Логика альтернативного отношения следования[1]

В.И. Шалак

ABSTRACT. In the present paper we present the logic corresponding to our alternative definition of logical consequence. We prove soundness and completeness theorems for this logic.

В настоящей статье будет построена логика **ACL**, являющаяся аксиоматизацией альтернативного отношения логического следования, определенного в [4].

1 Логика ACL

Фиксируем язык:

1. Var — множество пропозициональных переменных;
2. $\&, \vee, \neg$ — логические связки.

Определение формулы — обычное.

Пусть $Val = \{0,1\}^{Var}$ — множество приписываний истинностных значений пропозициональным переменным нашего языка. Обычным образом мы распространяем функции приписывания истинностных значений на все формулы языка:

1. $v(\neg A) = 1 - v(A)$;
2. $v(A \ \& \ B) = \min(v(A), v(B))$;
3. $v(A \vee B) = \max(v(A), v(B))$.

[1] Работа поддержана РГНФ. Грант № 04-03-02660.

По определению вводим связки:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. $A \supset B = \neg A \vee B$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. $A \equiv B = (A \supset B)\&(B \supset A)$

Теперь мы хотим определить на семантическом уровне отношение *следования* $\Gamma \models A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Из множества формул $\Gamma = \{B_1, \ldots, B_k\}$ следует формула A ($\Gamma \models A$), если и только если существует булева функция $f : \{0,1\}^k \longrightarrow \{0,1\}$, которая позволяет для произвольного приписывания $v \in Val$ на основании оценок $v(B_1), \ldots, v(B_k)$ вычислить оценку $v(A)$, то есть $v(A) = f(v(B_1), \ldots, v(B_k))$.

$$\{B_1, \ldots, B_k\} \models A \Longleftrightarrow \exists f \forall v(v(A) = f(v(B_1), \ldots, v(B_k)))$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Выводимостью будем называть выражение вида $\Gamma \Vdash A$, где A — формула, а $\Gamma = \{B_1, \ldots, B_k)$ — конечное множество формул логики высказываний. Будем называть множество формул Γ посылками выводимости, а формулу A — заключением.

Аксиоматизацию отношения следования представим в виде набора выводимостей и правил перехода от одних выводимостей к другим. Формулы, доказуемые в классической логике высказываний, будем обозначать посредством $\vdash A$.

A.1 $A \vee \neg A$

A.2 $A, B \Vdash A \ \& \ B$

A.3 $A \Vdash \neg A$

R.1 $\vdash A \equiv B \Longrightarrow A \Vdash B$

R.2 $\Gamma \Vdash A$ и $A, \Delta \Vdash B \Longrightarrow \Gamma, \Delta \Vdash B$

Заметим, что в правиле R.1 мы используем ссылку на доказуемую в классической логике эквивалентность. Эта ссылка позволила нам дать компактную аксиоматизацию, но не является обязательной. С равным успехом мы могли бы оставить одно лишь правило R.2, а R.1 заменить на несколько аксиом, соответствующих аксиомам булевой алгебры, по правилу: если $A = B$ — аксиома булевой алгебры, то к набору наших аксиом-выводимостей мы добавляем две новые — $A \Vdash B$ и $B \Vdash A$.

Дадим определение доказательства в нашем исчислении.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Доказательством называется непустая конечная последовательность, каждый из элементов которой является либо доказуемой формулой классического исчисления высказываний вида $A \equiv B$, либо аксиомой-выводимостью A.1–A.3, либо выводимостью, полученной из предыдущих элементов последовательности по правилам R.1–R.2. Доказанной считается выводимость, являющаяся конечным элементом последовательности.

Покажем непротиворечивость построенного исчисления. Для этого нам надо показать, что всякая доказуемая выводимость обладает свойством следования.

ТЕОРЕМА 6. ***Логика ACL непротиворечива****. Если* $\Gamma \Vdash A$, *то* $\Gamma \models A$.

Доказательство. Для начала проверим аксиомы A.1–A.3.

A.1 $v(A \vee \neg A) = \max(v(A), v(\neg A)) = \max(v(A), 1 - v(A)) = 1$.

A.2 $v(A \& B) = \min(v(A), v(B))$.

A.3 $v(\neg A) = 1 - v(A)$.

Теперь проверим, что правила R.1–R.2 сохраняют свойство следования.

Если $\Gamma = \{B_1, \ldots, B_k\}$, то $v(\Gamma)$ будет служить сокращением для $< v(B_1), \ldots, v(B_k) >$

R.1

+1. $\vdash A \equiv B$

2. $v(B) = v(A)$ - из 1 по определению v

R.2

+1. $v(A) = f(v(\Gamma))$

+2. $v(B) = g(v(A), v(\Delta))$

3. $v(B) = g(f(v(\Gamma)), v(\Delta))$ - из 1, 2 подстановкой

Покажем, что построенное нами исчисление нетривиально, то есть существуют выводимости, которые в нем недоказуемы. Для этого достаточно привести пример выводимости, не обладающей свойством следования. Самый простой пример такой выводимости — это $\varnothing \Vdash p$. Так как множество $\varnothing$ пусто, то значение $v(p)$

должно быть константным во всех моделях, что очевидным образом не имеет места. Q.E.D.

Доказанная выше теорема хоть и названа нами теоремой о непротиворечивости, но это скорее дань традиции, так как ни о какой непротиворечивости в объектном языке речь не идет. Мы всего лишь показали, что аксиомы обладают свойством вычислимости истинностного значения заключения на основании истинностных значений посылок, и правила вывода сохраняют это свойство.

Доказательство теоремы о непротиворечивости интересно тем, что оно более глубоко раскрывает суть предложенной семантики. Каждой из аксиом A.1–A.3 мы сопоставили свою функцию (свой алгоритм) вычисления истинностного значения заключения на основании истинностных значений посылок. Аксиоме A.1 мы сопоставили константную функцию, которая может принимать лишь значение 1. Аксиоме A.2 мы сопоставили стандартную функцию, которая вычисляет истинностное значение формулы конъюнктивного вида на основании истинностных значений конъюнктов — $\min(x, y)$. Аксиоме A.3 мы сопоставили функцию, вычисляющую значение формулы, главный знак которой отрицание — $1-x$. Правилу R.1 мы сопоставили тождественную функцию $id(x) = x$, а правило R.2 — это правило суперпозиции функций, позволяющее строить из простых функций более сложные, или, если говорить об алгоритмах, это правило их сочленения. Семантическим коррелятом любой доказуемой выводимости всегда будет некоторая суперпозиция исходных функций. Ни о какой истинности аксиом речь не идет и вообще идти не может. Функции и алгоритму нельзя сопоставить никакого истинностного значения. Каждый алгоритм правилен по определению, так как он позволяет вычислять именно то, что он вычисляет. Истинными или ложными могут быть лишь утверждения о свойствах алгоритмов. Например, действительно ли они позволяют вычислять то, к чему их хотят применить, но это уже совершенно другой вопрос.

Теорема о непротиворечивости имеет очевидное, но очень важное следствие.

СЛЕДСТВИЕ 7. *По всякому доказательству* $\Gamma \Vdash A$ *в логике* ACL *мы можем синтезировать функцию, которая вычисляет истинностную оценку формулы* A *на основании истинностных оценок формул, входящих в* Γ.

Смысл этого следствия в том, что каким бы сложным ни было рассуждение, построенное в рамках этой логики, *знание истинностных значений посылок является достаточным условием знания истинностного значения заключения*, к которому это рассуждение привело.

ЛЕММА 8. *Следующие выводимости доказуемы в логике* $\boldsymbol{ACL}$.

Доказательство.

T.1 $A \Vdash A$

T.2 $\vdash A \Longrightarrow \Vdash A$

T.3 $\vdash A \Longrightarrow (\Gamma, A \Vdash B \Longrightarrow \Gamma \Vdash B)$

T.4 $\vdash \neg A \Longrightarrow (\Gamma, A \Vdash B \Longrightarrow \Gamma \Vdash B)$

T.5 $\vdash A \equiv B \Longrightarrow (\Gamma \Vdash A \Longrightarrow \Gamma \Vdash B)$

T.6 $\vdash A \equiv B \Longrightarrow (\Gamma, B \Vdash C \Longrightarrow \Gamma, A \Vdash C)$

T.7 $\Gamma, A \Vdash B \Longleftrightarrow \Gamma, \neg A \Vdash B$

T.8 $\Gamma \Vdash A \Longleftrightarrow \Gamma \Vdash \neg A$

T.9 $A, B \Vdash A \vee B$

T.10 $\Gamma \Vdash A \Longrightarrow \Gamma, B \Vdash A$

T.1 $A \Vdash A$

1. $\vdash A \equiv A$	- КИВ
2. $A \Vdash A$	- из 1 по R.1

T.2 $\vdash A \Longrightarrow \Vdash A$

+1. $\vdash A$	
2. $\vdash (A \vee \neg A) \equiv A$	- из 1 по КИВ
3. $A \vee \neg A \Vdash A$	- из 2 по R.1
4. $\Vdash A$	- из 3, A.1 по R.2

T.3 $\vdash A \Longrightarrow (\Gamma, A \Vdash B \Longrightarrow \Gamma \Vdash B)$

+1. $\vdash A$

+2. $\Gamma, A \Vdash B$

3. $\Vdash A$ - из 1 по T.2

4. $\Gamma \Vdash B$ - из 2, 3 по R.2

T.4 $\vdash \neg A \Longrightarrow (\Gamma, A \Vdash B \Longrightarrow \Gamma \Vdash B)$

+1.$\vdash \neg A$

+2. $\Gamma, A \Vdash B$

3. $\Vdash \neg A$ - из 1 по T.2

4. $\Vdash \neg\neg A$ - из 3, A.3 по R.2

5. $\vdash \neg\neg A \equiv A$ - КИВ

6. $\neg\neg A \Vdash A$ - из 5 по R.1

7. $\Vdash A$ - из 4, 6 по R.2

8. $\Gamma \Vdash B$ - из 2, 7 по R.2

T.5 $\vdash A \equiv B \Longrightarrow (\Gamma \Vdash A \Longrightarrow \Gamma \Vdash B)$

+1. $\vdash A \equiv B$

+2. $\Gamma \Vdash A$

3. $A \Vdash B$ - из 1 по R.1

4. $\Gamma \Vdash B$ - из 2, 3 по R.2

T.6 $\vdash A \equiv B \Longrightarrow (\Gamma, B \Vdash C \Longrightarrow \Gamma, A \Vdash C)$

+1. $\vdash A \equiv B$

+2. $\Gamma, B \Vdash C$

3. $A \Vdash B$ - из 1 по R.1

4. $\Gamma, A \Vdash C$ - из 3, 2 по R.2

T.7 $\Gamma, A \Vdash B \Longleftrightarrow \Gamma, \neg A \Vdash B$

+1. $\Gamma, A \Vdash B$

2. $\neg A \Vdash \neg\neg A$ - A.3

3. $\vdash \neg A \equiv \neg\neg A$ - КИВ

4. $\neg A \Vdash A$ - из 2, 3 по T.5

5. $\Gamma, \neg A \Vdash B$ - из 4, 1 по R.2

+1. $\Gamma, \neg A \Vdash B$

2. $A \Vdash \neg A$ - A.3

3. $\Gamma,\ A \Vdash B$ - из 2, 1 по R.2

T.8 $\Gamma \Vdash A \Longleftrightarrow \Gamma \Vdash \neg A$

+1. $\Gamma \Vdash A$

2. $A \Vdash \neg A$ - A.3

3. $\Gamma \Vdash \neg A$ - из 1, 2 по R.2

+1. $\Gamma \Vdash \neg A$

2. $\neg A \Vdash \neg\neg A$ - A.3

3. $\vdash A \equiv \neg\neg A$ - КИВ

4. $\neg A \Vdash A$ - из 2, 3 по T.5

5. $\Gamma \Vdash A$ - из 1, 4 по R.2

T.9 $A, B \Vdash A \vee B$

1. $\neg A, \neg B \Vdash \neg A\ \&\ \neg B$ - A.2

2. $\neg A, \neg B \Vdash \neg(\neg A\ \&\ \neg B)$ - из 1 по T.8

3. $\vdash \neg(\neg A\ \&\ \neg B) \equiv A \vee B$ - КИВ

4. $\neg A, \neg B \Vdash A \vee B$ - из 3 по T.5

5. $A, B \Vdash A \vee B$ - из 4 по T.7

Т.10 $\Gamma \Vdash A \Longrightarrow \Gamma, B \Vdash A$	
$+1.\ \Gamma \Vdash A$	
2. $A, B \vee \neg B \Vdash A\&(B \vee \neg B)$	- A.2
3. $\vdash A\&(B \vee \neg B) \equiv A$	-КИВ
4. $A, B \vee \neg B \Vdash A$	- из 2, 3 по Т.5
5. $B, \neg B \Vdash B \vee \neg B$	- Т.9
6. $B \Vdash B \vee \neg B$	- из 5 по Т.7
7. $A, B \Vdash A$	- из 4, 6 по R.2
8. Γ,$B \Vdash A$	- из 1, 7 по R.2

Лемма доказана. Q.E.D.

Следующая теорема дает ответ на вопрос о том, достаточны ли принятые нами способы умозаключений для представления всех возможных выводов, которые согласуются с новым понятием следования?

ТЕОРЕМА 9. ***Логика ACL полна***. *Если* $\Gamma \models A$, *то* $\Gamma \Vdash A$.

Доказательство. Пусть $\Gamma = \{B_1, \ldots, B_k\}$, и существует такая булева функция f, что для произвольного приписывания истинностных значений v имеет место $v(A) = f(v(B_1), \ldots, v(B_k))$. Это означает, что существует состоящая из формул $B_1, \ldots, B_k$ булева комбинация A', которая эквивалентна A.

Доказательство будем проводить индукцией по степени формулы A', рассматривая формулы $B_1, \ldots, B_k$ как атомарные.

Возможны четыре случая:

[1] $A' = B_i$	$f(v(\Gamma)) = v(B_i)$
1. $B_i \Vdash B_i$	- Т.1
2. $B_1, \ldots, B_k \Vdash B_i$	- из 1 по Т.10

[2] $A' = \neg B$	$f(v(\Gamma)) = 1 - g(v(\Gamma))$
$+1.\ \Gamma \Vdash B$	- инд. доп
2. $\Gamma \Vdash \neg B$	- из 1 по Т.8

[3] $A' = B\&C$	$f(v(\Gamma)) = \min(g(v(\Gamma)), h(v(\Gamma)))$
+1. $\Gamma \Vdash$ B	- инд. доп.
+2. $\Gamma \Vdash$ C	- инд. доп.
3. $B, C \Vdash B\&C$	- A.2
4. $\Gamma \Vdash B\&C$	- из 1, 2, 3 по R.2

[4] $A' = B \vee C$	$f(v(\Gamma)) = \max(g(v(\Gamma)), h(v(\Gamma)))$
+1. $\Gamma \Vdash B$	- инд. доп.
+2. $\Gamma \Vdash C$	- инд. доп.
3. $B, C \Vdash B \vee C$	- T.9
4. $\Gamma \Vdash B \vee C$	- из 1, 2, 3 по R.2

Теорема доказана. Q.E.D.

Возможна натуральная **ACN** формулировка логики.
Правила вывода:
N.1 $\Longrightarrow A \vee \neg A$
N.2 $A \Longrightarrow \neg A$
N.3 $A, B \Longrightarrow A\&B$
N.4 ($\vdash A \equiv B$ и $A) \Longrightarrow B$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Выводом из множества формул Γ формулы A в логике **ACN** называется непустая конечная последовательность формул $< A_1, A_2, \ldots, A_k >$, каждая из которых либо принадлежит множеству Γ, либо получена из предыдущих формул последовательности по одному из правил вывода N.1–N.3, либо классически эквивалентна одной из предыдущих формул последовательности N.4, и конечным элементом последовательности является формула $A \quad (A_k = A)$.

Доказательство эквивалентности двух формулировок не представляет никакой трудности. Легко показать, что выводимость $\Gamma \Vdash A$ доказуема в **ACL**, е. т. е. существует натуральный вывод формулы A из множества формул Γ в логике **ACN**.

Мы специально не называем множество формул Γ множеством гипотез, так как понятие гипотезы несет ненужную смысловую нагрузку, предполагая, по крайней мере, веру в ее истинность. Для нас же истинностные значения формул множества Γ не важны.

2 Теории на основе логики ACL

Ценность классической логики заключается не столько в ней самой, сколько в том, что на ее основе мы можем строить теории, принимая в качестве дополнительных аксиом формулы, не являющиеся логически общезначимыми. Возможны ли аналогичные построения на основе логики **ACL**? Да, возможны. Для построения теорий на базе логики **ACL** мы добавляем к логическим аксиомам-выводимостям дополнительные постулаты-выводимости, а на уровне семантики каждому такому постулату сопоставляем свою булеву функцию, позволяющую вычислить истинностное значение заключения на основе истинностных значений посылок.

$\Sigma_1 \Vdash A_1 \quad -\forall v(v(A_1) = f_1(v(\Sigma_1))$

$\Sigma_2 \Vdash A_2 \quad -\forall v(v(A_2) = f_2(v(\Sigma_2))$

...

$\Sigma_n \Vdash A_n \quad -\forall v(v(A_n) = f_n(v(\Sigma_n))$

Если сравнить это построение с построением теорий в классической логике, то можно провести следующее различие. В классической логике, добавляя новые аксиомы, мы ограничиваем множество моделей, в которых они истинны, и тем самым увеличиваем информативность теории. В логике **ACL** ситуация несколько иная. Каждая новая аксиома в ней содержит информацию о том, как связать булевой функцией посылки и заключение. Если теории на базе классической логики можно назвать теориями знания, то теории на базе **ACL** являются теориями умений. Каждая новая аксиома-выводимость фиксирует некоторое умение. **ACL**-теория — это некоторое множество алгоритмов, а не множество формул, которые могут быть истинными или ложными. Относительно набора внелогических постулатов-выводимостей имеет смысл лишь вопрос о том, действительно ли сопоставленные им алгоритмы решают именно те задачи, которые им атрибутируются?

Рассмотрим теорию, состоящую из следующих постулатов-выводимостей:

P.1 $p \Vdash q \quad -v(q) = id(v(p))$

P.2 $p \Vdash s \quad -v(s) = id(v(p))$

P.3 $s \Vdash q \quad -v(q) = 1 - v(s)$

Очевидно, что в ней мы можем вывести $p \Vdash q$ двумя способами. В первом случае вывод состоит из одного шага — это просто постулат P.1. Во втором случае наш вывод будет состоять из применения правила R.2 к постулатам P.2 и P.3. При этом в первом случае мы имеем $v(q) = id(v(p))$, а во втором — $v(q) = 1 - id(v(p))$. Налицо явное противоречие. Тем не менее, оно не является критическим, т.е. не разрушает всю теорию. В этой теории мы не можем вывести все что угодно, в частности, мы не выведем ни $q \Vdash s$, ни $q \Vdash p$. Противоречие остается локальным и всего лишь сигнализирует о том, что на семантическом уровне постулаты P.1–P.3 не слишком хорошо согласованы друг с другом и требуют уточнения. То есть теория остается, а требуется изменить семантику. Можно привести живой пример для иллюстрации сказанного. Когда-то каждый врач умел делать кровопускание, которое, как считалось, помогает чуть ли не при всех болезнях. Позже обнаружилось, что в некоторых случаях кровопускание может ухудшить состояние больного. В результате были уточнены те условия, при которых кровопускание приносит пользу или вред, и его применение было продолжено, но в ограниченных случаях.

Попробуем проанализировать данный пример с более общих позиций. В случае чистой логики **ACL** семантическая связь между посылками и заключением выводимости основана исключительно на булевых функциях, соответствующих логическим связкам, и потому проблем не возникает. Легко показать, что для каждой доказуемой выводимости вида $B_1, \ldots, B_k \Vdash A$ формула A эквивалентна некоторой булевой комбинации формул $B_1, \ldots, B_k$. Поэтому истинностное значение формулы A однозначно определяется исходя из значений формул $B_1, \ldots, B_k$, а если быть более точным, то исходя из истинностных значений, приписанных пропозициональным переменным, входящим в эти формулы. Если же мы переходим к построению теорий на базе логики **ACL**, то ситуация меняется, так как формула заключения постулата-выводимости, как правило, не является логически эквивалентной никакой булевой комбинации посылок. Простой пример — постулат P.1. Поэтому смысл доказуемых выводимостей в теориях меняется. На уровне семантики мы можем рассматривать лишь частичные функции приписывания истинностных значений, достаточные для того, чтобы означить все формулы посылок. Заключение же постулата-выводимости на семантическом уровне говорит нам о том, как эта частичная функция может быть расширена. В случае применения постулата P.1 нам достаточно рассмотреть лишь две частичные функции приписывания истинностных значений v_1 и v_2, которые определены лишь на переменной p и сопоставляют ей $v_1(p) = 1$ и $v_2(p) = 0$. Семантика данного постулата требует расширить эти функции до v_{1_2} и v_{2_2} и определить их на переменной q таким образом, что $v_{1_2}(q) = v_{1_2}(p) = v_1(p) = 1$ и $v_{2_2}(q) = v_{2_2}(p) = v_2(p) = 0$. В этом смысле логика умений действительно дает приращение информации от посылок к заключениям, что классической логике несвойственно.

Возможны и более сложные случаи. Рассмотрим пример со следующим постулатом:

P.4 $p \Vdash q\&s$ - $v(q\&s) = id(v(p))$

Даны две частичные функции v_1 и v_2, которые определены лишь на переменной p таким образом, что $v_1(p) = 1$ и $v_2(p) = 0$. В этом случае расширение функции v_1 до функции v_{1_2}, определенной также на переменных q и s, определено однозначно $v_{1_2}(q) = v_{1_2}(s) = v_{1_2}(p) = v_1(p) = 1$. Функция v_2 имеет три возможных расширения v_{2_2}, v_{2_3} и v_{2_4}:

1. $v_{2_2}(q) = v_{2_2}(p) = v_2(p) = 0, \quad v_{2_2}(s) = 1$
2. $v_{2_3}(s) = v_{2_3}(p) = v_2(p) = 0, \quad v_{2_3}(q) = 1$
3. $v_{2_4}(q) = v_{2_4}(s) = v_{2_4}(p) = v_2(p) = 0$

Все четыре функции v_{1_2}, v_{2_2}, v_{2_3} и v_{2_4} удовлетворяют семантическому условию для данного постулата.

Теперь становится понятным, когда постулаты теории могут вступать в противоречие друг с другом. Это случается тогда, когда не существует ни одного приписывания истинностных значений, которое одновременно удовлетворяло бы семантическим условиям всех постулатов.

Приведем примеры из реальной человеческой практики, которая может быть охарактеризована с точки зрения логики умений. Самый яркий пример — это современная медицина. Она представляет собой гигантскую по объему накопленного опыта и очень важную область деятельности, которую до сих пор невозможно описать и систематизировать с точки зрения логики. Как заметил несколько лет назад В.А. Смирнов, единственным теоретическим достижением в медицине является вакцинация с целью выработки иммунитета против различных инфекционных заболеваний. Все остальное — это просто набор рецептов или умений для различных конкретных случаев. Медицинские вузы не готовят профессиональных врачей. Полноценными врачами становятся лишь после многих лет ежедневной практики, с накоплением опыта в своей конкретной области. При этом опыт одного врача может вступать в явное противоречие с опытом другого врача, хотя в то же время оба могут похвастать хорошими результатами в диагностике и лечении заболеваний. С этим фактом уже столкнулись разработчики медицинских экспертных систем. Они знают, что для получения хорошей базы знаний лучше прибегнуть к опыту одного среднего специалиста, чем работать и консультироваться с несколькими высококлассными. Зачастую врачи даже не могут четко объяснить, почему в том или ином конкретном случае они принимают определенное решение. Они просто принимают решение — и все. Их частный опыт свидетельствует, что в этой ситуации данное решение наиболее оптимально. Полезно сравнить европейскую медицину с восточной. Там есть теория и есть однозначные правила объяснения, почему в тех или иных случаях необходимо поступать так, а не иначе. Европейская медицина очень неохотно пользуется опытом восточной из-за очень спекулятивных и неясных предпосылок, которые лежат в ее основе. Но факт остается фактом — практически вся европейская медицина — это набор умений, но не знаний, как мы их привыкли понимать.

В связи с этим уместно опять обратиться к книге А.М. Анисова [1], где он пишет о так называемой рецептурой математике.

«...математические знания на Древнем Востоке добывали и обосновывали без строгих рассуждений, т.е. без доказательств! Вместо доказательств учащиеся должны были усваивать разнообразные инструкции по решению математических задач. Это были своего рода рецепты получения ответов, поэтому такую математику и называют рецептурной»(с. 13).

Создается впечатление, что автор преклоняется перед красотой доказательной математики и забывает о том, что равное право на существование имеет вычислительная математика. Возможно, если бы влияние эллинизма не было исторически столь сильным и подавляющим, на Востоке развилась бы именно вычислительная математика, тем более что к этому уже были практические предпосылки. Читаем дальше:

«...числа древними представлялись наглядно, например, как ряды камешков или наборы геометрических точек. Результат сложения чисел n и m мог быть получен путем подсчета соответствующего числа камешков или точек»(с. 13).

Заметим, что если числа представлялись камешками или точками, то это уже была некоторая абстракция числа. То есть конкретный материальный носитель не был важен, он всего лишь служил для наглядного представления числа. Результат, полученный с помощью камешков, затем переносился на яблоки, рабов, мешки с мукой и пр. Как тут не вспомнить машину Тьюринга, в которой числа представляются посредством черточек на бумаге, и *результат сложения чисел n и m получается путем подсчета соответствующего числа черточек.* Не нужно было мешать их операциям с камешками. Для них это было естественно. Вот как описываются в книге [2] правила вычисления на абаке — древнем вычислительном устройстве, появившемся у греков в IV веке до нашей эры, то есть именно во времена походов Александра Македонского.

«...будем представлять себе “обычные” компьютеры устроенными примитивно, на уровне каменного века. Его регистры мы представляем себе как емкие нумерованные ящики, способные вместить произвольное число камешков — ни одного, один, два и т.д., так что [n] есть число камешков в ящике с номером n. В роли “машины” действует человек, способный к выполнению двух видов операций:

- добавить один камешек к их груде, лежащей в ящике с номером n, и

- забрать один камешек из груды, лежащей в ящике с номером n, если там вообще есть хоть что-нибудь»(с. 82).

Далее в [2] показывается, что с помощью такого «примитивного» устройства вычислимы все (!) рекурсивные функции. Народам Древнего Востока нужно было и дальше упражняться в счете на абаке, но на их беду пришли эллины со своими взглядами на то, что достойно внимания «истинного» ученого, а что — нет, и занятие счетом было прервано. Ученые рассуждали о вечных идеях, а счет был отдан людям более низкого звания — купцам и торговцам. Греки, находясь под гипнозом идей своих великих философов, оказались просто неспособны увидеть в абаке большее, нежели простое перекладывание камешков для вычисления $n + m$. Понадобилось пройти тысячелетиям, чтобы искусство счета вновь стало предметом научного анализа, возникла теория вычислимых функций и появились компьютеры.

Следующее утверждение А.М. Анисова [1] весьма неоднозначно:

> «Одним из отличительных признаков научного знания является доказательность. Отсюда получается, что рецептурное знание, в частности, рецептурная математика Древнего Востока, науки не образует и наукой не является. Математика стала наукой лишь тогда, когда древние греки открыли идею математического доказательства»(с. 15).

Если в качестве одного из обязательных признаков научного знания принять его доказательность в том же смысле, как понимал его Аристотель, и понимают его последователи вплоть до сегодняшнего дня, то вполне естественно, что математика Древнего Востока наукой не является. Но выше мы уже показали, что классическое определение отношения следования базируется на вполне определенных и давно устаревших философских предпосылках, имеет много недостатков и никоим образом не может претендовать на роль Богом данного и единственно правильного. В основе рецептурной математики лежит логика, аналогичная построенной нами логике **ACL**, отношение следования в которой имеет вычислительную природу. Путем построения выводов в такой логике легко синтезировать правила сложных вычислений на основе набора более простых. Вряд ли можно оспаривать тезис о том, что наука должна быть доказательной, но не следует сводить при этом понятие доказательства к тому специальному виду, как его понимали древние греки. Возможно, в данном случае более уместно было бы говорить не о доказательствах, а о дедукции, как более общем понятии.

В связи с этим в заключение мы хотели бы обратиться к работе В.А. Смирнова [3], в которой он рассматривает генетический метод построения научной теории. Дело в том, что развиваемый нами подход, если говорить о его идейной стороне, далеко не нов. К этому же в разное время, каждый по-своему, обращались и многие другие исследователи. В.А. Смирнова интересуют общие принципы построения таких теорий, суть которых он видит в следующем.

> «При генетическом подходе отправляются как от исходного от некоторых налично данных объектов и некоторой системы допустимых действий над объектами. В генетической теории процесс рассуждения представлен в "форме мысленного эксперимента о предметах, которые взяты как конкретно наличные"»(с. 423).

Он задается вопросом «Существует ли вообще аксиоматическое исчисление, полностью формализующее генетическую систему мышления»? Возможным ответом является логическое представление теории рекурсивных функций.

> «Но такой путь уточнения генетического метода построения научных теорий приводит нас к необходимости расширить область логического и сделать предметом изучения логики такие элементы, как действия, аналогично тому, как это имело место с отношениями, и такие формы мысли, как предписания и системы предписаний (алгоритмы). В этой связи ясно, что системы общерекурсивных функций (или эквивалентные им уточнения, как нормальные алгорифмы Маркова, машины Тьюринга и т.д.) являются логическми формализмами, т.е. формализмами, представляющими логический процесс в широком смысле. В таком случае под логическим мы понимаем не только доказательство (обоснование одних высказываний посредством других), но и процесс сведения одних "стратагем действия" к другим»(с. 430).

В.А. Смирнов делает интересное наблюдение.

> «Если мы обратимся к истории, то увидим, что так же как и аксиоматический, генетический метод имеет далекую родословную. В частности, мы считаем, что метод "Начал" Евклида и дедуктивный метод Декарта ближе к генетической форме дедуктивного метода, чем к аксиоматической.
>
> Обращаясь к античному миру, — а в нем умозрительный, дедуктивный метод был господствующим, — мы обнаруживаем не одну, а три концепции дедуктивного метода, три теории доказательств: платоновскую, аристотелевскую

и евклидову. Первые две можно рассматривать как прототипы современного аксиоматического метода. Но концепция, проводимая в "Началах" Евклида, скорее является прототипом генетического метода, чем аксиоматического, хотя впоследствии "Начала" Евклида толковались в духе аксиоматического метода. Тот факт, что "Начала" Евклида не являются прототипом осуществления аксиоматического метода, осознается рядом логиков и математиков.

...Для Евклида изучаемые геометрические объекты не имеют идеального существования. Он не предписывал геометрическим объектам идеального существования, как это делал Платон.

Евклид исходит из элементарных объектов (точки, отрезки) и определенных операций, посредством которых образуются из первичных элементов объекты теории. Постулаты и выражают возможность осуществления определенных операций»(с. 431).

В конце статьи В.А. Смирнов перечисляет ряд выводов, к которым он пришел. Мы процитируем три из них.

«2. В основе генетической системы мышления лежат рекурсивные (алгоритмически развертывающиеся) процессы. Процессы умозаключения мы рассматриваем как один из видов логических процессов, причем сами умозаключения обосновываются алгоритмическими процессами над объектами теории.

6. В настоящее время актуальны разработка генетического метода с общелогических позиций, а также анализ возможностей его применения вне проблем обоснований математики. Актуальность этих проблем диктуется во многом развитием вычислительной техники и ее применениями.

7. Наконец, анализ генетического метода приводит вплотную к задачам создания конструктивной семантики и рассмотрения теории алгоритмов как части логики»(с. 435-436).

Мы не уверены, что В.А. Смирнов согласился бы с нами во всем, и потому не будем утверждать, что развиваем его идеи. Мы сами не во всем с ним согласны, и это нормально. Наши возможные ошибки и заблуждения — это именно наши возможные ошибки и заблуждения. В то же время, очевидно, что проблематика, которую затронул в своей статье В.А. Смирнов, теснейшим образом связана с тем, что интересует и нас. До сих пор логика развивалась в основном как дескриптивная в своей основе, лишь относительно недавно с возникновением интуиционизма и конструктивного направления в математике был совершен отход от этого. Тем не менее, предлагаемые ими решения, на наш взгляд, половинчаты, так как они всего лишь пытаются использовать результаты теории вычислимости, а не включают ее в себя. Генетический же подход и подход логики умений, как мы ее назвали, непосредственно включают в себя теорию вычислимости.

Все сказанное выше о логике **ACL** не предполагает, что ее построение завершено и на этом можно остановиться. Наоборот, естественным образом возникает целый ряд задач, решение которых может привести к новым интересным результатам. Перечислим часть этих задач.

- Провести анализ принципов построения теорий на базе **ACL**. В частности, имеет смысл подумать над обобщением определения понятия следования для теорий.
- Построить теорию дедукции.
- Построить обобщение логики **ACL**, в котором семантические условия постулатов-выводимостей задаются не всюду определенными, а частичными функциями. Если вспомнить правило modus ponens из классической логики, то семантически это частичная функция, определенная лишь для того случая, когда обе посылки истинны. Лишь при этом мы имеем право перейти от A и $A \supset B$ к B.
- Построить расширение **ACL** с пропозиционального уровня до уровня логики предикатов.
- Рассмотреть другие возможные обобщения логики **ACL**.

История не знает сослагательного наклонения, но если бы Платону и Аристотелю не было свойственно пренебрежительное отношение к изменяющемуся миру явлений, и если бы последующие поколения не были склонны столь послушно принимать все, что было сказано их предшественниками, пусть даже и великими, то и будущее развитие науки и культуры могло бы пойти совсем в другом направлении. Нас бы сейчас не волновали многие псевдопроблемы теории множеств и арифметики — существования бесконечных множеств, полноты и непротиворечивости (возможно, что теория множеств вообще не была бы создана, ибо она является порождением платонистического взгляда на мир), а волновали бы совсем другие проблемы, те, которые изучаются в рамках теории вычислимых функций —

существования вычислимых функций, сложности вычислений и др. Но об этом можно только гадать, так как история не знает сослагательного наклонения.

Литература

[1] *Анисов А.М.* Современная логика. М., 2002.
[2] *Булос Дж., Джеффри Р.* Вычислимость и логика. Пер. с англ. М., Мир, 1994.
[3] *Смирнов В.А.* Генетический метод построения научной теории // Логико-философские руды В.А. Смирнова/ под ред. В.И. Шалака. М.: Эдиториал УРСС, 2001.
[4] *Шалак В.И.* Альтернативное определение логического следования // Логические исследования. Вып. 13. М.: Наука, 2007.