Непрерывная логика. Основные понятия

В.И. Левин

ABSTRACT. We consider the Continuous Logic and its algebras and present the basic laws of quasiboolean algebra of continuous logic. We also discuss the difference between finite-valued logic and continuous logic.

1 Введение

В последние годы было выяснено, что математический аппарат непрерывной логики может быть с успехом применен для количественного исследования многих устройств и систем. В связи с этим в данной статье-обзоре дано общее описание непрерывной логики, ее задач и методов, и определены ее основные операции. Описана алгебра непрерывной логики, перечислены ее основные функции с 1, 2 и 3 переменными. Изложены законы этой логики, отмечено их отличие от законов дискретной двузначной логики. Представлены проблемы перечисления всех непрерывно-логических функций от заданного числа переменных и представления этих функций в стандартной форме. Показано отличие этих форм от соответствующих в двузначной логике. Описаны процедуры минимизации непрерывно-логических функций и их декомпозиции на функции с меньшим числом переменных. Отмечены особенности этих процедур по сравнению с соответствующими в двузначной логике. Даны постановки и методы решения задач анализа и синтеза непрерывно-логических функций. Изложены основы дифференциального и интегрального исчисления для непрерывной логики. Показано наличие у любой непрерывно-логической функции точек, где производная не существует. Описана проблема полноты для непрерывной логики, имеющиеся здесь результаты и их отличие от аналогичных в дискретном случае.

Непрерывная логика (НЛ) вводится как естественное обобщение дискретной логики (ДЛ). При этом большинство законов ДЛ остается в силе и для НЛ. Однако операцию отрицания НЛ нельзя определить так, чтобы она была дополнением, как, например, в двузначной логике, т.е. чтобы выполнялись законы исключенного третьего и противоречия. Поэтому структурно НЛ существенно отличается от двузначной ДЛ. Это и непрерывность переменных приводит к определенным отличиям НЛ от ДЛ в номенклатуре решаемых задач и методике их решения. На сегодня НЛ сложилась как самостоятельная научная дисциплина, характер которой определяется потребностями ее гармоничного развития как математической дисциплины и потребностями ее многочисленных приложений, охватывающих чуть ли не все области человеческой деятельности: математика (аппроксимация функций, геометрия, теория множеств, теория чисел, интервальный анализ); техника (расчет электрических цепей; синтез функциональных генераторов и АЦП, расчет аналоговых и цифровых устройств, моделирование формы деталей; надежность, диагностика и техническое обслуживание); системы (теория систем обслуживания, распознавание образов и анализ сцен, принятие решений, обработка информации, синхронизация); экономика (дискретная оптимизация, теория расписаний, моделирование экономических систем), биология (моделирование нейронных структур), социология (моделирование динамики поведения коллектива); политология (моделирование динамики общества), история (моделирование потоков исторических событий). Во всех вышеперечисленных областях применение НЛ позволило либо впервые получить аналитическое решение задачи, либо прийти к решению, существенно лучшему, чем известные, в отношении обозримости при высокой размерности задачи и/или трудоемкости ее решения.

Основными задачами НЛ являются: 1) перечисление всех функций НЛ с данным числом аргументов; 2) представление функций НЛ в стандартной форме (в т.ч. однозначное представление); 3) выделение элементарных функций НЛ; 4) минимизация и декомпозиция функций НЛ; 5) анализ и синтез функций НЛ; 6) решение уравнений и неравенств НЛ; 7) дифференцирование и интегрирование функций НЛ; 8) установление полноты системы функций НЛ. Задачи 1–4 по постановке (и частично по методам решения) аналогичны соответствующим задачам ДЛ. Задачи 5–8 специфичны для НЛ.

Для получения новых результатов в НЛ используют ряд прямых методов: 1) вычисление таблицы значений логического выражения; 2) эквивалентные преобразования логических выражений; 3) сочленение частных логических выражений в общее; 4) расчленение общего логического выражения на несколько частных. Кроме того, используют метод погружения алгебры НЛ в более общую дистрибутивную структуру, с привлечением методов теории структур.

2 Общее описание непрерывной логики

Пусть $C = [A, B]$ замкнутый интервал с серединой $M = (A + B)/2$. Основные операции НЛ определяются на C в виде

$$\begin{aligned} &a \vee b = \max(a, b) &&\text{(дизъюнкция)},\\ (1)\qquad &a \wedge b = \min(a, b) &&\text{(конъюнкция)},\\ &\overline{a} = 2M - a &&\text{(отрицание)}. \end{aligned}$$

Знак $\wedge$ часто не ставится. Реже в качестве базовых выбирают операции включения $a \supset b = (\overline{a} + b) \wedge B$, импликации $a \to b = \overline{a} \vee b$, эквивалентности $(a \equiv b) = (a \vee \overline{b})(\overline{a} \vee b)$, неэквивалентности $(a \not\equiv b) = a\overline{b} \vee \overline{a}b$, Шеффера $a|b = \overline{ab}$, Вебба $a \downarrow b = \overline{a \vee b}$, противоречия $(a \neq a) = a\overline{a}$, тавтологии $(a \equiv a) = a \vee \overline{a}$, запрета $(a \not\Rightarrow b) = a\overline{b}$. Алгебры, образуемые множеством C вместе с теми или иными базовыми операциями на нем, называются алгебрами НЛ. Любая функция вида $C^n \to C$, в форме суперпозиции конечного числа базовых операций данной алгебры НЛ, примененных к аргументам $x_1, ..., x_n \in C$, называется функцией НЛ. Число функций НЛ конечно, хотя множество всех функций вида $C^n \to C$ является бесконечным.

Наиболее разработанная алгебра НЛ – квазибулева алгебра

$$(2)\quad \Delta = (C; \vee, \wedge, ^{-}).$$

Любая функция непрерывной логики в алгебре (2) на любом наборе аргументов $a_1, ..., a_n$ принимает значение одного из аргументов или его отрицания. Поэтому задать такую функцию можно таблицей значений, в которой каждому варианту упорядочения значений множества аргументов ставится в соответствие тот аргумент a_i или его отрицание $\overline{a}_i$, значение которого принимает функция. От табличного можно перейти к аналитическому представлению функции, используя метод сочленения. Обратный переход осуществляется методом расчленения.

Число $P(n)$ функций НЛ от n аргументов в квазибулевой алгебре растет с увеличением n весьма быстро: $P(0) = 2, P(1) = 6, P(2) = 84, P(3) = 43918$. Для $n = 0$ эти функции-константы

$$(3) \quad y_0 = A, y_1 = B.$$

Для $n = 1$ это константы y_0, y_1 и еще 4 функции, существенно зависящие от аргумента x

$$(4) \quad y_2 = x, y_3 = \overline{x}, y_4 = x \vee \overline{x}, y_5 = x\overline{x}.$$

Для $n = 2$ это 2 константы (3), 8 функций (4), зависящих от одного аргумента (x_1 или x_2), 10 функций, зависящих от двух аргументов

$$(5) \quad \begin{aligned} &y_{10} = x_1 \vee x_2,\ y_{11} = x_1x_2,\ y_{12} = (x_1 \vee \overline{x}_2)(\overline{x}_1 \vee x_2),\\ &y_{13} = x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1x_2,\ y_{14} = \overline{x_1x_2},\ y_{15} = \overline{x_1 \vee x_2},\\ &y_{16} = \overline{x}_1 \vee x_2,\ y_{17} = x_1 \vee \overline{x}_2,\ y_{18} = \overline{x}_1x_2,\ y_{19} = x_1\overline{x}_2, \end{aligned}$$

и еще 64 функции, зависящие от 2 аргументов, получаемые суперпозицией перечисленных 20 функций, либо составлением таблицы значений функции и последующим переходом к ее аналитическому представлению. Для $n = 3$ функции НЛ включают все упомянутые выше функции, зависящие не более чем от 2 аргументов, и все функции, существенно зависящие от 3 аргументов. Из последних наиболее употребительны дизъюнкция и конъюнкция

$$(6) \quad \begin{aligned} &y = x_1 \vee x_2 \vee x_3 = \max(x_1, x_2, x_3),\\ &y = x_1x_2x_3 = \min(x_1, x_2, x_3), \end{aligned}$$

медиана и ее отрицание (инверсия)

$$(7) \quad \begin{aligned} &y = \mathrm{med}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3) = \mathrm{x}_1\mathrm{x}_2 \vee \mathrm{x}_1\mathrm{x}_3 \vee \mathrm{x}_2\mathrm{x}_3,\\ &y = \overline{\mathrm{med}}(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3, \end{aligned}$$

функции Шеффера и Вебба

$$(8) \quad y = \overline{x_1 x_2 x_3}, y = \overline{x_1 \vee x_2 \vee x_3},$$

элементарные трехместные дизъюнкция и конъюнкция

$$(9) \quad y = x_1 \vee \overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_2 \vee x_3 \vee \overline{x}_3, y = x_1 \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_2 x_3 \overline{x}_3.$$

Остальные функции, существенно зависящие от 3 аргументов, можно получить суперпозицией перечисленных выше функций либо составлением таблицы значений функции и последующим переходом к ее аналитическому представлению. Аналогично строятся множества функции НЛ от большего числа аргументов.

Заметим, что число $P(n)$ функций НЛ от n аргументов растет при увеличении n гораздо быстрее, чем число $Q(n)$ функций двоичной логики. Например, учитывая, что $Q(0) = 2, Q(1) = 4, Q(2) = 16, Q(3) = 256$, получаем

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} 1\,, & n = 0, \\ 1{,}5\,, & n = 1, \\ 5{,}25\,, & n = 2, \\ 171{,}55\,, & n = 3. \end{cases}$$

Поэтому изучать свойства функций НЛ путем их перебора, как это делается в двоичной логике, нельзя. Так что ограничиваются изучением наиболее важных типовых функций НЛ.

Основные операции НЛ впервые рассмотрел Р. Мак-Нотон. Общее описание НЛ и ее математический аппарат разработали С.А. Гинзбург, В.И. Левин, П.Н. Шимбирев. Обзор соответствующих работ приведен в [1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12].

3 Законы непрерывной логики

НЛ есть непосредственное обобщение ДЛ на случай непрерывного множества-носителя C. Поэтому большинство законов ДЛ сохраняется и в НЛ:

$$(10) \qquad a \vee a = a, aa = a \quad \text{(тавтология)},$$

$$(11) \qquad a \vee b = b \vee a, ab = ba \quad \text{(переместительный)},$$

(12) $$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c), (ab)c = a(bc)$$
(сочетательный),

(13) $$a(b \vee c) = ab \vee ac, a \vee bc = (a \vee b)(a \vee c)$$
(распределительный),

(14) $$\overline{a \vee b} = \overline{a}\overline{b}, \overline{ab} = \overline{a} \vee \overline{b} \quad \text{(де Моргана)},$$

(15) $$a \vee ab = a, a(a \vee b) = a \quad \text{(поглощение)},$$

(16) $$\overline{\overline{a}} = a \quad \text{(двойное отрицание)},$$

(17) $$aA = A, aB = a, a \vee A = a, a \vee B = B$$
(действия с константами),

(18) $$a\overline{a}(b \vee \overline{b}) = a\overline{a}, a\overline{a} \vee (b \vee \overline{b}) = b \vee \overline{b}$$
(Клини).

Однако законы противоречия и исключенного третьего ДЛ здесь не действуют и заменяются на следующие законы

(19) $$a\overline{a} = M - |a - M|\,, \quad a \vee \overline{a} = M + |a - M|\,.$$

Так как операции НЛ применяются к непрерывным величинам, естественно их применение совместно с алгебраическими операциями над непрерывными величинами: сложением и умножением.

При комбинировании операций НЛ со сложением и умножением появляются новые законы – распределительный при сочетании дизъюнкции и конъюнкции со сложением и умножением

(20) $$\begin{gathered} a + (b \vee c) = (a + b) \vee (a + c), \\ a + (b \wedge c) = (a + b) \wedge (a + c); \\ a - (b \vee c) = (a - b) \wedge (a - c), \\ a - (b \wedge c) = (a - b) \vee (a - c); \\ a \cdot (b \vee c) = a \cdot b \vee a \cdot c, \;\; a \cdot (b \wedge c) = a \cdot b \wedge a \cdot c; \\ -a \cdot (b \vee c) = (-a \cdot b) \wedge (-a \cdot c), \\ -a \cdot (b \wedge c) = (-a \cdot b) \vee (-a \cdot c); \\ \text{где } a, b, c \text{ положительны;} \end{gathered}$$

закон спуска отрицания на слагаемые

(21) $$\overline{a + b} = \overline{a} - b = \overline{b} - a$$

и др. Операции НЛ выражаются через алгебраические операции сложения и умножения при использовании нелинейных операций – единичной функции $I(x) = \begin{cases} 1, x \geqslant 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$ или модуля $|x|$. Так, дизъюнкция и конъюнкция НЛ выражаются в виде

$$(22) \quad a \vee b = 0,5[a + b + |a - b|], \ a \wedge b = 0,5[a + b - |a - b|].$$

Проверка законов (10)–(22) осуществляется перебором всех возможных вариантов упорядочения значений переменных и установлением для каждого варианта равенств левой и правой части.

Возможность выражения операций НЛ через алгебраические операции (см. формулы (1), (22)) означает наличие связей между алгеброй и логикой.

Обобщая ДЛ, сама НЛ есть частный случай дистрибутивной структуры с псевдодополнением (то есть с операцией отрицания, которая не есть дополнение, так как не выполняются законы исключенного третьего и противоречия). Значения непрерывных переменных НЛ, принадлежащих интервалу $[A, B]$, имеют интерпретацию, сходную с ДЛ: граничное значение $x = A$ $(x = B)$ считается мерой истинности абсолютно ложного (абсолютно истинного) высказывания, промежуточные значения x, $A < x < B$, считаются мерой истинности любого другого высказывания.

Некоторые основные законы НЛ для частного случая $C = [0, 1]$ указал Р. Мак-Нотон. В общем виде законы НЛ изучали С.А. Гинзбург, В.И. Левин и Е.И. Беркович. Обзор соответствующих результатов содержится в [1, 2, 4, 6, 8, 12].

4 Перечисление и стандартизация непрерывно-логических функций

Наиболее традиционными для логики задачами НЛ являются перечисление всех функций НЛ с данным числом аргументов и представление их в стандартной форме.

Перечисление всех функций НЛ в алгебре (2) требует указать для них соответствующие аналитические выражения. Для этого можно использовать двухэтапную процедуру: 1) перечисление таблиц значений функций (таблицы для всех функций имеют одинаковый порядок следования вариантов упорядочения аргументов $x_1, ..., x_n$ и их отрицаний $\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n$, отличаясь распределением значений функций, равных x_i или $\overline{x}_i$, между вариантами); 2) переход от таблиц к соответствующим аналитическим выражениям методом сочленения. Однако такой подход при $n \geqslant 3$ затруднителен. Поэтому на практике ограничиваются определенными классами функций НЛ, которые выделяют по признаку сходства с соответствующими классами функций ДЛ, простоты получения формулы, важности практического применения.

В качестве стандартных форм функции НЛ в алгебре (2) принимают дизъюнктивную и конъюнктивную нормальные формы (ДНФ и КНФ). Они отличаются от аналогичных форм двузначной ДЛ тем, что их элементарные конъюнкции (дизъюнкции) могут вместе с аргументом x_i включать и его отрицание $\overline{x}_i$ (см., например, (9)). Переход от любого аналитического представления функции НЛ к ее ДНФ или КНФ аналогичен соответствующему для функции двузначной ДЛ. Он состоит в случае ДНФ в: 1) спуске отрицаний на более простые выражения согласно законам (14), (16); 2) раскрытии скобок согласно 1-му закону (13), в случае КНФ – в: 1) таком же спуске отрицаний; 2) введении скобок согласно закону (13). Для упрощения получаемого представления функции используют законы (10), (15), (18).

ПРИМЕР 1. Перейдем от функции НЛ, заданной аналитически, к ее ДНФ.

$$(x_1x_2 \vee \overline{x}_2x_3)\overline{\overline{x}_1x_4} = (x_1x_2 \vee \overline{x}_2x_3)(x_1 \vee \overline{x}_4) =$$
$$= \underline{x_1x_2} \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee \underline{x_1x_2\overline{x}_4} \vee \overline{x}_2x_3\overline{x}_4 = x_1x_2 \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_2x_3\overline{x}_4.$$

В качестве однозначных стандартных (канонических) форм функций НЛ принимают канонические ДНФ и КНФ. ДНФ однозначно представляет функцию НЛ, если она тупиковая (несократимая) дизъюнкция неразложимых элементарных конъюнкций. В свою очередь, элементарная конъюнкция неразложима в дизъюнкцию конъюнкций, если она фундаментальна, т.е. непротиворечива (не содержит одновременно x_i и $\overline{x}_i$) или противоречива, но содержит все аргументы данной функции, в прямом x_i или инверсном $\overline{x}_i$ виде. Отсюда – алгоритм приведения любой ДНФ функции НЛ к канонической ДНФ: 1) выделить в

ДНФ все фундаментальные конъюнкции; 2) каждую нефундаментальную конъюнкцию k (она противоречива и содержит не все аргументы функций) представить дизъюнкцией фундаментальных конъюнкций, для чего взять ее конъюнкцию с подходящей дизъюнкцией вида $x_j \vee \overline{x}_j$ (что не изменит величины k, содержащей $x_i\overline{x}_i \leqslant M$, ибо $x_j \vee \overline{x}_j \geqslant M$) и раскрыть скобки; 3) из каждой пары сравнимых (в отношении $\leqslant$) конъюнкций ДНФ исключить меньшую. Полученная каноническая ДНФ по смыслу (но не по форме) аналогична совершенной ДНФ булевой функции.

ПРИМЕР 2. Преобразуем функцию НЛ, заданную в ДНФ, к канонической ДНФ:

$$y = x_2x_4 \vee x_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4 \vee x_1x_2\overline{x}_2x_3\overline{x}_3.$$

Здесь первые две конъюнкции – фундаментальные. Третья конъюнкция – нефундаментальная, при умножении на $x_4 \vee \overline{x}_4$ разлагается в $x_1x_2\overline{x}_2x_3\overline{x}_3x_4 \vee \vee x_1x_2\overline{x}_2x_3\overline{x}_3\overline{x}_4$. Полученные две фундаментальные конъюнкции поглощаются первыми двумя фундаментальными конъюнкциями заданной ДНФ функции y. Окончательно каноническая ДНФ функции

$$y = x_2x_4 \vee x_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4.$$

Любая функция непрерывной логики, отличная от фундаментальной конъюнкции, разложима, т.е. класс неразложимых (элементарных) функций НЛ в алгебре (2) состоит из одних фундаментальных конъюнкций.

Задание и перечисление функций НЛ изучали К.М. Кларк, Д. Дюбуа, А. Прад, А. Кандель, В.И. Левин, М. Мукайдоно, П.Н. Шимбирев (см. обзоры [3, 5, 6, 8, 9, 10, 11]). Представление функций НЛ в стандартной форме исследовали Ф.П. Препарата, А. Кандель, Д. Дюбуа, А. Прад, В.И. Левин, П.Н. Шимбирев (см. обзоры [3, 6, 8, 9]).

5 Минимизация и декомпозиция непрерывно-логических функций

Минимизация функций НЛ преследует ту же цель, что и минимизация функций ДЛ — приведение функций к форме с минимальным числом вхождений переменных.

Минимизация функций НЛ в алгебре (2) разработана лишь для функций, представленных в ДНФ. Ее задача – найти ДНФ с минимальным числом вхождений всех букв $x_i, \overline{x}_i$. Процедура минимизации аналогична соответствующей для булевых функций: 1) отыскание всех фундаментальных конъюнкций функции НЛ f (они играют роль элементарных конъюнкций СДНФ булевой функции) и представление f в канонической тупиковой форме; 2) отыскание всех простых импликант функции (как обычно, импликантой функции f считаем элементарную конъюнкцию k, такую, что $k \leqslant f$; если k не поглощается другими импликантами, она называется простой); 3) нахождение минимального покрытия множества фундаментальных конъюнкций множеством простых импликант (например, с помощью импликантных таблиц). Содержание шагов 1, 2 специфично для функций НЛ. О шаге 1 сказано выше. О шаге 2. В его основе — понятие консенсуса элементарных конъюнкций k_i: если $k_1 = x_i a$, $k_2 = \overline{x}_i b$, где a, b — конъюнкции других букв, то консенсус k_1 и k_2 — это множество таких противоречивых конъюнкций: 1) ab, (если она противоречива); 2) конъюнкции $x_i \overline{x}_i ab$, $i = \overline{1, n}$ (если ab непротиворечива). Если k_1, k_2 не представлены в указанном виде ни при каком i, консенсус $= 0$.

ПРИМЕР 3. Для элементарных конъюнкций $k_1 = x_1 \overline{x}_2 x_3$, $k_2 = x_2 \overline{x}_3$ консенсус $\{x_1 x_2 \overline{x}_2, x_1 x_3 \overline{x}_3\}$. Для элементарных конъюнкций $k_1 = x_1 x_2 x_3$, $k_2 = x_2 \overline{x}_3$ консенсус $\{x_1 x_2 x_3 \overline{x}_3, x_1 x_2 \overline{x}_2, x_1 \overline{x}_1 x_2\}$.

Отыскание всех простых импликант функции НЛ f, представленной в тупиковой ДНФ $f = \bigvee\limits_i k_i$, выполняется по такому алгоритму: 1) для некоторой пары (k_i, k_j) образуется консенсус; 2) к дизъюнкции $\bigvee\limits_i k_i$ добавляются все конъюнкции, полученные на шаге 1; 3) удаляются все конъюнкции k_a, входящие в другие конъюнкции k_b (т.е. $k_a \leqslant k_b$). Шаги 1–3 повторяются для новых пар (k_i, k_j) до тех пор, пока выражение функции f не перестанет изменяться. Окончательное выражение $f = \bigvee\limits_i \tilde{k}_i$ в качестве конъюнкций $\tilde{k}_i$ будет содержать все простые импликанты функции f.

В связи с быстрым ростом числа функций НЛ при увеличении числа их аргументов и сложностью их минимизации важное значение имеет задача декомпозиции этих функций.

Декомпозицией функции НЛ $f(x), x = (x_1, ..., x_n)$ называется представление f в виде композиции нескольких функций НЛ с меньшим числом аргументов

(23) $f(x) = F[f_m(x^m), ..., f_1(x^1), x^i], x^i \subset x, i = \overline{0, m}.$

Если множества $x^i, i = \overline{0, m}$ не пересекаются, декомпозиция называется разделительной, в противном случае — неразделительной. Представление (23) с $m = 1$ называется простой декомпозицией. На сегодня известен лишь алгоритм поиска простой декомпозиции функции НЛ в алгебре (2).

Вопросы минимизации и декомпозиции функций непрерывной логики исследовали А. Кандель, Д. Дюбуа, А. Прад, П.Н. Шимбирев (см. обзоры [3, 8, 9, 10]).

6 Анализ и синтез непрерывно-логических функций

Анализ и синтез функций НЛ отличаются от аналогичных задач в ДЛ.

Пусть D_x — область значений вектора аргументов $x = (x_1, ..., x_n)$, D_f — область значений функции НЛ $f(x)$ и имеется взаимно-однозначное соответствие

(24) $(x \in D_x) \Leftrightarrow (f(x) \in D_f).$

Анализом функции f называется нахождение в соответствии с (24) области D_x по заданным области D_f и функции $f(x)$. Синтезом функции $f(x)$ называется построение по заданным областям D_x и D_f такой функции НЛ f, которая реализует соответствие (24). Основные методы анализа разработаны для частных случаев, когда f — многоместная дизъюнкция или конъюнкция, а D_f — полуинтервал или интервал. Они основаны на следующих эквивалентностях

$$(25) \quad \begin{aligned} &\left(\bigvee_{i=1}^{n} x_i \geqslant a\right) \Leftrightarrow (x_1 \geqslant a \text{ или ... или } x_n \geqslant a); \\ &\left(\bigvee_{i=1}^{n} x_i \leqslant b\right) \Leftrightarrow (x_1 \leqslant b,\ ...,\ x_n \leqslant b); \\ &\left(\bigwedge_{i=1}^{n} x_i \geqslant a\right) \Leftrightarrow (x_1 \geqslant a,\ ...,\ x_n \geqslant a); \\ &\left(\bigwedge_{i=1}^{n} x_i \leqslant b\right) \Leftrightarrow (x_1 \leqslant b \text{ или ... или } x_n \leq b). \end{aligned}$$

В общем случае при произвольной функции НЛ f и ее области D_f применяют формальные методы, разбивая D_f на подобласти — полуинтервалы, решая для каждой соответствующие неравенства (см. §7) и объединяя результаты. Иногда анализ функции $f(x)$ понимают как отыскание по заданным f и областям $D_{x_1},...,D_{x_n}$ для аргументов $x_1,...,x_n$ (составляющим в совокупности область D_x) соответствующей области D_f (24). Эта постановка обратна рассматриваемой выше, а ее решение проще. Оно основано на эквивалентностях

$$\begin{aligned}(26)\qquad &(a \leqslant x_1 \leqslant b,\, c \leqslant x_2 \leqslant d) \Leftrightarrow\\ &(a \vee c \leqslant x_1 \vee x_2 \leqslant b \vee d,\, ac \leqslant x_1x_2 \leqslant bd),\\ &(a \leqslant x \leqslant b) \Leftrightarrow (2M - b \leqslant \overline{x} \leqslant 2M - a).\end{aligned}$$

Задача синтеза функции НЛ в общем случае не имеет единственного решения, а алгоритм ее точного решения неизвестен. Возможный путь отыскания решения таков: 1) отбросить требование $x \leqslant D_x$; 2) выбрать какую-либо типовую функцию $f(x)$; 3) проанализировать $f(x)$ по заданным условиям $f \in D_f$, найти соответствующее условие для $x : x \in D'_x$; 4) если $D_x \subseteq D'_x$, то $f(x)$ — решение задачи. В противном случае — переход к следующей функции $f(x)$ и т.д. Такой перебор при большом n невозможен, и тогда отказываются от требования $x \in D_x$, получая задачу синтеза: построить по заданной области D_f функцию $f(x)$, такую, что $f(x) \in D_f$. Но любая (кроме констант) функция НЛ $f(x)$ при подходящем x может принимать любое значение в C. В итоге получаем обычную задачу анализа: найти в соответствии с (24) область D_x по заданной области D_f и выбранной функции f.

Проблемами анализа и синтеза непрерывно-логических функций занимались А. Кандель [3], А. Коффман [5], П.И. Шимбирев [9], В.И. Левин [13, 15].

7 Решение уравнений и неравенств непрерывной логики

Уравнения и неравенства НЛ по смыслу аналогичны уравнениям и неравенствам ДЛ. Однако методы их решения особые, в связи с тем, что НЛ оперирует непрерывными множествами.

Уравнением (неравенством) НЛ называется уравнение (неравенство):

(27) $f(a,x) \leqq F(a,x)$,

где f и F — заданные различные функции НЛ, $a = (a_1, ..., a_k)$ — вектор параметров, $x = (x_1, ..., x_n)$ — вектор неизвестных. Частным решением уравнения (неравенства) (27) называется любой вектор x, для которого справедливо равенство (неравенство) (27), а общим решением — совокупность всех частных решений. Уравнения и неравенства НЛ классифицируются по числу неизвестных n и по сложности функций НЛ левой и правой частей, представленных в стандартной тупиковой ДНФ. Полное уравнение (неравенство) с 1 неизвестным в стандартной форме

(28) $ax \vee a'\overline{x} \vee bx\overline{x} \vee c \leqq dx \vee d'\overline{x} \vee lx\overline{x} \vee e.$

Наибольшее число неизвестных и их отрицаний в одной элементарной конъюнкции стандартизированного уравнения (неравенства) называется его порядком I. Для (28) $I = 2$. Уравнения (неравенства) с $I = 1$ называются линейными, а с $I \geqslant 2$ – нелинейными. Общий вид линейного уравнения (неравенства) с n неизвестными в стандартной форме

(29) $\left(\bigvee_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \vee \left(\bigvee_{i=1}^{n} a'_i \overline{x}_i\right) \vee c \leqq \left(\bigvee_{i=1}^{n} d_i x_i\right) \vee \left(\bigvee_{i=1}^{n} d'_i \overline{x}_i\right) \vee e.$

Уравнения (неравенства) НЛ делятся на содержащие и не содержащие отрицание неизвестных. Основным методом решения уравнений (неравенств) НЛ является последовательное расчленение их правых и левых частей, позволяющее заменить исходное уравнение (неравенство) эквивалентным объединением систем более простых уравнений и неравенств.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим уравнение (неравенство) вида (27), в котором последняя операция в левой части — дизъюнкция НЛ

$$f_1(a,x) \vee f_2(a,x) \leqq F(a,x).$$

Используя определение дизъюнкции НЛ, это уравнение (неравенство) можно расчленить, представив в виде эквивалентного объединения двух систем уравнений-неравенств

$$\left\{ \begin{array}{c} f_1(a,x) \geqslant f_2(a,x) \\ f_1(a,x) \leqq F(a,x) \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{c} f_1(a,x) < f_2(a,x) \\ f_2(a,x) \leqq F(a,x) \end{array} \right\}.$$

Здесь каждое полученное уравнение (неравенство) проще исходного, так как в одной части содержит меньше операций. Процесс упрощения можно продолжить расчленением правой части заданного уравнения (неравенства) и т.д. Этот процесс продолжается до получения нерасчленяемых уравнений и неравенств, дающих в совокупности решение заданного уравнения (неравенства).

Случай, когда последняя операция в левой или правой части заданного уравнения (неравенства) есть конъюнкция НЛ, рассматривается аналогично.

Теорию и методы решения уравнений и неравенств НЛ разработал В.И. Левин. Наиболее полные сведения по этому вопросу содержатся в [2]. Обзорные сведения можно также найти в [4–6, 8].

8 Дифференцирование и интегрирование непрерывно-логических функций

Как известно, функции ДЛ зависят от дискретных аргументов и потому не могут дифференцироваться и интегрироваться.

Функции НЛ зависят от непрерывных аргументов и потому могут дифференцироваться и интегрироваться. Трудность дифференцирования функций НЛ в том, что они всегда содержат точки излома, где производная не существует. Назовем функцию НЛ, образованную суперпозицией операций $\vee$ и $\wedge$ над аргументами x_i (и их отрицаниями), функцией 1-го рода (2-го рода). Точка $x = (x_1, ..., x_n)$ называется полурегулярной у функции 1-го рода, если она имеет ε-окрестность с постоянной упорядоченностью $x_1, ..., x_n$. Точка $x = (x_1, \overline{x}_1, ..., x_n, \overline{x}_n)$ называется регулярной у функции 2-го рода, если она имеет ε-окрестность с постоянной упорядоченностью $x_1, \overline{x}_1, ..., x_n \overline{x}_n$. Для полурегулярности точки x (регулярности точки x) необходимо и достаточно, чтобы ее координаты были строго упорядочены по величине. Справедливы следующие теоремы: 1) Любая функция НЛ 1-го рода имеет в каждой полурегулярной точке единственную производную по любому аргументу со значениями из множества

$\{0, 1\}$; 2) любая функция НЛ 2-го рода имеет в каждой регулярной точке единственную производную по любому аргументу со значениями из множества $\{1, -1, 0\}$; 3) любая функция НЛ f в каждой точке существования ее производных $\partial f/\partial x_i, i = \overline{1, n}$, имеет не более 1 производной, отличной от 0. Основным методом дифференцирования функций НЛ является их последовательное расчленение с получением совокупности более простых выражений, справедливых в соответствующих подобластях, и их дифференцированием. При необходимости используются также общие правила дифференциального исчисления (производная суммы, произведения и т.д.). Несколько примеров производных от функций НЛ:

$$
\begin{gathered}
x'_x = 1,\ (\overline{x})'_x = -1,\ (x \vee \overline{x})'_x = 1(x - M) - 1(M - x), \\
(x\overline{x})'_x = 1(M - x) - 1(x - M),\ x \neq M; \\
(x_1 \vee x_2)'_{x_1} = 1(x_1 - x_2),\ (x_1 x_2)'_{x_1} = 1(x_2 - x_1),\ x_1 \neq x_2.
\end{gathered}
\tag{30}
$$

Здесь $1(x)$ — единичная функция. Условие $x \neq M$ исключает нерегулярную точку $x = M$, в которой третья и четвертая из указанных производных не существуют. Дифференциальное исчисление в НЛ служит источником новых тождеств (законов). Они появляются, в частности, при дифференцировании законов алгебры НЛ и могут рассматриваться как дифференциально-разностные уравнения, определяющие различные функции НЛ. Например,

$$
(x_1 \vee x_2)'_{x_1} + (x_1 x_2)'_{x_1} = 1, \quad (x_1 \vee x_2)'_{x_1} \cdot (x_1 x_2)'_{x_1} = 0. \tag{31}
$$

Система из двух дифференциальных уравнений (31) определяет две функции НЛ — дизъюнкцию и конъюнкцию, которые являются решениями этой системы.

При дифференцировании функций НЛ с большим числом аргументов целесообразно приведение этих функций к стандартным формам, в которых дифференцируемая переменная выделена. От такой формы легко взять производную. Примеры выделенных форм в классе ДНФ:

$$
ax \vee d,\ b\overline{x} \vee d. \tag{32}
$$

Их производные

$$(33)\quad \begin{array}{l} (ax \vee d)'_x = 1(ax-d)\cdot 1(a-x), \quad ax \neq d, \quad x \neq a; \\ (b\overline{x} \vee d)'_x = 1(bx-d)\cdot 1(\overline{x}-b), \quad b\overline{x} \neq d, \quad \overline{x} \neq b. \end{array}$$

Для функций НЛ можно определить также производные высших порядков (2-го, 3-го и т.д.). При этом любая функция 1-го рода в каждой полурегулярной точке и любая функция 2-го рода в каждой регулярной точке имеют производные высших порядков и все они равны 0.

Функции НЛ, равно как и функции непрерывных переменных, можно интегрировать. Для этого подынтегральную функцию последовательно расчленяют, получая совокупность более простых выражений, справедливых в своих подобластях, где их интегрируют.

В случае необходимости используются также обычные правила интегрирования (интеграл от суммы, разбиение интервала интегрирования и т.д.). Получаемые интегралы в силу непрерывности функций НЛ всегда существуют.

Дифференциальное и интегральное исчисление для функций НЛ разработали и исследовали Е.И. Беркович и В.И. Левин. Обзор их работ приведен в [10, 13, 15].

9 Проблема полноты в непрерывной логике

В НЛ, как и в ДЛ, существует проблема полноты. Система функций НЛ $\{f_1, ..., f_m\}$ называется полной (базисом) в классе R, если любую функцию из R можно представить суперпозицией функций $f_1, ..., f_m$. В отличие от ДЛ, где R задан, а ищутся базисы, в НЛ обычно задан базис, а отыскивается класс R. Наиболее известные результаты здесь таковы. 1) Система функций $\{\vee, \wedge\}$ есть базис для класса R_1 тех функций вида $C^n \to C$, которые принимают значение одного из аргументов; 2) Система функций $\{\vee, \wedge, \overline{\ }\}$ есть базис для класса R_2 тех функций вида $C^n \to C$, которые принимают значение одного из аргументов или его отрицания; 3) Системы $\{\overline{x_1 x_2}\}$ и $\{\overline{x_1 \vee x_2}\}$ являются базисами для класса функций R_1; 4) Системы $\{\overline{x_1 x_2}, \overline{\ }\}$ и $\{\overline{x_1 \vee x_2}, \overline{\ }\}$ являются базисами для класса функций R_2; 5) Система функций $\{\vee, \wedge, \supset\}$ есть базис для класса R_3 тех функций вида $C^n \to C$, которые представимы в виде

$$(34)\quad y = \left[A \vee \left(b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i\right)\right] \wedge B,\ \text{где } b_0, ..., b_n - \text{целые числа.}$$

Классы функций НЛ R_1, R_2, R_3 являются различными конечными подмножествами бесконечного множества всех функций НЛ. Математически эти классы достаточно узкие. Однако практически они весьма важны, так как именно их элементарные операции НЛ (дизъюнкция, конъюнкция и др.) адекватны процессам, происходящим во многих реально существующих системах. Эта адекватность, вместе с полнотой этих операций НЛ, лежит в основе многочисленных применений НЛ к изучению математических, технических, экономических, социальных и других объектов.

Различные вопросы полноты систем функций НЛ изучали Р. Мак-Нотон, Ф.П. Препарата, В.И. Левин. Обзор соответствующих результатов приведен в [5, 6, 8, 12].

Литература

[1] *Гинзбург С.А.* Математическая непрерывная логика и изображение функций. М.: Энергия, 1968.

[2] *Левин В.И.* Введение в динамическую теорию конечных автоматов. Рига: Зинатне, 1975.

[3] *Kandel A., Lee S.C.* Fuzzy switching and automata. Theory and application. N.-Y.: Grain, Russak and Co, 1979.

[4] *Левин В.И.* Динамика логических устройств и систем. М.: Энергия, 1980.

[5] *Коффман А.* Введение в теорию нечетких множеств. М.: Радио и связь, 1982.

[6] *Левин В.И.* Бесконечнозначная логика в задачах кибернетики. М.: Радио и связь, 1982.

[7] *Левин В.И.* Логическая теория надежности сложных систем. М.: Энергоатомиздат, 1985.

[8] *Левин В.И.* Структурно-логические методы исследования сложных систем с применением ЭВМ. М.: Наука, 1987.

[9] *Шимбирев П.Н.* Гибридные непрерывно-логические устройства. М.: Энергоатомиздат, 1990.

[10] *Волгин Л.И., Левин В.И.* Непрерывная логика. Теория и применения. Таллинн: АН Эстонии. 1990.

[11] Прикладные нечеткие системы // Под ред. Г. Тэрано, К. Асаи и М. Сугэно. М.: Мир, 1993.

[12] *McNaughton R.* A theorem about infinite-valued sentential logic // J. Symb. Logic. 1951. Vol. 16. No 1. P. 1–13.

[13] *Левин В.И.* Непрерывная логика. Ее обобщения и применения. I, II. // Автоматика и телемеханика. 1990. No 8. C. 3–22; No 9. C. 3–26.

[14] *Levin V.I.* Continuous Logic. I. Basic Concepts; II. Main Generalizations // Kybernetes. The International Journal of Systems and Cybernetics. 2000. Vol. 29. No 9. P. 1234–1249; No 10. – P. 1250–1263.

[15] *Левин В.И.* Методы непрерывной логики в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2003. No 2. C. 28–51.