная Роговским, — четырехзначная [8]. Он аксиоматизировал эту логику, доказал ее корректность, непротиворечивость, полноту и независимость системы аксиом.

Мне не известны работы, в которых эта логика рассматривалась бы как функциональная система. Задать логику как функциональную систему — означает указать систему исходных функций и операцию (суперпозицию) над множеством исходных функций так, чтобы посредством этих функций и их суперпозиций были определяемы все другие функции. Определение операции суперпозиции будет дано ниже. При исследовании логики Роговского как функциональной системы будем заниматься двумя естественными задачами. Во-первых, проверим, является ли исходная система функций этой логики функционально полной, во-вторых, выделим лишь те базисы в множестве всех функций логики Роговского, которые оправданы (не разрушают содержательной основы этой логики).

Исходными синтаксическими понятиями логики направленности изменения являются импликация и оператор возникновения «B», который читается «возникает так, что…», где вместо точек подставляются пропозициональные переменные, т.е. в этой логике имеется потенциально бесконечный список пропозициональных букв. Через исходные понятия определениями вводятся другие логические связки и операторы. Дадим некоторые важные определения логики направленности.

(D1) $\sim p \equiv_{Df} BBp$ — «не есть так, что p»;

(D2) $Иp \equiv_{Df} B \sim p$ — «исчезает так, что p»;

(D3) $p \wedge g \equiv_{Df} \sim (p \to \sim g)$;

(D4) $Tp \equiv_{Df} p \wedge И(p \wedge Bp) \wedge B(p \wedge Иp)$ — сильное утверждение: «истинно, что p»;

(D5) $p \vee g \equiv_{Df} \sim (\sim p \wedge \sim g) = \sim p \to g$;

(D6) $Уp \equiv_{Df} T(p \vee Bp)$ — «уже есть так, что p»;

(D7) $Ep \equiv_{Df} T(p \vee Иp)$ — «еще есть так, что p».

С содержательной точки зрения логика направленности изменения дедуктивно систематизирует высказывания о переходе в гегелевском смысле (направленные интервалы). Они выделяются упорядоченными парами высказываний (есть так, что p; не есть так, что p), (не есть так, что p; есть так, что p). Операторы B,$И$, E,$У$, как раз и предназначены для исследования свойств перехода. Семантическое значение логических связок и операторов определяется таблицами истинности.

Выделенным значением является «3» — истина. Остальные истинностные значения обозначаются так: «2» — подистина; «1» — подложь; «0» — ложь.

Таблица 1

p	$\sim p$	Tp	Bp	$Иp$	$Уp$	Ep	$p \to g$	3	2	1	0
3	0	3	1	2	3	3	3	3	2	1	0
2	1	0	3	0	3	0	2	3	2	1	1
1	2	0	0	3	0	3	1	3	2	2	2
0	3	0	2	1	0	0	0	3	3	3	3

Перейдем к описанию логики Роговского как функциональной системы. Функция $f(x_1, \cdots, x_n)$ от n-аргументов называется *функцией четырехзначной логики*, если ее аргументы определены на множестве $\Gamma_4 = \{3, 2, 1, 0\}$ и сама функция принимает значение из того же множества. Функции логики Роговского полностью определяются ее таблицами истинности, т.е. в каждой строчке таблицы, которая определяет ту или иную функцию, вначале задается значение переменных функции, затем значения функции на построчных наборах. Если функция f и формула Φ имеют одну и ту же таблицу истинности, то будем говорить, что формула Φ представляет (реализует) функцию f. Произвольные формулы Φ_1 и Φ_2, представляющие одну и ту же функцию, называются эквивалентными, т.е. Φ_1 и Φ_2 имеют совпадающие таблицы истинности. Другими словами, в отличие от табличного задания функции, представление данной функции формулой не единственно.

Ниже отождествляются знаки и названия некоторых логических связок и операторов логики Роговского со знаками и названиями функций.

Обозначим систему исходных функций указанной логики через $F = \{\rightarrow,\ B\}$.

Суперпозицией функций называется образование новых функций из множества исходных функций через а) операцию переименования переменных (в частности, их отождествления) и б) операцию подстановки некоторой функции вместо аргументов какой-то функции — исходной или образованной из исходных — (в частности, подстановкой фиксированной функции вместо собственного аргумента)(см.: [2, с. 33]).

Множество всех суперпозиций функций от n-аргументов ($n = 0, 1, 2, \cdots, n-1$) логики Роговского обозначим через $\mathbf{R}_4$. Константные функции (константы) рассматриваются как функции, зависящие от произвольного числа переменных, включая и нуль переменных [1, с. 88]. Образуем суперпозициями отдельные функции из $\mathbf{R}_4$. Некоторые суперпозиции функций копируют вышеуказанные определения.

1. $\sim x = (3 - x)$ — отрицание;
2. $И(x) = B(\sim x)$ — «исчезает, что...»;
3. $x \vee y = max(x, y)$ — дизъюнкция;
4. $x \wedge y = min(x, y)$ — конъюнкция.

Введем *константные функции*, т.е. функции, принимающие на всех значениях аргументов какое-то одно значение: 3, либо 2, либо 1, либо 0. Введем соглашение: в многократных подстановках функции $B(x)$ (и функции $И(x)$) на место собственного аргумента скобки опускаются, например $B(B(x))$ записывается как $BB(x)$, кроме того, очевидные скобки также опускаются.

5. $3 = x \vee B(x) \vee BB(x) \vee BBB(x)$ — константа 3;

6. $1 = B(3)$ — константа 1;

7. $0 = B(1)$ — константа 0;

8. $2 = B(0)$ — константа 2.

Определим в $\mathbf{R}_4$ функции Россера-Тюркетта.

9. $J_3(x) = BB[x \to [B(x \to BBB(x)) \to B(x \to B(x))]]$;

10. $J_2(x) = J_3(B(x))$;

11. $J_1(x) = J_3(BBB(x))$;

12. $J_0(x) = J_3(BB(x))$.

Введя переменную i, принимающую все значения из множества $\Gamma_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, мы получим известную характеристическую функцию:

$$J_i(x) = \begin{cases} 3, \text{если } x = i \\ 0, \text{если } x \neq i. \end{cases}$$

Определим посредством суперпозиции функций Россера-Тюркетта другие функции, играющие огромную роль в логике Роговского.

13. $У(x) = J_2(x) \vee J_3(x)$; — «уже есть так, что...».

14. $E(x) = J_1(x) \vee J_3(x)$, — «еще есть так, что...».

15. $x \Cap y = (У(x) \wedge E(y)) \vee (E(x) \wedge У(y))$, — «$x$ и вместе с тем y».

16. $x \sqcap \sim x = J_1(x) \vee J_2(x)$, — «$x$ и вместе с тем не-x» — гегелевская конъюнкция.

Проверка всех равенств (1)–(16) осуществляется непосредственно по таблицам истинности и строению суперпозиций (правые части равенств), посредством которых вводятся функции (левые части равенств).

Дальше сосредоточимся на проверке функциональной полноты $\mathbf{R}_4$. Приспособим известные определения и формулировки теорем к символам логики изменения и направленности, которая рассматривается как функциональная система.

Система функций $F = \{\rightarrow, B\}$ в $\mathbf{R}_4$ называется *функционально полной*, если каждая функция из $\mathbf{R}_4$ является суперпозицией функций из F этой системы [7, с. 58].

Для произвольных k-значных, в том числе и 4-значных логик, имеется несколько способов проверки полноты систем функций. Компактное описание этих способов дано, например, в [1, с. 97].

Первый из них основан на рассмотрении всех предполных классов в $\mathbf{R}_4$: система функций из $\mathbf{R}_4$ полна в $\mathbf{R}_4$ тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из предполных классов. Понятие предполного класса стандартное [7, с. 78–79]. Этот способ практически малопригоден, так как надо фактически иметь все предполные классы, которых у нас нет; их число равно 82 (см.: [3, с. 106]).

Второй способ доказательства полноты проводится методом сведения к заведомо полным системам.

Наконец, третий способ проверки систем функций на полноту состоит в том, что рассматривается множество, содержащее некоторую совокупность функций от одной переменной и функцию, которая существенно зависит не менее чем от двух переменных и принимающая все значения из множества Γ_4. Эти функции должны удовлетворять критериям (признакам) полноты: критериям Е. Слупецкого, С.В. Яблонского, А. Саломаа. Отметим попутно, что критерий А. Саломаа к нашему случаю неприменим, так как он предназначен для проверки полноты многозначных логик, имеющих не менее 5-ти истинностных значений. Нужные определения будут даны ниже.

Доказательство функциональной полноты системы функций $F = \{\rightarrow, B\}$ в $\mathbf{R}_4$ проведем методом сведения к заведомо полным системам посредством критерия Слупецкого.

Доказательство функциональной полноты с помощью метода сведения к заведомо полным системам покоится на теореме, формулировка и доказательство которой имеется в [5, с. 30–31]. Она сформулирована для двухзначной логики, но автоматически переносится на многозначные логики, так как понятие суперпозиции функций одинаково для двухзначных и многозначных логик.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть даны две системы функций из четырехзначной логики (а)* $F_1 = \{f_1, f_2, \dots\}$ *и (б)* $F = \{g_1, g_2, \dots\}$*, относительно которых известно, что система (а) полна и каждая ее функция получена посредством суперпозиций функций из системы (б). Тогда система (б) является полной.*

ТЕОРЕМА 2. *Система функций* $F = \{\to, B\}$ *в* $\mathbf{R}_4$ *функционально полная.*

Имеем систему (б) $F = \{\to, B\}$ в $\mathbf{R}_4$, надо найти такую систему (а), относительно которой известно, что она является функционально полной. В множестве $\mathbf{R}_4$ такая подсистема имеется: это 4-значный вариант системы Россера и Тюркетта.

(а). $F_1 = \{x \vee y,\ x \wedge y,\ J_3(x),\ J_2(x),\ J_1(x),\ J_0(x),\ 3,\ 2,\ 1,\ 0\}$.

Каждая функция системы (а) получена суперпозицией функций из системы (б): это равенства (3)–(12). Доказательство функциональной полноты системы F_1 [4, с. 48] покоится на том факте, что в многозначной логике имеется аналог совершенной дизъюнктивно нормальной формы (с.д.н.ф.).

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\delta_1, \dots, \delta_n)} [(J_{\delta_1}(x_1) \wedge \dots \wedge J_{\delta_n}(x_n)) \wedge f(\delta_1, \dots, \delta_n) \neq 0]$$

Дизъюнкция берется по всем 4-значным наборам $\delta_1, \dots, \delta_n$ значений переменных $x_1, \dots, x_n$, каждый из которых имеет длину n. Доказательство равенства левой и правой частей этого разложения аналогично доказательству в 2-значной логике [5, с. 15-16]. Правая часть этого разложения есть формула логики Роговского над множеством функций из F_1, левая часть есть функция, которую представляет формула. Любая, отличная от тождественно ложной, формула логики Роговского, которая представляет функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, преобразуема в с.д.н.ф., и такое представление единственно.

Таким образом, системы $F = \{\rightarrow, B\}$ и $F_1 = \{x \vee y, x \wedge y, J_3(x), J_2(x), J_1(x), J_0(x), 3, 2, 1, 0\}$ удовлетворяют требованиям теоремы 1, значит система $F = \{\rightarrow, B\}$ является функционально полной.

Известно также, что система Поста $\Pi_4 = \{\neg, \vee\}$ — функционально полная [5, с. 48-50]. Сведем проверку полноты $F = \{\rightarrow, B\}$ к полноте Π_4. Выше было показано, что дизъюнкция $x \vee y = max(x, y)$ есть суперпозиция функций из $F = \{\rightarrow, B\}$, эта дизъюнкция равнозначна постовской дизъюнкции. Но в логиках Роговского и Поста различные типы отрицания. В первой используется отрицание в виде симметрического отображения истинностных значений ($\sim x = 3 - x$), во второй — циклического сдвига истинностных значений ($\neg x = x + 1 (mod\, 4)$). Надо определить постовское отрицание посредством суперпозиции функций из $F = \{\rightarrow, B\}$.

$\neg x = (J_0(x) \wedge И(x)) \vee ((J_1(x) \wedge \sim x) \vee J_2(x)) = (J_0(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (BB(J_2(x)) \rightarrow BB(J_1(x) \rightarrow x))$

Проверка равенства осуществляется с помощью применения таблиц истинности по структуре суперпозиции функций в правой части, т.е. получим $x = \{0, 3, 2, 1\}$ при $x = \{3, 2, 1, 0\}$. Таким образом, система (а) $\Pi_4 = \{\neg, \vee\}$ и система (б) $F = \{\rightarrow, B\}$ выполняют условия теоремы 1, значит $F = \{\rightarrow, B\}$ функционально полна.

В логике Роговского центральную роль играют одноместные (одноаргументные) функции $B(x)$, $И(x)$, $У(x)$, $E(x)$. Но доказательство полноты $\mathbf{R}_4$ методом сведения к заведомо полным системам ничего не говорит о функциональных свойствах упомянутых одноместных функций логики изменения и направленности. Критерий Е. Слупецкого, дополненный условиями на функции от одной переменной, которые задаются теоремой С. Пикар (Sophie Piccard), позволяет, в частности, исследовать функциональную полноту в множестве одноместных функций.

Дадим нужные для формулировки критерия Слупецкого обозначения и определения применительно к $\mathbf{R}_4$.

Обозначим через $\mathbf{R}_4^{(1)}$ множество всех одноместных функций в $\mathbf{R}_4$, их число равно $44 = 256$; $\mathbf{S}_4$ — множество всех *разнозначных функций*, т.е. функции одного аргумента, каждая из которых принимает все четыре значения истинности, их число равно $4! = 24$; этому множеству, в частности, принадлежат функции $B(x)$, $И(x)$, $\sim x$. Но функции $У(x)$ и $E(x)$ принадлежат другому множеству: множеству одноместных функций, «выпускающих» хотя бы одно из значений истинности из Γ_4.

Будем говорить, что одноместная *функция выпускает хотя бы одно истинностное значение*, если совокупность ее значений является строгим подмножеством множества $\Gamma_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, т.е. $f(\Gamma_4) \neq \Gamma_4$. Множество одноместных функций, выпускающих хотя бы одно истинностное значение, есть дополнение множества разнозначных функций в множестве всех одноместных функций: $\mathbf{CS}_4 = \mathbf{R}_4^{(1)} \backslash \mathbf{S}_4$.

Функция $f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ из $\mathbf{R}_4$ существенно зависит от переменной x_k, если найдутся два набора истинностных значений $\alpha^1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \beta_1, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)$ и $\alpha^2 = (\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \beta_2, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)$, $\beta_1 \neq \beta_2$ таких, что $f(\alpha^1) \neq f(\alpha^2)$ [7, с. 57]. Функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ назовем *существенной*, если она существенно зависит более чем от одной переменной и принимает все истинностные значения из множества Γ_4.

ТЕОРЕМА 3 (критерий Е. Слупецкого). *Система функций $\mathbf{R}_4^{(1)} \cup \{\rightarrow\}$ полна в $\mathbf{R}_4$ тогда и только тогда, когда функция $\rightarrow$ существенная.*

Доказательство теоремы дано в [9]. Наша цель — показать, что система $F = \{\rightarrow, B\}$ подпадает под критерий Слупецкого. «Подпадает» означает, что F имеет все одноместные функции и функция $\rightarrow$ является существенной. Сама же функциональная полнота, т.е. существование всех остальных функций (наряду с одноместными) в $\mathbf{R}_4$, гарантируется теоремой.

Легко проверить по таблице истинности, что функция $\rightarrow$ существенная. По критерию Слупецкого надо фактически иметь все функции одного аргумента, их число, как отмечали, равно 256. Некоторые одноместные функции в $\mathbf{R}_4$ построены, но чтобы получить весь список одноместных функций $\mathbf{R}_4^{(1)}$ посредством суперпозиции функций из $F = \{\rightarrow, B\}$, надо провести огромное число вычислений. Чтобы избежать утомительных вычислений, С. Пикар предложила несколько систем одноместных функций, которые являются полными в $\mathbf{R}_4^{(1)}$. Позже обсуждались и другие системы функций от одной переменной, достаточные для порождения всех одноместных функций [4]. Используем функции Пикар, следуя [5, с. 64-65], но изменив обозначения.

ТЕОРЕМА 4 (С. Пикар). *Все функции одного переменного из* $\mathbf{R}_4$ *могут быть порождены четырьмя функциями.*

$$J_{0i}(x) = \begin{cases} i, \text{ если } x = 0; \\ 0, \text{ если } x = i (i = 1, 2, 3); \\ x \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x = 0; \\ x, \text{ если } x \neq 0. \end{cases}$$

Убедимся, что эти функции в $\mathbf{R}_4^{(1)}$ имеются, т.е. определим эти функции посредством суперпозиций функций логики Роговского:

$f_{01}(x) = (x \wedge B(x)) \vee \sim [(\sim x \wedge B(x)) \vee J_1(x) \vee J_2(x)]$;
$f_{02}(x) = [(x \wedge \sim x) \wedge И(x)] \vee \sim [J_1(x) \vee J_2(x) \vee (И(x) \wedge \sim x)]$;
$f_{03}(x) = [(x \wedge \sim x) \wedge И(x)] \vee \sim [J_1(x) \vee J_3(x) \vee (x \wedge \sim x)]$;
$h(x) = x \vee ((И(x) \wedge B(x) \wedge J_0(x))$.

Проверка равенств проводится на основании определений функций, задаваемых теоремой С. Пикар, и по структуре суперпозиций функций в правой части равенств.

Система функций $f_{oi} = (f_{01}, f_{02}, f_{03})$ порождает множество $\mathbf{S}_4$ всех разнозначных функций.

Докажем полноту системы функций $\{f_{oi}\} = \{f_{01}, f_{02}, f_{03}\}$ в $\mathbf{S}_4$ индукцией по $i (1 \leq i \leq 3)$. Для доказательства полноты используем свойство функций $f_{oi}(x)$, задаваемое их определениями: $f_{oi}(x) \equiv x$, если $x \neq i$ и $x \neq 0$. К тому же из четырехзначности функций логики Роговского ясно, что $f_{oi}(x) \equiv x$ имеет место на двух значениях аргумента (отличных от «0» и «i»).

Установим, что любая функция $s(x)$ из $\mathbf{S}_4$, удовлетворяющая условию $s(x) \equiv x$ при $x > i \neq 3$ (и x $< i, \text{если} i = 3$) порождается системой функций f_{oi}.

Базис индукции: $i = 1$. Тогда условие $s(x) \equiv x$ при $x > 1$ означает, что функция $s(x)$ тождественна на построчных наборах аргументов «2» и «3». Из трех функций $\{f_{01}, f_{02}, f_{03}\}$ только функция f_{01} порождает множество функций, выделенных указанным свойством, так как функция f_{02} (по ее определению) не сохраняет тождество $s(x) \equiv x$ на аргументе «2», а функция f_{03} (по определению) не сохраняет тождество $s(x) \equiv x$ на аргументе «3». Тем самым базис индукции доказан.

Индуктивное допущение. Предположим, что мы имеем подмножество функций из $\mathbf{S}_4$, порожденное функцией f_{02}. Надо доказать, что остальные функции из множества $\mathbf{S}_4$ порождаются f_{03}, т.е. $i = 3$.

Сначала надо убедиться, что множество функций, порождаемых функцией f_{03}, отличается (не пересекается) от тех множеств функций, которые порождаются функциями f_{01} и f_{02}. Другими словами, надо показать, что f_{03} не является суперпозицией функций f_{01} и f_{02}, т.е. $f_{03}(x) \neq f_{01}(f_{02}(x))[f_{03}(x) \neq f_{02}(f_{01}(x))]$. Из базиса индукции известно, что все функции, заданные f_{01}, сохраняют тождество $s(x) \equiv x$ на значениях аргументов «2» и «3», по индуктивному допущению имеем, что все функции, порожденные функцией f_{02}, дают тождество $s(x) \equiv x$ на значениях аргументов «3» и «1». Тогда суперпозиция функций из этих множеств функций сохраняет тождество на аргументе со значением «3». Но f_{03} не сохраняет тождество (по определению f_{03}) на аргументе со значением «3». Значит, множество функций, порождаемое f_{03}, не может пересекаться с множествами функций, порождаемых функциями f_{01} и f_{02}. Условие $s(x) \equiv x$ при $x < 3$ означает, что множество функций тождественно на наборах аргументов со значением «2» и «1». Но множество функций, выделенное этим условием, порождается функцией f_{03}. Доказательство полноты системы функций $\{f_{oi}\} = \{f_{01}, f_{02}, f_{03}\}$ в $\mathbf{S}_4$ завершено.

Функции В(x),$И(x)$,$\sim x$ и $\neg x$ — разнозначные функции, и, стало быть, выразимы функциями из f_{oi}: $B(x) = f_{01}(f_{03}(f_{02}(x)))$; $И(x) = f_{02}(f_{03}(f_{01}(x)))$; $\sim x = f_{03}(f_{02}(f_{01}(f_{02}(x)))$; $\neg x = f_{03}(f_{02}(f_{01}(x)))$.

Функция $h(x)$ (с использованием функций из $\mathbf{S}_4$) позволяет задать любую функцию из множества $\mathbf{CS}_4$, т.е. множество функций, выпускающих хотя бы одно значение истинности из множества $\Gamma_4 = \{0, 1, 2, 3\}$. Выделим те функции из $\mathbf{S}_4$, которые нам особо понадобятся в порождении множества функций из $\mathbf{CS}_4$: $И(x)$, $B(x)$, $\sim (x)$, $f_{12}(x) = f_{01}(f_{02}(f_{01}(x)))$, $f_{13}(x) = f_{01}(f_{03}(f_{03}(x)))$.

$$f_{12}(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x = 2; \\ 2, \text{ если } x = 1; \\ x \text{ в остальных} \\ \text{случаях.} \end{cases} \qquad f_{13}(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x = 3; \\ 3, \text{ если } x = 1; \\ x \text{ в остальных} \\ \text{случаях.} \end{cases}$$

Из определения функций, выпускающих хотя бы одно значение истинности из множества $\Gamma_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, легко видеть, что в таких функциях имеется по меньшей мере два повторяющихся (одинаковых) значения истинности. Например, в функциях $f_1(x) = (1, 2, 1, 3)$, $f_2(x) = (1, 2, 3, 2)$, $f_3(x) = (3, 2, 3, 1)$ выпущено значение «0» и соответственно повторяются значения $(1, 1)$, $(2, 2)$ и $(3, 3)$.

Доказательство проведем индукцией по j $(1 \leq j \leq 3)$, где j — число, выпускаемых в функциях истинностных значений. Установим, что любая функция $p(x)$ из $\mathbf{CS}_4$, удовлетворяющая условию «иметь одинаковые истинностные значения», задается функцией $h(x)$ (с использованием функций из $\mathbf{CS}_4$).

Базис индукции $j = 1$. Имеем четыре случая: (а). Выпускается значение «0» и повторяются в функциях истинностные значения — $(1, 1)$, $(2, 2)$ и $(3, 3)$, т.е. $p_0(x) = p_0^1(x) \cup p_0^2(x) \cup p_0^3(x)$, где нижний индекс указывает какое истинностное значение выпускается, а верхние индексы показывают, какие истинностные значения повторяются. Другими словами, множество функций, в котором выпущено истинностное значение «0», состоит из трех подмножеств функций. (б). Выпускается значение «1» и повторяются в функциях истинностные значения — $(0, 0)$, $(2, 2)$ и $(3, 3)$, т.е. $p_1(x) = p_1^0(x) \cup p_1^2(x) \cup p_1^3(x)$. (в). Выпускается значение «2» и повторяются в функциях истинностные значения — $(0, 0)$, $(1, 1)$ и $(3, 3)$, т.е. $p_2(x) = p_2^0(x) \cup p_2^1(x) \cup p_2^3(x)$. (г). Выпускается значение «3» и повторяются в функциях истинностные значения — $(0, 0)$, $(2, 2)$ и $(1, 1)$, т.е. $p_3(x) = p_3^0(x) \cup p_3^2(x) \cup p_3^1(x)$.

Рассмотрим случай (а). Подставим вместо аргумента функции $h(x)$ каждую функцию из класса $\mathbf{S}_4$. Тогда в так полученном множестве функций появятся пары таких функций, которые состоят из одинаковых по значению функций. Например, различные функции в $\mathbf{S}_4$ $s_k(x) = (3,0,2,1)$ и $s_k(x) = (3,1,2,0)$ в результате подстановки окажутся одинаковыми — $h(s_k(x)) = h(s_e(x)) = (3,1,2,1)$. Оставим по одной функции из каждой пары. Хотя можно действовать иначе: из $\mathbf{S}_4$ предварительно выбираются функции таким образом, чтобы указанные повторы при подстановке вместо аргумента $h(x)$ не встречались. В результате получим класс $p_0^1(x)$ всех функций, в которых во всевозможных комбинациях повторяется значение «1», так как множество $\mathbf{S}_4$, из которого собственно и получили $p_0^1(x)$ посредством $h(x)$, содержит (ввиду полноты $\mathbf{S}_4$) функции с всевозможными построчными наборами истинностных значений «0» и «1». Осталось получить $p_0^2(x)$ и $p_0^3(x)$. Подставим вместо аргумента функции $f_{12}(x)$ каждую функцию из множества $p_0^1(x)$, в результате получим все функции класса $p_0^2(x)$. Подставим вместо аргумента функции $f_{13}(x)$ каждую функцию из множества $p_0^1(x)$, в результате получим все функции класса $p_0^3(x)$. Случай (а) доказан, т.е. $p_0(x) = p_0^1(x) \cup p_0^2(x) \cup p_0^3(x)$.

(б). Для доказательства этого случая используем функцию $И(x) = f_{02}(f_{03}(f_{01}(x)))$ и все функции, полученные в случае (а). Подставим вместо аргумента $И(x)$ каждую функцию из множества $p_0^1(x)$, получим все множество функций из $p_1^3(x)$, т.е. множество функций, в которых выпускается значение «1» и повторяются значения $(3,3)$. Сокращенно эти подстановки запишем $И(p_0^1(x)) = p_1^3(x)$. Дальше подставим вместо аргумента $И(x)$ каждую функцию из множества $p_0^2(x)$, получим все множество функций из $p_1^0(x)$, т.е. множество функций, в которых выпускается значение «1» и повторяются значения (0, 0). Сокращенно эти подстановки запишем $И(p_0^2(x)) = p_1^0(x)$. Наконец, подставим вместо аргумента $И(x)$ каждую функцию из множества $p_0^3(x)$, получим все множество функций из $p_1^2(x)$, т.е. множество функций, в которых выпускается значение «1» и повторяются значения (2, 2). Сокращенно эти подстановки запишем $И(p_0^3(x)) = p_1^2(x)$. Случай (б) завершен, т.е. имеем $p_1(x) = p_1^0(x) \cup p_1^2(x) \cup p_1^3(x)$.

(в). Для доказательства этого случая используем функцию $B(x) = f_{01}(f_{03}(f_{02}(x)))$ и все функции случая (а). Все нужные подстановки запишем сокращенно: $B(\mathrm{p}_0^1(x)) = p_2^0(x))$; $B(p_0^2(x)) = p_2^3(x))$; $B(p_0^3(x)) = p_2^1(x))$, т.е. были получены все функции, в которых выпускается значение «2» и повторяются значения $(0, 0)$, $(1, 1)$ и $(3, 3)$ — $p_2(x) = p_2^0(x) \cup p_2^1(x) \cup p_2^3(x)$.

(г). Для доказательства последнего случая используем функцию $\sim x = f_{03}(f_{02}(f_{01}(f_{02}(x))))$ и все функции, полученные в случае (а). Все нужные подстановки запишем сокращенно: $\sim (p_0^1(x)) = p_3^2(x)$; $\sim (p_0^2(x)) = p_3^1(x)$; $\sim (p_0^3(x)) = p_3^0(x)$, т.е. получили все функции, в которых выпущено значение «3» и повторяются значения $(0, 0)$, $(1, 1)$ и $(2, 2)$ — $p_3(x) = p_3^0(x) \cup p_3^2(x) \cup p_3^1(x)$.

Таким образом, все случаи базиса индукции доказаны.

Индуктивное допущение $i = 2$. Предполагая, что имеются все функции, выпускающие ровно два значения (либо 0 и 1, либо 0 и 2, и т.д.), можем построить множество всех функций, выпускающих три значения истинности ((0, 1, 2), либо (0, 1, 3) либо (0, 2, 3), либо (1, 2, 3)), т.е. получим все константные функции.

Среди функций, выпускающих два истинностных значения, имеются функции, выпускающие истинностные значения «2» и «3», например функция $f_k = (0, 1, 1, 1)$. Суперпозиция функций $h(f_k(x))$ дает константу 1, т.е. функцию, выпускающую истинностные значения (0, 2, 3). Нетрудно получить оставшиеся константные функции.

Так как функции У(х) и $E(x)$ выпускают истинностные значения «1» и «2», то их можно определить, например посредством таких суперпозиций функций: $У(x) = \neg(\neg(h \sim (h(x))))$ и $E(x) = \neg(\neg(f_{12}(h(\sim h(B(x))))))$.

Итак, суперпозицией функций из $F = \{\to, B\}$ была определена система одноместных функций $\{f_{oi}, h(x)\}$, которая порождает множество всех одноместных функций $\mathbf{R}_4^{(1)}$. Функция $\to$ является существенной. Значит, система функций $F = \{\to, B\}$ удовлетворяет критерию Е. Слупецкого, т.е. является функционально полной в $\mathbf{R}_4$.

Докажем, пользуясь критерием Е. Слупецкого, что система функций $F_3 = \{\to, У, E\}$ не является функционально полной в $\mathbf{R}_4$. Для этого надо показать, что F_3 порождает не все множество одноместных функций, а лишь его часть, т.е. собственное подмножество множества $\mathbf{R}_4^{(1)}$.

Посредством суперпозиций функций из F_3 образуем некоторое множество функций, зависящих от одной переменной. Этому множеству принадлежит константа 3 (например, полученная суперпозицией функций $\to$ и $У$: $У(x) \to У(x)$), тождественная функция ($3 \to x \equiv x$), а также подмножество функций, выпускающие значения «0» или «1», или «2» и принимающие по меньшей мере в двух строчках значения «3». Но мы не получим ни одной одноместной функции, в которой выпускается значение «3» из $\mathbf{E}_4$. Покажем это. По аналогии с трехзначной логикой [6, с. 110] будем говорить, что функция *сохраняет* истинностное значение 3, если $f(3,3,\dots,3)=3$. Все три функции $\{\to, У, E\}$ сохраняют истинностное значение 3, тогда и суперпозиция этих функций сохраняет истинностное значение 3 (доказательство такое же, как и в случае двухзначной логики (см.: [5, с. 34])). Таким образом, среди одноместных функций, порождаемых системой функций из $F_3 = \{\to, У, E\}$, нет, по меньшей мере, функций, выпускающих истинностное значение «3» из Γ_4. Это означает, что $F_3 = \{\to, У, E\}$ не является функционально полной.

ТЕОРЕМА 5. *$F = \{\to, B\}$ есть базис $\mathbf{R}_4$.*

Для доказательства этой теоремы введем ряд известных понятий. Пусть $F \subset \mathbf{R}_4$. *Замыканием* множества функций F называется множество, обозначаемое $[F]$, которое состоит из функций множества F и функций, которые могут быть получены из функций множества F посредством суперпозиции. Если $[F] = F$, то F называется *замкнутым*. Множество функций F называется *полным*, если $[F] = \mathbf{R}_4$. Множество функций F^+ называется *неполным* в $\mathbf{R}_4$, если $[F^+] \neq \mathbf{R}_4$. *Базисом* называется минимальная полная система функций, т.е. такая система функций, удаление из которой любой функции делает систему неполной.

Зафиксируем, что система $F = \{\to, B\}$ является функционально полной. Ее полнота была установлена методом сведения к заведомо полным системам и при помощи критерия Е. Слупецкого.

Рассмотрим два случая: 1) $F^1 = \{B\}$; 2) $F^2 = \{\to\}$. В первом случае имеем $[B(x)] = \{B(x), \sim x, И(x), x\}$, т.е. любая суперпозиция функции $B(x)$ дает одну из четырех указанных функций.

Это означает, что $[F^1] \neq \mathbf{R}_4$. Более точно, $[F^1] \neq \mathbf{S}_4$, т.е. F^1 не является полной даже в множестве разнозначных функций ($\mathbf{S}_4 \subset \mathbf{R}_4^{(1)} \subset \mathbf{R}_4$). Несложно показать, что $[F^2] \neq \mathbf{R}4$.

Суммируем: $F = \{\rightarrow, B\}$ — полная система, $F^1 = \{B\}$ и $F^2 = \{\rightarrow\}$ — неполные, значит, $F = \{\rightarrow, B\}$ есть базис в $\mathbf{R}_4$.

Укажем еще пять базисных систем функций логики Роговского. На задание базисов введем ограничения, диктуемые содержательными предпосылками логики изменения и направленности. В логике Роговского, как отмечалось выше, систематизируются гегелевские высказывания о переходе предмета из одного состояния в другое; функции $B, У$, $E, И$ как раз и предназначены для образования сложных высказываний, в которых что-то утверждается либо отрицается о свойствах перехода. Система функций $F_3 = \{\rightarrow, У, E\}$ не является базисом в $\mathbf{R}_4$, так как она — это было показано выше — не является полной в $\mathbf{R}_4$. С другой стороны, функции $У(x)$ и $E(x)$ определимы через импликацию и функции $B(x)$ или И(x), поэтому включение их в базис избыточно. Функции $B(x)$ и $И(x)$ взаимоопределимы — $И(x) = B(\sim x)$; $B(x) = И(\sim x)$, и совпадают как замкнутые классы $[B(x)] = \{B(x), \sim x, И(x), x\} = [И(x)]$. Ввиду этого среди функций, входящих в базис, должны быть эти функции. Следующие системы функций образуют базис: $F_1 = \{\vee, B\}$; $F_2 = \{\wedge, B\}$; $F_3 = \{\rightarrow, И\}$; $F_4 = \{\vee, И\}$; $F_5 = \{\wedge, И\}$ — при этом учитываются определения (D3) и (D5). Можно получить и другие базисы, например: $\{\rightarrow$ (плюс) минимальная система одноместных функций, через которые выразима функция $B(x)$ или $И(x)\}$, но вызывает большие сомнения, что еще какая-либо минимальная система одноместных функций может быть обоснована содержательными предпосылками логики изменения и направленности.

Литература

[1] *Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А.* Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004.

[2] *Гиндикин С.Г.* Алгебра логики в задачах. М.: Наука, 1972.

[3] *Карпенко А.С.* Многозначные логики. Логика и компьютер. Вып. 4. М.: Наука, 1997.

[4] *Саломаа А.* Некоторые критерии полноты для множеств функций многозначной логики // Кибернетический сборник. Вып. 8. М.: Мир, 1964. С. 7-32.

[5] *Яблонский С.В.* Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.

[6] *Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Г.* Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966.
[7] *Яблонский С.В.* Функциональные построения в k-значной логике // Труды МИАН СССР. 1958. Т. 51. С. 5-142.
[8] *Rogowski L.S.* Logika kierunkowa a heglowska teza o sprzeczności zmiany. Toruń, 1969.
[9] *Slupecki J.* A criterion of fullness of many-valued systems of propositional logic // Studia logica. Vol. XXX. 1972. P. 153-157.