К вопросу о конечности конечно-порожденных импликативных полуструктур

В.И. Хомич, А.И. Федосеев

ABSTRACT. In this paper we study finitely generated implicative semilattices. We obtain the criteria of finiteness for finitely generated implicative semilattices with a least element.

1 Введение

Настоящая статья посвящена изучению конечно-порожденных импликативных полуструктур.

Известно (см., например, [1–6]), что псевдобулевы алгебры, импликатуры, импликативные полуструктуры и импликативные структуры являются моделями для интуиционистской пропозициональной логики и ее фрагментов. Для решения многих задач дедуктивного характера, возникающих при исследовании этой логики, применяются алгебраические методы, использующие результаты, касающиеся упомянутых выше алгебр. В работах [5, 6] эти алгебры называются ν-алгебрами, где ν — набор логических пропозициональных знаков, содержащий знак импликации и определяющий вид алгебры. В дальнейшем мы будем пользоваться обоими названиями этих алгебр.

В исследованиях псевдобулевых алгебр, импликатур, импликативных полуструктур и структур значительное место занимает изучение конечных и конечно-порожденных алгебр. Очевидно, что конечная алгебра является конечно-порожденной. Известно [7], что существует бесконечная псевдобулева алгебра с одним образующим элементом. Возникает вопрос: при каких условиях конечно-порожденная алгебра будет конечной?

В работах [8, 9] получены критерии конечности конечно-порожденных псевдобулевых алгебр. Согласно теореме Попеля –

Диего [10, 11] конечно-порожденная ν-алгебра, где ν не содержит знака дизъюнкции, является конечной. В данной работе получен критерий конечности для конечно-порожденных импликативных полуструктур с нулем (т.е. $\supset\vee\neg$-алгебр). Для доказательства этого результата получен ряд других результатов, касающихся конечно-порожденных импликативных полуструктур. Отметим, что некоторые из них представляют и самостоятельный интерес.

2 Предварительные сведения

Напомним необходимые в дальнейшем сведения. Интуиционистское пропозициональное исчисление [4], заданное десятью аксиомами и двумя правилами вывода (подстановка и модус поненс), будем обозначать через $\mathbf{H}$, а суперинтуиционистское пропозициональное исчисление, получающееся из $\mathbf{H}$ путем добавления в список аксиом исчисления $\mathbf{H}$ пропозициональной формулы X, называемой его дополнительной аксиомой, — через $\mathbf{H}+X$. Исчисления $\mathbf{H}+X$ и $\mathbf{H}+Y$ называются равнообъемными, если множество формул, выводимых в $\mathbf{H}+X$, совпадает с множеством формул, выводимых в $\mathbf{H}+Y$. Пропозициональные переменные и формулы будем обозначать строчными и заглавными латинскими буквами (возможно, с индексами) соответственно.

Пусть μ — какой-нибудь набор логических пропозициональных знаков. Пропозициональную формулу назовём μ-формулой, если она не содержит логических знаков, отличных от знаков набора μ; μ-формула называется μ-выводимой в $\mathbf{H}$, если в $\mathbf{H}$ существует ее вывод, каждая формула которого является μ-формулой.

Согласно результатам работы [5] аксиомы исчисления $\mathbf{H}$ можно выбрать так, что оно будет отделимым, т.е. будет удовлетворять следующим условиям:

1) каждая его аксиома содержит не более двух логических знаков, причем если их два, то один из них — импликация;

2) всякая μ-формула, выводимая в $\mathbf{H}$, будет $\mu\cup\{\supset\}$-выводимой в нем.

В дальнейшем будем считать, что $\mathbf{H}$ является отделимым исчислением.

Запись $Y_1, \dots, Y_m \vdash Z$ ($Y_1, \dots, Y_m \vDash Z$) будет означать, что формула Z выводима в $\mathbf{H}$ из формул $Y_1, \dots, Y_m$ с помощью обоих правил (с помощью правила модус поненс и выводимых в $\mathbf{H}$ формул), а запись $\vdash X$ — что формула X выводима в $\mathbf{H}$. Пропозициональную формулу $X_n \supset (\dots \supset (X_1 \supset Y)\dots)$ условимся записывать в виде $\{X_1, \dots X_n\} \supset Y$.

Пусть ν — набор логических пропозициональных знаков, содержащий знак импликации. Напомним определение ν-алгебры, введенное в работе [5] для изучения фрагментов исчисления $\mathbf{H}$. Операции ν-алгебр будем обозначать так же, как и соответствующие им (интерпретируемые ими) логические пропозициональные связки. По сути, ν-алгебра — это множество, на котором заданы операции псевдобулевой алгебры, определяемые набором ν. Точнее говоря, множество Ξ назовем ν-алгеброй, если в нем указан выделенный элемент, обозначаемый через $\mathbf{1}$, и заданы соответствующие знакам набора ν операции, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $(\forall \xi \in \Xi)(\mathbf{1} \supset \xi = \mathbf{1} \Rightarrow \xi = \mathbf{1})$;

2) $(\forall \xi, \eta \in \Xi)(\xi \supset \eta = \mathbf{1} \wedge \eta \supset \xi = \mathbf{1}) \Rightarrow \xi = \eta$;

3) для каждой ν-аксиомы X (т.е. аксиомы, являющейся ν-формулой) исчисления $\mathbf{H}$ значение всякого выражения, получающегося из X путем замены переменных формулы X элементами из Ξ, а логических знаков — соответствующими им операциями Ξ, равно выделенному элементу.

Определение ν-алгебры можно найти также в работах [12, 13]. Если ν содержит все четыре логических пропозициональных знака, то ν-алгебра является псевдобулевой алгеброй. В дальнейшем ν-алгебры и их элементы будем обозначать заглавными и строчными греческими буквами (возможно, с индексами) соответственно.

Часто $\supset$-алгебру называют импликатурой, $\supset\vee$-алгебру — импликативной полуструктурой и $\supset\vee\neg$-алгебру — импликативной полуструктурой с нулем. Операции $\supset$, $\vee$ и $\neg$ этих алгебр называют относительным псевдодополнением, объединением и псевдодополнением соответственно.

Элементы $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ν-алгебры Ξ называются ее образующими элементами, если для любого элемента η из Ξ существует терм $T(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, построенный из $\xi_1, \ldots, \xi_n$ с помощью операций ν-алгебры Ξ и удовлетворяющий в Ξ равенству $\eta = T(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Если в ν-алгебре Ξ существует конечное число образующих (не более, чем n образующих) элементов, то Ξ называется конечно-порожденной (n-порожденной) ν-алгеброй.

Пропозициональная ν-формула X называется общезначимой в ν-алгебре Ξ, если значения каждого выражения (терма), получающегося из X путем замены переменных ν-формулы X элементами из Ξ, а логических знаков — соответствующими им операциями ν-алгебры Ξ, равно ее выделенному элементу. Если X не является общезначимой в Ξ, то X называется опровержимой в Ξ.

Пусть Θ — какая-либо ν-алгебра, $\xi, \eta, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ — какие-нибудь ее элементы и Φ — ее подмножество. На Θ можно задать отношение частичного порядка, положив $\xi \leqslant \eta$ в том и только в том случае, когда $\xi \supset \eta = \mathbf{1}$. Элемент σ множества Φ назовем его минимальным элементом, если в Θ из соотношений $\tau \in \Phi$ и $\tau \leqslant \sigma$ следует, что $\tau = \sigma$. Множество всех минимальных элементов множества Φ будем обозначать через $\mathfrak{M}(\Phi)$, терм $\zeta_n \supset (\cdots \supset (\zeta_1 \supset \xi) \ldots)$ — через $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_n\} \supset \xi$ и наименьший элемент ν-алгебры Θ (если он имеется) — через $\mathbf{0}$. Число элементов конечного множества Ψ будем обозначать через $|\Psi|$.

В дальнейшем мы будем часто пользоваться леммой 1 работы [14]. Для удобства чтения данной статьи сформулируем эту лемму.

ЛЕММА 1. *([14, лемма 1]) Каковы бы ни были ν-формулы Q и ν-алгебра Θ, если $\vdash Q$, то Q общезначима в Θ.*

Докажем следующую вспомогательную лемму.

ЛЕММА 2. *Пусть $p, q, s, t, w_1, \ldots, w_k$ — пропозициональные переменные. Тогда верны следующие утверждения:*

1. $\vdash (q \vee (q \supset s)) \supset ((p \vee (p \supset q)) \supset ((p \supset q) \vee ((p \supset q) \supset s)))$;

2. $\vdash (p \vee (p \supset s)) \supset ((q \vee (q \supset s)) \supset ((p \vee q) \vee ((p \vee q) \supset s)))$;

3. $\vdash (p \vee \neg p) \supset ((q \vee \neg q) \supset ((p \supset q) \vee \neg (p \supset q)))$;

4. $\vdash (p \vee \neg p) \supset ((q \vee \neg q) \supset ((p \vee q) \vee \neg(p \vee q)))$;

5. $\vdash (p \vee \neg p) \supset (\neg p \vee \neg\neg p)$;

6. $\vdash \neg\neg(\{w_1, \ldots, w_k\} \supset p) \supset (\{\neg\neg w_1, \ldots, \neg\neg w_k\} \supset \neg\neg p)$;

7. $\vdash (\{\neg\neg w_1, \ldots, \neg\neg w_k\} \supset \neg\neg p) \supset \neg\neg(\{w_1, \ldots, w_k\} \supset p)$;

8. $\vdash (\{w_1, \ldots, w_k\} \supset q) \supset (\{w_1, \ldots, w_k\} \supset (p \supset q))$;

9. $\vdash (\{w_1, \ldots, w_k\} \supset p) \supset (\{w_1, \ldots, w_k\} \supset (p \vee q))$;

10. $\vdash (\{w_1, \ldots, w_k\} \supset p) \supset ((\{w_1, \ldots, w_k\} \supset (p \supset q)) \supset (\{w_1, \ldots, w_k\} \supset q))$;

11. $\vdash (p \supset s) \supset ((p \supset t) \supset ((s \supset (t \supset q)) \supset (p \supset q)))$.

Доказательство. Докажем утверждение (1). Нетрудно проверить, что $q \supset s$, p, $p \supset q \vDash s$. Тогда $q \supset s$, $p \vDash (p \supset q) \supset s$ и поэтому имеем $q \supset s$, $p \vDash (p \supset q) \vee ((p \supset q) \supset s)$.

Поскольку $q \supset s$, $p \supset q \vDash p \supset q$, имеем $q \supset s$, $p \supset q \vDash (p \supset q) \vee ((p \supset q) \supset s)$. Следовательно, $q \supset s$, $p \vee (p \supset q) \vDash (p \supset q) \vee ((p \supset q) \supset s)$. Значит, $q \supset s \vDash (p \vee (p \supset q)) \supset ((p \supset q) \vee ((p \supset q) \supset s))$.

Легко видеть, что $q \vDash (p \supset q)$. Тогда $q \vDash (p \supset q) \vee ((p \supset q) \supset s)$ и поэтому имеем $q \vDash (p \vee (p \supset q)) \supset ((p \supset q) \vee ((p \supset q) \supset s))$. Следовательно, $q \vee (q \supset s) \vDash (p \vee (p \supset q)) \supset ((p \supset q) \vee ((p \supset q) \supset s))$.

В результате получаем, что $\vdash (q \vee (q \supset s)) \supset ((p \vee (p \supset q)) \supset ((p \supset q) \vee ((p \supset q) \supset s)))$.

Докажем утверждение (2). Так как $p \vDash p \vee q$, то $p \vDash (p \vee q) \vee ((p \vee q) \supset s)$ и поэтому имеем $p \vDash (q \vee (q \supset s)) \supset ((p \vee q) \vee ((p \vee q) \supset s))$.

Поскольку $p \supset s$, $q \vDash p \vee q$, имеем $p \supset s$, $q \vDash (p \vee q) \vee ((p \vee q) \supset s)$. Так как $p \supset s$, $q \supset s$, $p \vDash s$ и $p \supset s$, $q \supset s$, $q \vDash s$, то $p \supset s$, $q \supset s$, $p \vee q \vDash s$ и поэтому имеем $p \supset s$, $q \supset s \vDash (p \vee q) \supset s$. Значит, $p \supset q$, $q \supset s \vDash (p \vee q) \vee ((p \vee q) \supset s)$. Тогда $p \supset s$, $q \vee (q \supset s) \vDash (p \vee q) \vee ((p \vee q) \supset s)$ и поэтому имеем $p \supset s \vDash (q \vee (q \supset s)) \supset ((p \vee q) \vee ((p \vee q) \supset s))$. Следовательно, $p \vee (p \supset s) \vDash (q \vee (q \supset s)) \supset ((p \vee q) \vee ((p \vee q) \supset s))$. В результате получаем, что $\vdash (p \vee (p \supset s)) \supset ((q \vee (q \supset s)) \supset ((p \vee q) \vee ((p \vee q) \supset s)))$.

Докажем утверждение (3). Так как $q \vDash p \supset q$, то $q \vDash (p \supset q) \vee \neg(p \supset q)$ и поэтому имеем $p \vee \neg p$, $q \vDash (p \supset q) \vee \neg(p \supset q)$. Поскольку

p, $\neg q$, $p \supset q \vDash q$ и p, $\neg q$, $p \supset q \vDash \neg q$, имеем p, $\neg q \vDash \neg(p \supset q)$. Значит, p, $\neg q \vDash (p \supset q) \vee \neg(p \supset q)$. Так как $\neg p$, $\neg q$, $p \vDash q$, то $\neg p$, $\neg q \vDash p \supset q$ и поэтому имеем $\neg p$, $\neg q \vDash (p \supset q) \vee \neg(p \supset q)$. Тогда $p \vee \neg p$, $\neg q \vDash (p \supset q) \vee \neg(p \supset q)$. Следовательно, $p \vee \neg p$, $q \vee \neg q \vDash (p \supset q) \vee \neg(p \supset q)$.

В результате получаем, что $\vdash (p \vee \neg p) \supset ((q \vee \neg q) \supset ((p \supset q) \vee \neg(p \supset q)))$.

Докажем утверждение (4). Так как $p \vDash p \vee q$, то $p \vDash (p \vee q) \vee \neg(p \vee q)$ и поэтому имеем p, $q \vee \neg q \vDash (p \vee q) \vee \neg(p \vee q)$. Так как $q \vDash p \vee q$, то $q \vDash (p \vee q) \vee \neg(p \vee q)$ и поэтому имеем $\neg p$, $q \vDash (p \vee q) \vee \neg(p \vee q)$. Поскольку $\neg p$, $\neg q$, $p \vDash \neg(p \vee q)$ и $\neg p$, $\neg q$, $q \vDash \neg(p \vee q)$, имеем $\neg p$, $\neg q$, $(p \vee q) \vDash \neg(p \vee q)$. Тогда $\neg p$, $\neg q \vDash \neg(p \vee q)$ и поэтому имеем $\neg p$, $\neg q \vDash (p \vee q) \vee \neg(p \vee q)$. Значит, $\neg p$, $q \vee \neg q \vDash (p \vee q) \vee \neg(p \vee q)$. Следовательно, $p \vee \neg p$, $q \vee \neg q \vDash (p \vee q) \vee \neg(p \vee q)$. В результате получаем, что $\vdash (p \vee \neg p) \supset ((q \vee \neg q) \supset ((p \vee q) \vee \neg(p \vee q)))$.

Докажем утверждение (5). Так как $p \vDash \neg p \vee \neg\neg p$ и $\neg p \vDash \neg p \vee \neg\neg p$, то $p \vee \neg p \vDash \neg p \vee \neg\neg p$ и поэтому имеем $\vdash (p \vee \neg p) \supset (\neg p \vee \neg\neg p)$.

Из выводимости 60i теоремы 7 монографии [4] с помощью теоремы 6 из [4] получаем верность выводимостей 6 и 7.

Докажем утверждение (8). Нетрудно проверить, что $\{w_1, \ldots, w_k\} \supset q$, $w_1, \ldots, w_k \vDash q$. Тогда $\{w_1, \ldots, w_k\} \supset q$, $w_1, \ldots, w_k \vDash p \supset q$ и поэтому имеем $\vdash (\{w_1, \ldots, w_k\} \supset q) \supset (\{w_1, \ldots, w_k\} \supset (p \supset q))$.

Докажем утверждение (9). Нетрудно проверить, что $\{w_1, \ldots, w_k\} \supset p$, $w_1, \ldots, w_k \vDash p$. Тогда $\{w_1, \ldots, w_k\} \supset p$, $w_1, \ldots, w_k \vDash p \vee q$ и поэтому имеем $\vdash (\{w_1, \ldots, w_k\} \supset p) \supset (\{w_1, \ldots, w_k\} \supset (p \vee q))$.

Докажем утверждение (10). Нетрудно проверить, что $\{w_1, \ldots, w_k\} \supset p$, $\{w_1, \ldots, w_k\} \supset (p \supset q)$, $w_1, \ldots, w_k \vDash p$ и $\{w_1, \ldots, w_k\} \supset p$, $\{w_1, \ldots, w_k\} \supset (p \supset q)$, $w_1, \ldots, w_k \vDash p \supset q$. Тогда $\{w_1, \ldots, w_k\} \supset p$, $\{w_1, \ldots, w_k\} \supset (p \supset q)$, $w_1, \ldots, w_k \vDash q$ и поэтому имеем $\vdash (\{w_1, \ldots, w_k\} \supset p) \supset ((\{w_1, \ldots, w_k\} \supset (p \supset q)) \supset (\{w_1, \ldots, w_k\} \supset q))$.

Докажем утверждение (11). Нетрудно проверить, что $p \supset s$, $p \supset t$, $s \supset (t \supset q)$, $p \vDash q$. Поэтому имеем $\vdash (p \supset s) \supset ((p \supset t) \supset ((s \supset (t \supset q)) \supset (p \supset q)))$. Q.E.D.

Следующие две леммы содержат равенства, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

ЛЕММА 3. *В любой $\supset\vee$-алгебре Θ для любых ее элементов ξ, η и ρ верны равенства* $(\eta \vee (\eta \supset \rho)) \supset ((\xi \vee (\xi \supset \eta)) \supset ((\xi \supset \eta) \vee ((\xi \supset$

$\eta)\supset\rho))) = \mathbf{1}$ *и* $(\xi\vee(\xi\supset\rho))\supset((\eta\vee(\eta\supset\rho))\supset((\xi\vee\eta)\vee((\xi\vee\eta)\supset\rho))) = \mathbf{1}$.

Доказательство. Пусть задана $\supset\vee$-алгебра Θ и ее элементы ξ, η и ρ. Согласно пунктам (1) и (2) леммы 2 имеем $\vdash (q\vee(q\supset s))\supset((p\vee(p\supset q))\supset((p\supset q)\vee((p\supset q)\supset s)))$ и $\vdash (p\vee(p\supset s))\supset((q\vee(q\supset s))\supset((p\vee q)\vee((p\vee q)\supset s)))$, где p,q и s — пропозициональные переменные. Тогда в силу леммы 1 эти $\supset\vee$-формулы общезначимы в Θ. Подставив в них вместо p,q и s элементы ξ, η и ρ соответственно, получим, что $(\eta\vee(\eta\supset\rho))\supset((\xi\vee(\xi\supset\eta))\supset((\xi\supset\eta)\vee((\xi\supset\eta)\supset\rho))) = \mathbf{1}$ и $(\xi\vee(\xi\supset\rho))\supset((\eta\vee(\eta\supset\rho))\supset((\xi\vee\eta)\vee((\xi\vee\eta)\supset\rho))) = \mathbf{1}$. Q.E.D.

ЛЕММА 4. *Пусть* Θ *— какая-нибудь* $\supset\vee\neg$*-алгебра, а* ξ,η, *и* $\rho_1,\dots,\rho_k$ *— какие-либо ее элементы. Тогда в* Θ *имеют место следующие равенства:*

1. $(\xi\vee\neg\xi)\supset((\eta\vee\neg\eta)\supset((\xi\supset\eta)\vee\neg(\xi\supset\eta))) = \mathbf{1}$;
2. $(\xi\vee\neg\xi)\supset((\eta\vee\neg\eta)\supset((\xi\vee\eta)\vee\neg(\xi\vee\eta))) = \mathbf{1}$;
3. $(\xi\vee\neg\xi)\supset(\neg\xi\vee\neg\neg\xi) = \mathbf{1}$;
4. $\neg\neg(\xi\vee\neg\xi) = \mathbf{1}$;
5. $(\xi\vee\neg\xi)\supset(\neg\neg\xi\supset\xi) = \mathbf{1}$;
6. $\neg\neg(\{\rho_1,\dots,\rho_k\}\supset\xi) = \{\neg\neg\rho_1,\dots,\neg\neg\rho_k\}\supset\neg\neg\xi$.

Доказательство. Пусть задана $\supset\vee\neg$-алгебра Θ и ее элементы ξ, η и $\rho_1,\dots,\rho_k$. Пусть p,q и $w_1,\dots,w_k$ — пропозициональные переменные. Согласно пунктам (3), (4) и (5) леммы 2 имеем, $\vdash (p\vee\neg p)\supset((q\vee\neg q)\supset((p\supset q)\vee\neg(p\supset q)))$, $\vdash (p\vee\neg p)\supset((q\vee\neg q)\supset((p\vee q)\vee\neg(p\vee q)))$ и $\vdash (p\vee\neg p)\supset(\neg p\vee\neg\neg p)$. Согласно пунктам 51a и 49c теоремы 7 из [4], имеем $\vdash \neg\neg(p\vee\neg p)$ и $(p\vee\neg p)\supset(\neg\neg p\supset p)$. Тогда в силу леммы 1 эти $\supset\vee\neg$-формулы общезначимы в Θ. Подставив в них вместо p, q элементы ξ, η соответственно, получим равенства (1)–(5).

Из выводимостей (6) и (7) леммы 2 аналогичными рассуждениями получаем, что $\neg\neg(\{\rho_1,\dots,\rho_k\}\supset\xi)\supset(\{\neg\neg\rho_1,\dots,\neg\neg\rho_k\}\supset$

$\neg\neg\xi) = \mathbf{1}$ и $(\{\neg\neg\rho_1,\ldots,\neg\neg\rho_k\}\supset\neg\neg\xi)\supset\neg\neg(\{\rho_1,\ldots,\rho_k\}\supset\xi) = \mathbf{1}$. Тогда $\neg\neg(\{\rho_1,\ldots,\rho_k\} \supset \xi) \leqslant \{\neg\neg\rho_1,\ldots,\neg\neg\rho_k\} \supset \neg\neg\xi$ и $\{\neg\neg\rho_1,\ldots,\neg\neg\rho_k\} \supset \neg\neg\xi \leqslant \neg\neg(\{\rho_1,\ldots,\rho_k\} \supset \xi)$, а поэтому равенство (6) имеет место. Q.E.D.

3 Конечно-порожденные импликативные полуструктуры

В этом параграфе докажем теорему, дающую критерий конечности для конечно-порожденных импликативных полуструктур с нулем (т.е. $\supset\vee\neg$-алгебр). Этот критерий является аналогом критерия конечности, полученного в работах [8, 9] для конечно-порожденных псевдобулевых алгебр. При получении критерия из [8, 9] важную роль играло наличие в псевдобулевых алгебрах операции пересечения. Так как в $\supset\vee\neg$-алгебрах нет операции пересечения, то его нельзя автоматически перенести на конечно-порожденные $\supset\vee\neg$-алгебры. Поэтому критерий конечности конечно-порожденных $\supset\vee\neg$-алгебр получим другими методами.

Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 5. *В любой конечно-порожденной импликативной полуструктуре (т.е. $\supset\vee$-алгебре) Θ для любых ее образующих элементов $\xi_1,\ldots,\xi_n$ верно соотношение $\mathfrak{M}(\Theta)\subseteq\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$.*

Доказательство. Пусть заданы $\supset\vee$-алгебра Θ и ее образующие элементы $\xi_1,\ldots,\xi_n$. Пусть $\eta\in\mathfrak{M}(\Theta)$. Тогда существует терм X, построенный из элементов $\xi_1,\ldots,\xi_n$ с помощью операций $\supset\vee$-алгебры Θ и удовлетворяющий в Θ равенству $X=\eta$. Пусть $X=Y\circ Z$, где Y и Z — термы, построенные из элементов $\xi_1,\ldots,\xi_n$ с помощью операций $\supset\vee$-алгебры Θ, а $\circ$ — один из знаков $\supset$ или $\vee$. Поскольку $Z \leqslant Y\circ Z = X = \eta$ и $\eta\in\mathfrak{M}(\Theta)$, имеем $Z=\eta$. Так как Z является собственным подтермом терма X, то, повторив такое рассуждение конечное число раз, получим, что $\eta=\xi_i$ для некоторого i $(1\leqslant i\leqslant n)$. Тогда имеем $\eta\in\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$. Следовательно, $\mathfrak{M}(\Theta)\subseteq\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$. Q.E.D.

Пусть Θ — $\supset\vee\neg$-алгебра, а $\xi_1,\ldots,\xi_n$ — ее образующие элементы. Тогда в Θ верны соотношения $\mathfrak{M}(\Theta)=\{\mathbf{0}\}$ и $\neg(\xi_i\supset\xi_i)=\mathbf{0}$, где $1\leqslant i\leqslant n$ и $\mathbf{0}$ — ее наименьший элемент. Поэтому если $n>1$, то элементы множества $\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}\setminus\{\mathbf{0}\}$ будут образующими $\supset\vee\neg$-алгебры Θ. Таким образом, для конечно-порожденных

$\supset\vee\neg$-алгебр аналог леммы 5, вообще говоря, не верен. Однако, если конечно-порожденную $\supset\vee\neg$-алгебру рассматривать как $\supset\vee$-алгебру, то для нее лемма 5 верна и поэтому ее наименьший элемент содержится среди образующих элементов этой $\supset\vee$-алгебры.

Пусть Θ — конечно-порожденная $\supset\vee$-алгебра, а $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — ее образующие элементы. Положим $\mathfrak{F}_\Theta = \{\xi_i \vee (\xi_i \supset \xi_j) | 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n\}$, а $\mathfrak{E}_\Theta = \left\{\zeta \middle| \mathfrak{F}_\Theta \supset \zeta = \mathbf{1}\right\}$. Нетрудно проверить, что $\mathfrak{F}_\Theta \subseteq \mathfrak{E}_\Theta$.

Пусть Φ — конечно-порожденная $\supset\vee\neg$-алгебра, а $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — ее образующие. Положим $\mathfrak{F}_\Phi = \{\xi_i \vee \neg\xi_i | 1 \leqslant i \leqslant n\}$, а $\mathfrak{E}_\Phi = \left\{\zeta \middle| \mathfrak{F}_\Phi \supset \zeta = \mathbf{1}\right\}$. Нетрудно проверить, что $\mathfrak{F}_\Phi \subseteq \mathfrak{E}_\Phi$.

Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 6. *Пусть ν — один из наборов логических знаков $\supset\vee$ или $\supset\vee\neg$, а Θ — конечно-порожденная ν-алгебра. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1) *подмножество $\mathfrak{E}_\Theta$ $\supset\vee$-алгебры Θ вместе с ее операциями $\supset$ и $\vee$ является $\supset\vee$-подалгеброй ν-алгебры Θ;*

2) *если $\sigma \in \mathfrak{E}_\Theta$, $\tau \in \Theta$ и $\sigma \supset \tau \in \mathfrak{E}_\Theta$, то $\tau \in \mathfrak{E}_\Theta$;*

3) *если $\sigma \in \mathfrak{E}_\Theta$, $\tau \in \Theta$ и $\sigma \leqslant \tau$, то $\tau \in \mathfrak{E}_\Theta$.*

Доказательство. Пусть задана конечно-порожденная ν-алгебра Θ. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — ее образующие элементы. Положим $k = |\mathfrak{F}_\Theta|$. Докажем утверждение (1). Для этого достаточно показать, что подмножество $\mathfrak{E}_\Theta$ замкнуто в ν-алгебре Θ относительно ее операций $\supset$ и $\vee$.

Пусть $\rho, \eta \in \mathfrak{E}_\Theta$. Покажем, что $\rho \supset \eta \in \mathfrak{E}_\Theta$ и $\rho \vee \eta \in \mathfrak{E}_\Theta$. Согласно пунктам (8) и (9) леммы 2, имеем $\vdash (\{w_1, \ldots, w_k\} \supset q) \supset (\{w_1, \ldots, w_k\} \supset (p \supset q))$ и $\vdash (\{w_1, \ldots, w_k\} \supset p) \supset (\{w_1, \ldots, w_k\} \supset (p \vee q))$, где $p, q, w_1, \ldots, w_k$ — пропозициональные переменные. Тогда в силу леммы 1 эти $\supset\vee$-формулы общезначимы в ν-алгебре Θ. Подставив в них вместо $p, q, w_1, \ldots, w_k$ соответственно ρ, η и элементы множества $\mathfrak{F}_\Theta$, получим, что $(\mathfrak{F}_\Theta \supset \eta) \supset (\mathfrak{F}_\Theta \supset (\rho \supset \eta)) = \mathbf{1}$ и $(\mathfrak{F}_\Theta \supset \rho) \supset (\mathfrak{F}_\Theta \supset (\rho \vee \eta)) = \mathbf{1}$. Поскольку $\rho, \eta \in \mathfrak{E}_\Theta$, имеем $\mathfrak{F}_\Theta \supset \rho = \mathbf{1}$ и $\mathfrak{F}_\Theta \supset \eta = \mathbf{1}$. Значит, $\mathfrak{F}_\Theta \supset (\rho \supset \eta) = \mathbf{1}$ и $\mathfrak{F}_\Theta \supset (\rho \vee \eta) = \mathbf{1}$. Следовательно, $\rho \supset \eta \in \mathfrak{E}_\Theta$ и $\rho \vee \eta \in \mathfrak{E}_\Theta$.

Докажем утверждение (2). Пусть $\sigma \in \mathfrak{E}_\Theta$, $\tau \in \Theta$ и $\sigma \supset \tau \in \mathfrak{E}_\Theta$. Согласно пункту (10) леммы 2 имеем $\vdash (\{w_1, \ldots, w_k\} \supset p) \supset ((\{w_1, \ldots, w_k\} \supset (p \supset q)) \supset (\{w_1, \ldots, w_k\} \supset q))$, где $p, q, w_1, \ldots, w_k$ — пропозициональные переменные. Тогда в силу леммы 1 эти $\supset\vee$-формулы общезначимы в ν-алгебре Θ. Подставив в нее вместо $p, q, w_1, \ldots, w_k$ соответственно σ, τ и элементы множества $\mathfrak{F}_\Theta$, получим, что

$$(\mathfrak{F}_\Theta \supset \sigma) \supset ((\mathfrak{F}_\Theta \supset (\sigma \supset \tau)) \supset (\mathfrak{F}_\Theta \supset \tau)) = \mathbf{1}.$$

Поскольку $\sigma \in \mathfrak{E}_\Theta$ и $\sigma \supset \tau \in \mathfrak{E}_\Theta$, имеем $\mathfrak{F}_\Theta \supset \sigma = \mathbf{1}$ и $\mathfrak{F}_\Theta \supset (\sigma \supset \tau) = \mathbf{1}$. Тогда $\mathfrak{F}_\Theta \supset \tau = \mathbf{1}$ и, следовательно, $\tau \in \mathfrak{E}_\Theta$.

Докажем утверждение (3). Пусть $\sigma \in \mathfrak{E}_\Theta$, $\tau \in \Theta$ и $\sigma \leqslant \tau$. Тогда $\sigma \supset \tau = \mathbf{1}$. Поэтому в силу пункта (1) этой леммы верно соотношение $\sigma \supset \tau \in \mathfrak{E}_\Theta$. А тогда, согласно пункту (2) этой леммы, имеем $\tau \in \mathfrak{E}_\Theta$. Q.E.D.

Из доказательства пункта (1) леммы 6 видно, что $\rho \supset \eta \in \mathfrak{E}_\Theta$, если $\eta \in \mathfrak{E}_\Theta$ и $\rho \in \Theta$, а $\rho \vee \eta \in \mathfrak{E}_\Theta$, если $\rho \in \mathfrak{E}_\Theta$ и $\eta \in \Theta$ или $\rho \in \Theta$ и $\eta \in \mathfrak{E}_\Theta$.

Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 7. *В любой конечно-порожденной $\supset\vee$-алгебре Ψ для любых ее элементов η и φ имеет место соотношение $\eta \vee (\eta \supset \varphi) \in \mathfrak{E}_\Psi$.*

Доказательство. Пусть задана конечно-порожденная $\supset\vee$-алгебра Ψ. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — ее образующие элементы. Пусть $\eta, \varphi \in \Psi$. Тогда существуют термы T и U, построенные из элементов $\xi_1, \ldots, \xi_n$ с помощью операций $\supset\vee$-алгебры Ψ и удовлетворяющие в Ψ равенствам $T = \eta$ и $U = \varphi$. Докажем, что $\eta \vee (\eta \supset \varphi) \in \mathfrak{E}_\Psi$. Доказательство будем вести индукцией по построению термов T и U. Пусть $T = \xi_k$ и $U = \xi_l$, где $1 \leqslant k \leqslant n$ и $1 \leqslant l \leqslant n$. Тогда $\eta \vee (\eta \supset \varphi) \in \mathfrak{F}_\Psi$. Поскольку $\mathfrak{F}_\Psi \subseteq \mathfrak{E}_\Psi$, имеем $\eta \vee (\eta \supset \varphi) \in \mathfrak{E}_\Psi$.

Пусть $T = \xi_k$ и $U = X \circ Y$, где $1 \leqslant k \leqslant n$, $\circ$ — один из знаков $\supset$ или $\vee$, а X и Y — термы, построенные из элементов $\xi_1, \ldots, \xi_n$ с помощью операций $\supset\vee$-алгебры Ψ. Тогда в Ψ существуют такие элементы ρ и τ, что $X = \rho$ и $Y = \tau$. Поэтому $\varphi = \rho \circ \tau$. По индуктивному предположению имеем $\xi_k \vee (\xi_k \supset \tau) \in \mathfrak{E}_\Psi$. Так как $\tau \leqslant \rho \circ \tau = \varphi$, то $\xi_k \supset \tau \leqslant \xi_k \supset \varphi$ и поэтому имеем

$$\xi_k \vee (\xi_k \supset \tau) \leqslant \xi_k \vee (\xi_k \supset \varphi).$$

Тогда, согласно пункту (3) леммы 6, имеем $\xi_k \vee (\xi_k \supset \varphi) \in \mathfrak{E}_\Psi$. Следовательно, $\eta \vee (\eta \supset \varphi) \in \mathfrak{E}_\Psi$.

Пусть теперь $T = W \circ Z$, где $\circ$ — один из знаков $\supset$ или $\vee$, а W и Z — термы, построенные из элементов $\xi_1, \dots, \xi_n$ с помощью операций $\supset\!\vee$-алгебры Ψ. Тогда в Ψ существуют такие элементы ω и σ, что $W = \omega$ и $Z = \sigma$. Поэтому $\eta = \omega \circ \sigma$. По индуктивному предположению имеем $\omega \vee (\omega \supset \sigma) \in \mathfrak{E}_\Psi$, $\omega \vee (\omega \supset \varphi) \in \mathfrak{E}_\Psi$ и $\sigma \vee (\sigma \supset \varphi) \in \mathfrak{E}_\Psi$. В силу леммы 3 в Ψ верны соотношения $(\sigma \vee (\sigma \supset \varphi)) \supset ((\omega \vee (\omega \supset \sigma)) \supset ((\omega \supset \sigma) \vee ((\omega \supset \sigma) \supset \varphi))) = \mathbf{1}$ и $(\omega \vee (\omega \supset \varphi)) \supset ((\sigma \vee (\sigma \supset \varphi)) \supset ((\omega \vee \sigma) \vee ((\omega \vee \sigma) \supset \varphi))) = \mathbf{1}$. Тогда, согласно лемме 6, имеем $(\omega \circ \sigma) \vee ((\omega \circ \sigma) \supset \varphi) \in \mathfrak{E}_\Psi$. Следовательно, $\eta \vee (\eta \supset \varphi) \in \mathfrak{E}_\Psi$. Q.E.D.

ЛЕММА 8. *В любой конечно-порожденной $\supset\!\vee\!\neg$-алгебре Ψ для любого ее элемента η имеет место соотношение $\eta \vee \neg\eta \in \mathfrak{E}_\Psi$.*

Доказательство. Пусть задана конечно-порожденная $\supset\!\vee\!\neg$-алгебра Ψ. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — ее образующие элементы. Пусть $\eta \in \Psi$. Тогда существует терм T, построенный из элементов $\xi_1, \dots, \xi_n$ с помощью операций $\supset\!\vee\!\neg$-алгебры Ψ и удовлетворяющий в Ψ равенству $T = \eta$.

Докажем, что $\eta \vee \neg\eta \in \mathfrak{E}_\Psi$. Доказательство будем вести индукцией по построению терма T. Пусть $T = \xi_m$, где $1 \leqslant m \leqslant n$. Тогда $\eta \vee \neg\eta \in \mathfrak{F}_\Psi$. Поскольку, $\mathfrak{F}_\Psi \subseteq \mathfrak{E}_\Psi$, имеем $\eta \vee \neg\eta \in \mathfrak{E}_\Psi$.

Пусть $T = W \circ Z$, где $\circ$ — один из знаков $\supset$ или $\vee$, а W и Z — термы, построенные из элементов $\xi_1, \dots, \xi_n$ с помощью операций $\supset\!\vee\!\neg$-алгебры Ψ. Тогда в Ψ существуют такие элементы ω и σ, что $W = \omega$ и $Z = \sigma$. Поэтому $\eta = \omega \circ \sigma$. По индуктивному предположению имеем $\omega \vee \neg\omega \in \mathfrak{E}_\Psi$ и $\sigma \vee \neg\sigma \in \mathfrak{E}_\Psi$. В силу пунктов (1) и (2) леммы 4 в Ψ верно соотношение $(\omega \vee \neg\omega) \supset ((\sigma \vee \neg\sigma) \supset ((\sigma \circ \omega) \vee \neg(\sigma \circ \omega))) = \mathbf{1}$. Тогда, согласно лемме 6, имеем $(\sigma \circ \omega) \vee \neg(\sigma \circ \omega) \in \mathfrak{E}_\Psi$. Следовательно, $\eta \vee \neg\eta \in \mathfrak{E}_\Psi$.

Пусть $T = \neg W$, где W — терм, построенный из элементов $\xi_1, \dots, \xi_n$ с помощью операций $\supset\!\vee\!\neg$-алгебры Ψ. Тогда в Ψ существует такой элемент ω, что $W = \omega$. Поэтому $\eta = \neg\omega$. По индуктивному предположению имеем $\omega \vee \neg\omega \in \mathfrak{E}_\Psi$. В силу пункта

(3) леммы 4 в Ψ верно соотношение $(\omega \vee \neg\omega) \supset (\neg\omega \vee \neg\neg\omega) = \mathbf{1}$. Тогда, согласно лемме 6, имеем $\neg\omega \vee \neg\neg\omega \in \mathfrak{E}_\Psi$. Следовательно, $\eta \vee \neg\eta \in \mathfrak{E}_\Psi$. Q.E.D.

Двухэлементную булеву алгебру, задающую классическую пропозициональную логику [4] и являющуюся также псевдобулевой алгеброй, обозначим через Λ_2, а трехэлементную линейно упорядоченую псевдобулеву алгебру (см., например, [15, 16]) — через Λ_3.

Пусть ν — один из наборов логических знаков $\supset\vee$ или $\supset\vee\neg$. Построим ν-формулу Q_ν, положив Q_ν равной формуле $p \vee (p \supset q)$ или $p \vee \neg p$, где p и q — пропозициональные переменные, в зависимости от того, равен ν набору $\supset\vee$ или набору $\supset\vee\neg$.

ЛЕММА 9. *Пусть ν — один из наборов логических знаков $\supset\vee$ или $\supset\vee\neg$, а Ψ — n-порожденная ν-алгебра. Тогда если ν-формула Q_ν общезначима в Ψ, то $|\Psi| \leqslant 2^{2^n}$.*

Доказательство. Пусть задана n-порожденная ν-алгебра Ψ. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — ее образующие элементы. Нетрудно проверить, что формула Q_ν общезначима в псевдобулевой алгебре Λ_2 и опровержима в псевдобулевой алгебре Λ_3. По теореме 1 из [16] исчисление $\mathbf{H} + Q_\nu$ равнообъемно классическому пропозициональному исчислению [4], задающему классическую пропозициональную логику. Так как ν-формула Q_ν общезначима в ν-алгебре Θ, то в Θ общезначима каждая ν-формула, выводимая в $\mathbf{H} + Q_\nu$.

Пусть $\eta \in \Psi$. Тогда существует терм T, построенный из элементов $\xi_1, \ldots, \xi_n$ с помощью операций ν-алгебры Ψ и удовлетворяющий в Ψ равенству $T = \eta$. Пусть $q_1, \ldots, q_n$ — различные пропозициональные переменные. Построим ν-формулу X_η, заменив в T элементы $\xi_1, \ldots, \xi_n$ переменными $q_1, \ldots, q_n$ соответственно, а операции ν-алгебры Ψ — соответствующими им логическими знаками. Формула X_η задает булеву (т.е. истинностную) функцию f_η от n переменных [4].

Таким образом, каждому элементу η из Ψ поставлена в соответствие булева функция f_η от n переменных. Покажем, что различным элементам сопоставляются различные функции.

Пусть $\rho, \tau \in \Psi$ и $\rho \neq \tau$. Тогда верно хотя бы одно из неравенств $\rho \supset \tau \neq \mathbf{1}$ или $\tau \supset \rho \neq \mathbf{1}$. Пусть $\rho \supset \tau \neq \mathbf{1}$. Тогда ν-формула

$X_\rho \supset X_\tau$ опровержима в Ψ при оценке $g(q_i)=\xi_i$, где $1 \leqslant i \leqslant n$. Поэтому ν-формула $X_\rho \supset X_\tau$ не выводима в исчислении $\mathbf{H}+Q_\nu$ и тем самым опровержима в Λ_2. Пусть h — опровержение формулы $X_\rho \supset X_\tau$ в Λ_2. Тогда $h(X_\rho) \neq h(X_\tau)$ и поэтому имеем $f_\rho(h(q_1),\ldots,h(q_n)) \neq f_\tau(h(q_1),\ldots,h(q_n))$. Следовательно, $f_\rho \neq f_\tau$. Если $\tau \supset \rho \neq \mathbf{1}$, то аналогичными рассуждениями получаем, что $f_\rho \neq f_\tau$. Так как число различных булевых функций от n аргументов равно 2^{2^n}, то $|\Psi| \leqslant 2^{2^n}$. Q.E.D.

Пусть ν — один из наборов логических знаков $\supset\vee$ или $\supset\vee\neg$, а Θ — конечно-порожденная ν-алгебра. Согласно пункту (1) леммы 6 подмножество $\mathfrak{E}_\Theta$ является $\supset\vee$-подалгеброй ν-алгебры Θ. На ν-алгебре Θ зададим бинарное отношение $\sim$. Пусть $\xi,\eta \in \Theta$. Отношение $\xi \sim \eta$ верно на Θ, если $\xi \supset \eta \in \mathfrak{E}_\Theta$ и $\eta \supset \xi \in \mathfrak{E}_\Theta$. Нетрудно проверить, что оно рефлексивно, симметрично и транзитивно и тем самым является отношением эквивалентности на Θ. Это отношение задает конечно-порожденную ν-алгебру классов эквивалентности [3], которую обозначим через $\Theta/\mathfrak{E}_\Theta$. Докажем, что ν-алгебра $\Theta/\mathfrak{E}_\Theta$ имеет конечное число классов эквивалентности, т.е. конечное число элементов.

ТЕОРЕМА 10. *Пусть ν — один из наборов логических знаков $\supset\vee$ или $\supset\vee\neg$, а Θ — конечно-порожденная ν-алгебра. Тогда конечно-порожденная ν-алгебра $\Theta/\mathfrak{E}_\Theta$ конечна.*

Доказательство. Пусть задана конечно-порожденная ν-алгебра Θ. Как и выше, положим Q_ν равной формуле $p \vee (p \supset q)$ или $p \vee \neg p$, где p и q — пропозициональные переменные, в зависимости от того, равен ν набору $\supset\vee$ или набору $\supset\vee\neg$. Так как Θ — конечно-порожденная ν-алгебра, то и ν-алгебра $\Theta/\mathfrak{E}_\Theta$ будет конечно-порожденной. Согласно леммам 7 и 8 и определению ν-алгебры $\Theta/\mathfrak{E}_\Theta$, ν-формула Q_ν общезначима в ν-алгебре $\Theta/\mathfrak{E}_\Theta$. Тогда по лемме 9 ν-алгебра $\Theta/\mathfrak{E}_\Theta$ конечна, т.е. имеет конечное число классов эквивалентности. Q.E.D.

Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 11. *Пусть Ψ — конечно-порожденная $\supset\vee\neg$-алгебра, а $\sim$ — отношение эквивалентности на Ψ, определенное выше. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1) если $\eta \in \mathfrak{E}_\Psi$, *то* $\neg\neg\eta = \mathbf{1}$;

2) если $\rho \in \Psi$, *то* $\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho = \neg\neg\rho$;

3) если $\rho, \tau \in \Psi$ *и* $\rho \sim \tau$, *то* $\neg\neg\rho = \neg\neg\tau$.

Доказательство. Пусть задана конечно-порожденная $\supset\!\vee\!\neg$-алгебра Ψ. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — ее образующие элементы. Докажем утверждение (1). Пусть $\eta \in \mathfrak{E}_\Psi$. Тогда $\mathfrak{F}_\Psi \supset \eta = \mathbf{1}$. Следовательно, $\neg\neg(\mathfrak{F}_\Psi \supset \eta) = \neg\neg\mathbf{1} = \mathbf{1}$. Согласно построению множества $\mathfrak{F}_\Psi$, имеем $\mathfrak{F}_\Psi = \{\xi_i \vee \neg\xi_i | 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Тогда с помощью леммы 4 получаем, что $\mathbf{1} = \neg\neg(\mathfrak{F}_\Psi \supset \eta) = \{\neg\neg(\xi_i \vee \neg\xi_i) | 1 \leqslant i \leqslant n\} \supset \neg\neg\eta = \mathbf{1} \supset \neg\neg\eta = \neg\neg\eta$.

Докажем утверждение (2). Пусть $\rho \in \Psi$. В силу леммы 8 верно соотношение $\rho \vee \neg\rho \in \mathfrak{E}_\Psi$, а в силу пункта (5) леммы 4 верно неравенство $(\rho \vee \neg\rho) \leqslant (\neg\neg\rho \supset \rho)$. Тогда согласно пункту (3) леммы 6 $\neg\neg\rho \supset \rho \in \mathfrak{E}_\Psi$ и поэтому имеем $\mathfrak{F}_\Psi \supset (\neg\neg\rho \supset \rho) = \mathbf{1}$. Значит, $\neg\neg\rho \supset (\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho) = \mathbf{1}$. Следовательно, $\neg\neg\rho \leqslant \mathfrak{F}_\Psi \supset \rho$.

Согласно пункту 60g теоремы 7 из [4], имеем $\vdash (p \supset \neg\neg q) \supset (\neg\neg p \supset \neg\neg q)$ и $\vdash (\neg\neg p \supset \neg\neg q) \supset (p \supset \neg\neg q)$, где p и q — пропозициональные переменные. Тогда в силу леммы 1 эти $\supset\!\vee\!\neg$-формулы общезначимы в $\supset\!\vee\!\neg$-алгебре Ψ. Подставив в них вместо p и q соответственно $\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho$ и ρ, получим, что $((\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho) \supset \neg\neg\rho) \supset (\neg\neg(\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho) \supset \neg\neg\rho) = \mathbf{1}$ и $(\neg\neg(\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho) \supset \neg\neg\rho) \supset ((\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho) \supset \neg\neg\rho) = \mathbf{1}$. Поэтому имеем $(\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho) \supset \neg\neg\rho \leqslant \neg\neg(\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho) \supset \neg\neg\rho$ и $\neg\neg(\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho) \supset \neg\neg\rho \leqslant (\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho) \supset \neg\neg\rho$. Следовательно, $(\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho) \supset \neg\neg\rho = \neg\neg(\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho) \supset \neg\neg\rho$.

Согласно построению множества $\mathfrak{F}_\Psi$, имеем $\mathfrak{F}_\Psi = \{\xi_i \vee \neg\xi_i | 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Тогда с помощью леммы 4 получаем, что $(\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho) \supset \neg\neg\rho = \neg\neg(\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho) \supset \neg\neg\rho = (\{\neg\neg(\xi_i \vee \neg\xi_i) | 1 \leqslant i \leqslant n\} \supset \neg\neg\rho) \supset \neg\neg\rho = (\mathbf{1} \supset \neg\neg\rho) \supset \neg\neg\rho = \neg\neg\rho \supset \neg\neg\rho = \mathbf{1}$. Значит, $\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho \leqslant \neg\neg\rho$. Поскольку $\neg\neg\rho \leqslant \mathfrak{F}_\Psi \supset \rho$, имеем $\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho = \neg\neg\rho$.

Докажем утверждение (3). Пусть $\rho, \tau \in \Psi$ и $\rho \sim \tau$. Тогда $\rho \supset \tau \in \mathfrak{E}_\Psi$ и $\tau \supset \rho \in \mathfrak{E}_\Psi$, а поэтому имеем $\mathfrak{F}_\Psi \supset (\rho \supset \tau) = \mathbf{1}$ и $\mathfrak{F}_\Psi \supset (\tau \supset \rho) = \mathbf{1}$. Положим $k = |\mathfrak{F}_\Psi|$. Согласно пункту (10) леммы 2, имеем $\vdash (\{w_1, \ldots, w_k\} \supset p) \supset ((\{w_1, \ldots, w_k\} \supset (p \supset q)) \supset (\{w_1, \ldots, w_k\} \supset q))$, где $p, q, w_1, \ldots, w_k$ — пропозициональные формулы. Тогда в силу леммы 1 эти $\supset\!\vee\!\neg$-формулы общезначимы в $\supset\!\vee\!\neg$-алгебре Ψ. Подствив в нее вместо $p, q, w_1, \ldots, w_k$ первый раз соответственно

ρ, τ и элементы множества $\mathfrak{F}_\Psi$, а второй раз соответственно τ, ρ и элементы множества $\mathfrak{F}_\Psi$, получим, что $(\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho) \supset ((\mathfrak{F}_\Psi \supset (\rho \supset \tau)) \supset (\mathfrak{F}_\Psi \supset \tau)) = \mathbf{1}$ и $(\mathfrak{F}_\Psi \supset \tau) \supset ((\mathfrak{F}_\Psi \supset (\tau \supset \rho)) \supset (\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho)) = \mathbf{1}$. Поскольку $\mathfrak{F}_\Psi \supset (\rho \supset \tau) = \mathbf{1}$ и $\mathfrak{F}_\Psi \supset (\tau \supset \rho) = \mathbf{1}$, имеем $(\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho) \supset (\mathfrak{F}_\Psi \supset \tau) = \mathbf{1}$ и $(\mathfrak{F}_\Psi \supset \tau) \supset (\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho) = \mathbf{1}$. Значит, $\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho \leqslant \mathfrak{F}_\Psi \supset \tau$ и $\mathfrak{F}_\Psi \supset \tau \leqslant \mathfrak{F}_\Psi \supset \rho$. Следовательно, $\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho = \mathfrak{F}_\Psi \supset \tau$. Тогда, согласно пункту (2) этой леммы, имеем $\neg\neg\rho = \neg\neg\tau$. Q.E.D.

Докажем теорему, дающую критерий конечности для конечно-порожденных $\supset\!\vee\!\neg$-алгебр.

ТЕОРЕМА 12. *Конечно-порожденная $\supset\!\vee\!\neg$-алгебра Ψ конечна в том и только том случае, когда конечна ее $\supset\!\vee$-подалгебра $\mathfrak{E}_\Psi$.*

Доказательство. Пусть задана конечно-порожденная $\supset\!\vee\!\neg$-алгебра Ψ. Если Ψ — конечна, то конечна и ее $\supset\!\vee\!\neg$-подалгебра $\mathfrak{E}_\Psi$.

Докажем обратное утверждение. Пусть $\supset\!\vee$-подалгебра $\mathfrak{E}_\Psi$ $\supset\!\vee\!\neg$-алгебры Ψ конечна. По теореме 10 $\supset\!\vee\!\neg$-алгебра $\Psi/\mathfrak{E}_\Psi$ — конечна, т.е. имеет конечное число классов эквивалентности. Поэтому для доказательства конечности $\supset\!\vee\!\neg$-алгебры Ψ достаточно показать, что конечен каждый класс эквивалентности.

Пусть $\xi \in \Psi$, а $[\xi]$ — класс эквивалентности, порожденный элементом ξ. Пусть $\zeta \in [\xi]$. Согласно лемме 8, имеем $\zeta \vee \neg\zeta \in \mathfrak{E}_\Psi$. Элементу ζ из $[\xi]$ поставим в соответствие элемент $\zeta \vee \neg\zeta$ из $\mathfrak{E}_\Psi$. Покажем, что если $\rho, \eta \in [\xi]$ и $\rho \neq \eta$, то $\rho \vee \neg\rho \neq \eta \vee \neg\eta$. Предположим, что $\rho \vee \neg\rho = \eta \vee \neg\eta$. Нетрудно проверить, что $\rho \supset (\rho \vee \neg\rho) = \mathbf{1}$, $\rho \supset \neg\neg\rho = \mathbf{1}$, $\eta \supset (\eta \vee \neg\eta) = \mathbf{1}$ и $\eta \supset \neg\neg\eta = \mathbf{1}$. Согласно пункту (5) леммы 4, имеем $(\rho \vee \neg\rho) \supset (\neg\neg\rho \supset \rho) = \mathbf{1}$ и $(\eta \vee \neg\eta) \supset (\neg\neg\eta \supset \eta) = \mathbf{1}$. Так как $\rho, \eta \in [\xi]$, то $\rho \sim \xi$ и $\eta \sim \xi$, а следовательно, $\rho \sim \eta$. Тогда в силу пункта (3) леммы 11 верно равенство $\neg\neg\rho = \neg\neg\eta$. Поскольку $\rho \vee \neg\rho = \eta \vee \neg\eta$, имеем $\eta \supset (\rho \vee \neg\rho) = \mathbf{1}$, $\eta \supset \neg\neg\rho = \mathbf{1}$ и $(\rho \vee \neg\rho) \supset (\neg\neg\rho \supset \eta) = \mathbf{1}$.

Согласно пункту (11) леммы 2, имеем $\vdash (p \supset s) \supset ((p \supset t) \supset ((s \supset (t \supset q)) \supset (p \supset q)))$, где p, q, s и t — пропозициональные переменные. Тогда в силу леммы 1 эта $\supset\!\vee\!\neg$-формула общезначима в $\supset\!\vee\!\neg$-алгебре Ψ. Подставив в нее вместо p, q, s и t первый раз соответственно ρ, η, $\rho \vee \neg\neg\rho$ и $\neg\neg\rho$, а второй раз соответственно η, ρ, $\rho \vee \neg\neg\rho$ и $\neg\neg\rho$, получим, что $(\rho \supset (\rho \vee \neg\neg\rho)) \supset ((\rho \supset \neg\neg\rho) \supset (((\rho \vee \neg\neg\rho) \supset (\neg\neg\rho \supset \eta)) \supset (\rho \supset \eta))) = \mathbf{1}$ и $(\eta \supset (\eta \vee \neg\neg\rho)) \supset ((\eta \supset$

$\neg\neg\rho)\supset(((\rho\vee\neg\neg\rho)\supset(\neg\neg\rho\supset\rho))\supset(\eta\supset\rho)))=\mathbf{1}$. Отсюда с помощью доказанных выше равенств получим, что $\rho\supset\eta=\mathbf{1}$ и $\eta\supset\rho=\mathbf{1}$. Тогда $\rho\leqslant\eta$ и $\eta\leqslant\rho$, а поэтому имеем $\rho=\eta$. Противоречие. Следовательно, $\rho\vee\neg\rho\neq\eta\vee\neg\eta$.

Таким образом, мы доказали, что если $\rho,\eta\in[\xi]$ и $\rho\neq\eta$, то $\rho\vee\neg\rho\neq\eta\vee\neg\eta$, $\rho\vee\neg\rho\in\mathfrak{E}_\Psi$ и $\eta\vee\neg\eta\in\mathfrak{E}_\Psi$. Так как $\supset\vee$-подалгебра $\mathfrak{E}_\Psi$ $\supset\vee\neg$-алгебры Ψ конечна, то конечен и класс $[\xi]$. Следовательно, Ψ конечна. Q.E.D.

Литература

[1] *Биркгоф Г.* Теория структур. М.: Иностранная литература, 1952.

[2] *Карри Х.Б.* Основы математической логики. М.: Мир, 1969.

[3] *Расева Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики. М.: Наука, 1972.

[4] *Клини С.К.* Введение в метаматематику. М.: Иностранная литература, 1957.

[5] *Horn A.* The separation theorem of intuitionist propositional calculus // Journal of Symbolic Logic. 1962. V. 27. № 4. P. 391–399.

[6] *Хомич В.И.* Об отделимых суперинтуиционистских пропозициональных исчислениях и о конъюнктивно неразложимых элементах в импликативных полуструктурах // Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 1986. Bd. 32. № 2. S. 149–180.

[7] *Nishimura I.* On formulas of one veriable in intuitionistic propositional calculus // Journal of Symbolic Logic. 1960. V. 25. № 4. P. 327–331.

[8] *Кузнецов А.В.* О конечно-порожденных псевдобулевых алгебрах и финитно аппроксимируемых многообразиях // XII Всесоюзный алгебраический коллоквиум. Тезисы сообщений. Свердловск, 1973. С. 255–256.

[9] *Циткин А.И.* Структурально полные суперинтуиционистские логики и примитивные многообразия псевдобулевых алгебр // Математические исследования. Неклассические логики. 1987. Вып. 98. С. 134–151.

[10] *Diego A.* Sur les algebrès de Hilbert // Trand. de léspangnol. Paris, 1966.

[11] *Янков В.А.* Конъюнктивно неразложимые формулы в пропозициональных исчислениях // Известия АН СССР. Серия математическая. 1969. Т. 33. № 1. С. 18–38.

[12] *Хомич В.И.* О свойствах суперинтуиционистских пропозициональных исчислений // Сибирский математический журнал. 1990. Т. 31. № 6. С. 158–175.

[13] *Хомич В.И.* О вложимости некоторых обобщений псевдобулевых алгебр // Доклады РАН. 1996. Т. 350. № 2. С. 174–177.

[14] *Хомич В.И.* О свойстве суперинтуиционистских пропозициональных исчислений, связанном с отделимостью этих исчислений // Математические вопросы кибернетики. 1998. № 7. С. 227–242.

[15] *Янков В.А.* О некоторых суперконструктивных исчислениях высказываний // Доклады АН СССР. 1963. Т. 151. № 4. С. 796–798.

[16] *Янков В.А.* О расширении интуиционистского пропозиционального исчисления до классического и минимального — до интуиционистского // Известия АН СССР. Серия математическая. 1968. Т. 32. № 1. С. 208–211.