Свойства ординалов в теории множеств с интуиционистской логикой

В.Х. Хаханян

abstract. We prove that some properties of ordinals do not take place in intuitionistic set theory and metamathematics of our proof is weaker than that which is in heyting-values models.

Одним из наиболее важных понятий в аксиоматических системах теории множеств является понятие ординала. Существует несколько эквивалентных с классической точки зрения определений понятия ординала в теории множеств. Ряд этих определений требует использования закона исключенного третьего при доказательстве основных свойств ординалов. Поэтому не все определения ординала, которые имеются в теории множеств с подлежащей классической логикой, можно прямо перенести в интуиционистскую теорию множеств. В качестве примера работ, в которых даются определения понятия ординала, а также приводятся контрпримеры для ряда других (классически верных) основных свойств ординалов, можно назвать работы [1, 5, 3]. Последняя из цитируемых работ лежит несколько в стороне от наших исследований, тем не менее представляет интерес, так как в ней дается определение ординала, для которого все классические свойства (т.е. свойства, при доказательстве которых необходимо было бы использовать закон исключенного третьего), могут быть доказаны и в интуиционистской теории множеств, например, свойства ординала-последователя (формулировки свойств даны ниже). В первых из двух названных работ дается следующее, приемлемое и классически, определение ординального числа: ординал есть транзитивное множество транзитивных множеств. Такое определение ординала дает возможность легко доказать, что ординал-последователь есть также ординал и что объединение любого множества ординалов также есть ординал. Кроме того, в первых двух из цитированных работ даются определения порядков разных видов: частичных, линейных, фундированных и полных порядков (или вполне упорядочений). В [5] доказано (частично), что приведенное выше определение ординала дает возможность доказать трансфинитную индукцию и трансфинитную рекурсию по ординалам. Приведенное выше определение ординала используется для построения кумулятивной иерархии R_α в интуиционистской теории множеств и (важный момент!) для определения ранга множества x так, что $x \in R_{rk(x)+1}$. Конечно, при таком способе определения понятия ординала последний является вполне фундированным множеством (см. [1]), но не является вполне упорядоченным множеством, так как принцип существования наименьшего элемента влечет полный закон искюченного третьего, т.е. превращает интуиционистскую теорию множеств в ее классический аналог (для доказательства этого факта см.[1] или [2]). Используя данное выше определение ординального числа, можно определить также понятие кардинального числа и развить форсинг, т.е. обсудить на интуиционистском уровне теории множеств континуум-гипотезу. Можно определить множество натуральных чисел и понятие транзитивного замыкания множества (см. [5]).

Работа [1] посвящена построению в интуиционистской теории множеств гейтингозначного универсума множеств как одной из основных моделей для аксиоматических систем теории множеств ZFIR и ZFIC. Точная формулировка этих двух основных аксиоматических систем теории множеств с подлежащей интуиционистской логикой в стандартном (односортном) языке первого порядка приведена, например, в [8]. Эти две аксиоматические системы теории множеств имеют различную дедуктивную силу, так как схема аксиом «collection» не выводится из схемы аксиом подстановки (для доказательства см. [6]; цитированный результат явился решением одной из наиболее трудных проблем из [7]). Однако доказательство того факта, что приведенный универсум является моделью отмеченных систем теорий множеств, внешним образом требует использования каждый раз теории ZFIC. В [9] было доказано, что при использовании моделей типа реализуемости достаточно внешним образом (конечно, в случае только системы ZFIR) использовать ту же самую теорию ZFIR, что усиливает результат Грайсона из [1]. Этот результат был анонсирован автором еще в 1982 г. в [4]. Используя гейтингозначный универсум, в [1] Грайсон приводит строгие контрпримеры для ряда свойств ординалов (см. также формулировки ниже), которые не выполняются в модели гейтингозначного универсума для отмеченных выше теорий множеств при приведенном ранее определении ординала (и, следовательно, не выводятся в самих теориях).

Дальнейший план изложения будет такой: сначала будет сформулирован ряд свойств ординалов и отмечено, какие из них верны в аксиоматических системах интуиционистских теорий множеств ZFIR и ZFIC, а какие нет (более точно: какие из них влекут полный закон исключенного третьего). Поскольку ряд свойств ординалов, не являющихся интуиционистски верными, влекут полный закон исключенного третьего (последнее будет доказано также и для тех свойств ординалов, для которых это не сделано в [1]), и поскольку каждая из отмеченных выше аксиоматических систем теорий множеств совместна с тезисом Чёрча (см., например, [8] или [9]), то соответствующие свойства ординалов не выводятся в отмеченных выше теориях, но метаматематика нашего доказательства окажется слабее, чем в [1].

Теорема

А) следующие свойства ординалов верны (выводятся) в ZFIR:

(i) $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^{+} \leq \beta$

(ii) $\bigcup A \leq \beta \Leftrightarrow \forall \alpha \in A. \alpha \leq \beta$

(iii) $\alpha < \beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$

Доказательства утверждений пункта А достаточно рутинны и оставляются читателю в качестве упражнений.

Б) следующие, классически верные, свойства ординалов влекут полный закон исключенного третьего:

1. $\alpha < \beta \vee \alpha = \beta \vee \alpha > \beta$
2. $\alpha \leq \beta \vee \beta \leq \alpha$
3. $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha < \beta \vee \alpha = \beta$
4. $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha^{+} < \beta \vee \alpha^{+} = \beta$
5. $\alpha \leq \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$

Следуя [1], дадим следующие определения. Ординал α есть ординал-последователь, если $\exists\beta.\alpha = \beta^+$. Ординал называется слабо предельным, если $\forall\beta \in \alpha.\exists\gamma \in \alpha.\beta \in \gamma$. Ординал α называется сильно предельным, если $\forall\beta \in \alpha.\beta^+ \in \alpha$.

Следующие, классически верные, свойства ординалов также (каждое в отдельности) влекут полный закон исключенного третьего:

а) каждый ординал есть 0, или ординал-последователь, или слабо предельный;

б) все слабо предельные ординалы являются сильно предельными.

Приведем полные доказательства всех сформулированных выше утверждений об ординалах в пунктах Б), а) и б).

1. Полагаем: $\alpha = 0, \beta = \{x : x = 0 \wedge \varphi\} = 1'$. Если верен первый член дизъюнкции, то $0 \in 1'$, т.е. имеем φ и $\varphi \vee \neg\varphi$. Если выполнен второй член дизъюнкции, то $\beta = \alpha = 0$, а тогда имеем $\neg\varphi$ и также $\varphi \vee \neg\varphi$. Заметим, что неверно, что $\beta \in \alpha$ и поэтому снова имеем $\varphi \vee \neg\varphi$.

2. Полагаем $\alpha = \{0, 1', \{0, 1'\}\}, \beta = \{0, 1\}$. Если $\alpha \leq \beta$, то $1' = 0$ или $1' = 1$, а тогда в любом случае получаем $\varphi \vee \neg\varphi$. Если же $\beta \leq \alpha$, то тогда $1 = 1'$ или $1 = \{0, 1'\}$ и снова имеем $\varphi \vee \neg\varphi$.

3. В этом случае полагаем $\alpha = 1, \beta = \{x : x = 0 \vee (x = 1 \wedge \varphi)\}$. Очевидно, что $\alpha \subseteq \beta$. Если $1 \in \beta$, то тогда выполнено φ и, следовательно, $\varphi \vee \neg\varphi$. Если же $\{x : x = 0\} = 1 = \{x : x = 0 \vee (x = 1 \wedge \varphi)\}$, то тогда имеем $\neg\varphi$. В обоих случаях получаем $\varphi \vee \neg\varphi$.

4. Для этого случая полагаем $\alpha = 0; \alpha^+ = 0 \bigcup \{0\} = \{x : x = 0\} = 1; \beta = \{x : x = 0 \vee (x = 1 \wedge \varphi)\}$. Понятно, что $0 \in \beta$. Если теперь $1 \in \beta$, то имеем φ и, как и обычно, $\varphi \vee \neg\varphi$. Если же $1 = \beta$, то тогда получаем $\neg\varphi$ и опять, по законам логики, $\varphi \vee \neg\varphi$.

5. В этом случае полагаем $\alpha = 1', \beta = 1, \gamma = \{0, 1\}$. Ясно, что $\alpha \subseteq \beta$ и $\beta \in \gamma$. Но если $\alpha \in \gamma$, то либо $1' = 0$, а тогда $\neg\varphi$, либо $1' = 1$, а тогда φ и в любом случае имеем опять $\varphi \vee \neg\varphi$.

Докажем теперь утверждение а). Для этого полагаем $\alpha = 1'$. Если теперь $\alpha = 0$, то получаем $\neg\varphi$. Если $\alpha = \beta^+$, то $\beta \in \alpha$, т.е. $\beta = 0$ и φ и $\varphi \vee \neg\varphi$. Наконец, α не может быть предельным ординалом по определению, так как содержит не более одного элемента (это очевидное утверждение). Во всех вариантах получаем $\varphi \vee \neg\varphi$.

Дадим, следуя наметкам из [1], доказательство б). Пусть $2' = \{0, 1'\}$ и пусть $\alpha = \{0, 1', 2', (2')^+, (2')^{++}, ...\}$. Ясно, что α — слабо предельный ординал (заметим, что всякий сильно предельный ординал является слабо предельным просто прямо по определению), так как $0 \in \alpha$ и $0 \in 2'$ и $2' \in \alpha$, а для остальных ординалов из α это видно непосредственно. Если же α является сильно предельным, то, поскольку $0 \in \alpha$, то и 0^+ также должен принадлежать α, но $0^+ = 1$ может быть равен только $1'$, а тогда необходимо следует φ и $\varphi \vee \neg\varphi$.

Так как во всех предыдущих рассуждениях формула φ выбиралась всегда произвольно, то мы доказали, что каждое из утверждений (1)–(5) (а) и (б) влечет полный закон исключенного третьего.

В заключение отметим следующее: в наших доказательствах активно использовались интуиционистская логика предикатов и аксиома объемности.

Как уже отмечалось ранее, в [9] было дано полное доказательство того факта, что тезис Чёрча CT совместен с теорией ZFIR, причем (и это важный момент!) доказательство внешним образом проводится в рамках аксиоматической теории множеств ZFIR. Таким образом, приведенный результат сильнее в метаматематическом плане, чем результат Грайсона из [1].

Литература

[1] *Grayson R.* Heyting-valued models for intuitionistic set theory // Lecture Notes in mathematics. V. 753. 1979. P. 402-414.

[2] *Myhill J.* Some properties of intuitionistic Zermelo-Fraenkel set theory // Lecture Notes in Mathematics. V. 337. 1973. P. 206-231.

[3] *Taylor P.* Intuitionistic sets and ordinals // The Journal of Symbolic Logic. V. 61, n. 3, September 1996. P. 705-744.

[4] *Хаханян В.Х.* Интуиционистская теория множеств // Логика и основания математики. Тезисы VIII Всесоюзной конференции «Логика и методология науки». Паланга 26-28 сентября 1982. С. 91-94.

[5] *Powell W.* Extending Gödel's negative interpretation to ZF// The Journal of Symbolic Logic. V. 40, n. 2. 1975. P. 221-229.

[6] *Friedman H., Scedrov A.* The lack of definable witnesses and provably recursive functions in intuitionistic set theories // Advances in Mathematics. V. 57, n. 1. 1985. P. 1-13.

[7] *Friedman H.* One hundred and two problems in mathematical logic // The Journal of Symbolic Logic. V. 40, n. 2. 1975. P. 113-130.

[8] *Хаханян В.Х.* Интуиционистская теория множеств: модели и метаматематика. М.: МИИТ, 2003.

[9] *Хаханян В.Х.* Интуиционистское доказательство совместности тезиса Чёрча с теорией множеств // Известия вузов. Серия «Математика». 1993. № 3. С. 81-83.