Стандартные и нестандартные логики аргументации I

В.К. Финн

1 Введение

В [1] был предложен вариант логики аргументации A_4, истинностные значения которой $1, \text{-}1, 0, \tau$ истолковывались соответственно как «фактически истинно», «фактически ложно», «фактически противоречиво» и «неопределенно». Семантика логики аргументации A_4 образована непустым множеством доводов (возможных аргументов и контраргументов) $\mathbf{A}$ и функциями $\mathtt{g}^+$ и $\mathtt{g}^-$ такими, что:

$\mathtt{g}^\sigma : \wp \to 2^{\mathbf{A}}$, где $\sigma \in \{+, -\}$, а $\wp$ — множество пропозициональных переменных p, q, r, s (быть может с нижними индексами). $\mathtt{g}^+(p)$ и $\mathtt{g}^-(p)$ являются множеством аргументов и контраргументов высказывания p, соответственно. Предполагается, что для любого $p \in \wp$ имеет место $\mathtt{g}^+(p) \cap \mathtt{g}^-(p) = \varnothing$.

Принцип оценивания пропозициональных переменных прост:

если p имеет аргументы и не имеет контраргументов, то p фактически истинно ($v[p] = 1$, где $v[p]$ — функция оценки);

если p не имеет аргументов и имеет контраргументы, то p фактически ложно ($v[p] = -1$);

если p имеет аргументы и имеет контраргументы, то p фактически противоречиво ($v[p] = 0$); если p не имеет ни аргументов, ни контраргументов, то p неопределенно ($v[p] = \tau$).

Таким образом, функция оценки атомарных формул определяется следующим образом:

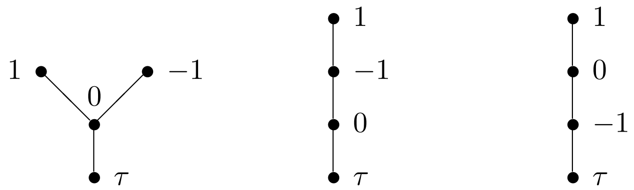
$v[p] = 1$, если и только если $\mathtt{g}^+(p) \neq \varnothing$ и $\mathtt{g}^-(p) = \varnothing$;

$v[p] = -1$, если и только если $\mathtt{g}^+(p) = \varnothing$ и $\mathtt{g}^-(p) \neq \varnothing$;

$v[p] = 0$, если и только если $\mathtt{g}^+(p) \neq \varnothing$ и $\mathtt{g}^-(p) \neq \varnothing$;

$v[p] = \tau$, если и только если $\mathtt{g}^+(p) = \mathtt{g}^-(p) = \varnothing$.

Д.А. Бочвар[1] высказал соображение об осмысленности многозначных логик при условии интерпретируемости их истинностных значений. Он предположил, что интересные многозначные логики могут быть фрагментами формализованной семантики. В соответствии с этим соображением рассмотрим 3 типа отношения порядка на множестве истинностных значений $\{1,\ -1,\ 0,\ \tau\}$:



(1) (2) (3)

Интерпретация порядка (1) следующая: высказывания подразделяются на принимаемые в силу наличия аргументов и отсутствия контраргументов (они получают оценку 1), на отвергаемые в силу наличия контраргументов и отсутствия аргументов (они получают оценку -1) и на не принимаемые и не отвергаемые, соответственно, имеющие аргументы и контраргументы (они получают оценку 0 — «фактически противоречиво») и не имеющие ни аргументов, ни контраргументов (они получают оценку τ — «неопределенность»).

Естественно тогда считать, что $V_d = \{1,\ -1\}$ образует множество выделенных истинностных значений, а $\{0,\ \tau\}$ — множество невыделенных.

Рассмотрим теперь следующие варианты четырехзначных логик аргументации $A_4^{(i)}$, $i = 0,\ 1,\ 2,\ 3$.

2 Логика аргументации $A_4^{(0)}$

Логические связки: $\sim$, $\{\&_n^{(0)}\}_{n \in N}$($n \geq 2$, N — множество натуральных чисел), $\vee^{(2)}, \supset$. Связки $\sim, \supset, \&_2^{(0)}, \vee^{(2)}$ определяются следующими истинностными таблицами.

[1] Устное сообщение.

p	$\sim p$
1	-1
-1	1
0	0
τ	τ

$\supset$	1	-1	0	τ
1	1	-1	0	τ
-1	1	1	1	1
0	1	-1	1	τ
τ	1	-1	0	1

$\&_2^{(0)}$	1	-1	0	τ
1	1	0	0	τ
-1	0	-1	0	-1
0	0	0	0	0
τ	τ	-1	0	τ

$\vee^{(2)}$	1	-1	0	τ
1	1	1	1	1
-1	1	-1	-1	-1
0	1	-1	0	0
τ	1	-1	0	τ

$A_4^{(0)}$ является модификацией логики аргументации A_4 из [7]: заменена дизъюнкция $\vee_2$ на $\vee^{(2)}$, которая является $max(p, q)$ на порядке (2).

Обратим внимание на незамкнутость $\{1, -1\}$ относительно $\&_2^{(0)}$, так как $1 \&_2^{(0)} -1 = 0$, следствием которой является ее неассоциативность [7]. Очевидно, что ограничение $\&_2^{(0)}$ на $\{1, -1\}$ является небулевским. Однако дизъюнкция $\vee^{(2)}$ образует полурешетку с единицей «1», а именно:

$p \vee^{(2)} p = p$

$p \vee^{(2)} (q \vee^{(2)} r) = (p \vee^{(2)} q) \vee^{(2)} r$

$p \vee^{(2)} q = q \vee^{(2)} p$

$p \vee^{(2)} 1 = 1.$

Отметим, что ограничение $\vee^{(2)}$ на множестве истинностных значений $\{1, -1\}$ является булевским.

3 Логика аргументации $A_4^{(1)}$

Логические связки: $\sim, \&^{(1)}, \{\vee_n^{(1)}\}_{n \in N}$, $(n \geq 2), \supset$ — определяются истинностными таблицами[2]

[2]Для $n > 2$ $\vee_n^{(1)}$ определяется посредством функции оценки аналогично [7].

$\&^{(1)}$	1	-1	0	τ
1	1	0	0	τ
-1	0	-1	0	τ
0	0	0	0	τ
τ	τ	τ	τ	τ

$\vee_2^{(1)}$	1	-1	0	τ
1	1	τ	1	1
-1	τ	-1	-1	-1
0	1	-1	0	0
τ	1	-1	0	τ

и истинностными таблицами для $\sim$ (отрицания) и $\supset$ (импликации) $A_4^{(0)}$.

Легко проверить, что $p\,\&^{(1)}q = min_1(p,q)$ для порядка (1), но $p \vee^{(1)} q$ не является $max_1(p,q)$ для этого порядка, так как $1 \vee^{(1)} -1 = \tau$.

Имеет место ассоциативность для $\&^{(1)}$:
$p\,\&^{(1)}(q\,\&^{(1)}r) = (p\,\&^{(1)}q)\,\&^{(1)}r$

Очевидно, что $\&^{(1)}$ образует полурешетку с нулем τ, а именно:
$p\,\&^{(1)}p = p$
$p\,\&^{(1)}(q\,\&^{(1)}r) = (p\,\&^{(1)}q)\,\&^{(1)}r$
$p\,\&^{(1)}q = q\,\&^{(1)}p$
$p\,\&^{(1)}\tau = \tau$

Так как $1 \vee_2^{(1)} -1 = \tau$, то дизъюнкция не является $max_1(p,q)$ для порядка (1). Более того,$\vee_2^{(1)}$ не является ассоциативной логической связкой, так как имеет место:
$1 \vee_2^{(1)} (1 \vee_2^{(1)} -1) = 1 \vee_2^{(1)} \tau = 1$ и
$(1 \vee_2^{(1)} 1) \vee_2^{(1)} -1 = 1 \vee_2^{(1)} -1 = \tau$

Как было сказано выше, $\{1, -1\}$ — множество выделенных истинностных значений в соответствии с их принятой интерпретацией, однако смыслы «1» и «-1» противоположны: если $v[p] = 1$, то p принято на основании имеющейся аргументации, но если $v[p] = -1$, то p не принято (опровергнуто) на основании имеющихся контраргументов. Поэтому «1» и «-1» не сравнимы и $1 \vee_2^{(1)} -1 = \tau$. В силу этого аналогично [7] вводится счетное множество n-местных дизъюнкций $\&_n^{(1)}$, где $n \geq 2$ и определяется функция оценки $v[\vee_n^{(1)}(p_1, \ldots, p_n)]$.

4 Логика аргументации $A_4^{(2)}$

Логические связки: $\sim, \&^{(2)}, \vee^{(2)}, \supset$ — определяются следующими истинностными таблицами

$\&^{(2)}$	1	-1	0	τ
1	1	-1	0	τ
-1	-1	-1	0	τ
0	0	0	0	τ
τ	τ	τ	τ	τ

$\vee^{(2)}$	1	-1	0	τ
1	1	1	1	1
-1	1	-1	-1	-1
0	1	-1	0	0
τ	1	-1	0	τ

и истинностными таблицами для $\sim$ и $\supset$ $A_4^{(0)}$.

Легко видеть, что $p\,\&^{(2)}q = min_2(p,q)$, а $p \vee^{(2)} q = max_2(p,q)$ для порядка (2). Множество выделенных истинностных значений $V_d = \{1\}$.

Очевидно, что $\&^{(2)}$ и $\vee^{(2)}$ образуют решетку, а ограничения $\&^{(2)}$ и $\vee^{(2)}$ на множестве $\{1, -1\}$ являются булевскими & и $\vee$, соответственно.

Можно показать, что имеют место аксиомы дистрибутивности

$p\,\&^{(2)}(q \vee^{(2)} r) = (p\,\&^{(2)}q) \vee^{(2)} (p\,\&^{(2)}r)$,

$p \vee^{(2)} (q\,\&^{(2)}r) = (p \vee^{(2)} q)\,\&^{(2)}(p \vee^{(2)} r)$.

Таким образом, $\&^{(2)}$ и $\vee^{(2)}$ образуют дистрибутивную решетку.

5 Логика аргументации $A_4^{(3)}$

Логические связки: $\sim, \&^{(3)}, \vee^{(3)}, \supset$ — определяются следующими истинностными таблицами

$\&^{(3)}$	1	-1	0	τ
1	1	-1	0	τ
-1	-1	-1	-1	τ
0	0	-1	0	τ
τ	τ	τ	τ	τ

$\vee^{(3)}$	1	-1	0	τ
1	1	1	1	1
-1	1	-1	0	-1
0	1	0	0	0
τ	1	-1	0	τ

и истинностными таблицами для $\sim$ и $\supset$ $A_4^{(0)}$.

Легко видеть, что $p\,\&^{(3)}q = min_3(p,q)$, а $p \vee^{(3)} q = max_3(p,q)$ для порядка (3). Множество выделенных истинностных значений $A_4^{(3)}$ $D = \{1\}$.

Можно показать, что $\&^{(3)}$ и $\vee^{(3)}$ образуют дистрибутивную решетку, а ограничения $\&^{(3)}$ и $\vee^{(3)}$ на множестве $\{1, -1\}$ являются булевскими & и $\vee$ соответственно.

Логики аргументации $A_4^{(2)}$ и $A_4^{(3)}$, логические связки которых $\&^{(i)}$ и $\vee^{(i)}$ $(i = 2, 3)$ образуют дистрибутивные решетки, а ограничения $\&^{(i)}\ |_{\{1,-1\}} = \&$ и $\vee^{(i)}\ |_{\{1,-1\}} = \vee$, где $\&$ и $\vee$ соответственно конъюнкция и дизъюнкция двузначной логики $(i = 2, 3)$, будем называть стандартными четырехзначными логиками аргументации. Логики аргументации $A_4^{(0)}$ и $A_4^{(1)}$, которые содержат неассоциативные логические связки $\&_2^{(0)}$ и $\vee_2^{(1)}$, а их ограничения $\&_2^{(0)}\ |_{\{1,-1\}} = \&$ и $\vee_2^{(1)}\ |_{\{1,-1\}} = \vee$ не являются соответственно $\&$ и $\vee$ двузначной логики, будем называть нестандартными[3].

6 Об интерпретации истинностных значений логик $A_4^{(i)}$

Семантическим принципом нестандартных логик аргументации $A_4^{(0)}$ и $A_4^{(1)}$ является условие оценки $\&_2^{(i)}(\varphi_1, \varphi_2)$ $(i = 0, 2)$ такое, что $v[\&_2^{(i)}(\varphi_1, \varphi_2)] = 0$, если и только если $v[\varphi_1] = 1$ и $v[\varphi_2] = -1$, или $v[\varphi_1] = -1$ и $v[\varphi_2] = 1$, или $v[\varphi_1] = 0$, или $v[\varphi_2] = 0$.

Это условие обобщается для $n > 2$ [10]: $v[\&_n^{(i)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)] = 0$, если и только если $\exists i \exists j (v[\varphi_i] = 1 \,\&\, v[\varphi_j] = -1) \vee \exists h (v[\varphi_h] = 0)$, где $1 \leq i, j, h \leq n$.

Таким образом, множество формул $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, входящих в $\&_n^{(i)}$, оцениваются как «гештальт» независимо от порядка их вхождения. Этот факт связан с неассоциативностью $\&_2^{(i)}$ и истолкованием $\&_2^{(i)}(1, -1) = 0$ как фактического противоречия. Атомарная формула p получает оценку $v[p] = 0$, если и только если $\mathtt{g}^+(p) \neq \varnothing$ и $\mathtt{g}^-(p) \neq \varnothing$. Это означает, что p имеет аргументы и контраргументы.

Порядок (1) используется для определения ассоциативной $\&^{(1)}$ с небулевским ограничением $\&^{(1)}\ |_{\{1,-1\}}$, так как $1 \,\&^{(1)} -1 = 0$. При этом для $A_4^{(1)}$ $V_d = \{1, -1\}$ это означает, что принятыми высказываниями являются как аргументируемые, так и те, которые отвергаются в силу наличия контраргументов при отсутствии аргументов.

Для нестандартных логик аргументации можно выдвинуть

---

[3]Очевидно, что логика A_4, рассмотренная в [7], является нестандартной логикой аргументации.

гипотезу о том, что функции $\mathtt{g}^+$ и $\mathtt{g}^-$ индуктивно определимы для формул φ произвольной сложности. В частности, $v[\&_2^{(i)}(\varphi_1, \varphi_2)] = 0$, если и только если $(\mathtt{g}^+(\varphi_1) \neq \emptyset \,\&\, \mathtt{g}^-(\varphi_1) \neq \emptyset) \vee (\mathtt{g}^+(\varphi_2) \neq \emptyset \,\&\, \mathtt{g}^-(\varphi_2) \neq \emptyset) \vee ((\mathtt{g}^+(\varphi_1) \neq \emptyset \,\&\, \mathtt{g}^-(\varphi_1) = \emptyset) \,\&\, (\mathtt{g}^+(\varphi_2) = \emptyset \,\&\, \mathtt{g}^-(\varphi_2) \neq \emptyset)) \vee ((\mathtt{g}^+(\varphi_1) = \emptyset \,\&\, \mathtt{g}^-(\varphi_1) \neq \emptyset) \,\&\, (\mathtt{g}^+(\varphi_2) \neq \emptyset \,\&\, \mathtt{g}^-(\varphi_2) = \emptyset))$.

Интерпретации истинностных значений для $A_4^{(2)}$ и $A_4^{(3)}$ отличаются тем, что для $A_4^{(2)}$ предпочтительнее является непринятие высказывания посредством установления контраргументов (при отсутствии аргументов) по сравнению с установлением фактического противоречия, что соответствует порядку (2); а для $A_4^{(3)}$ предпочтительнее является непринятие высказывания посредством установления как наличия аргументов, так и наличия контраргументов, по сравнению с установлением фактической ложности, что соответствует порядку (3).

7 Замечание о теории истины и семантике логики аргументации

В [10] было отмечено, что развитие теории автоматического порождения гипотез делает актуальным применение различных теорий истины — теории соответствия (Аристотель — А. Тарский), теории когерентности и прагматической теории [5]. В самом деле, формирование базы фактов интеллектуальной системы требует применения теории соответствия, оценивание и автоматическое принятие гипотез основано на теории когерентности [5] — согласованности порождаемых гипотез с имеющимися знаниями (в том числе использование абдуктивного объяснения базы фактов для принятия гипотез). Выделение надежных гипотез требует проверки их полезности при практическом применении, что означает применение теории прагматической истины.

Аналогичное имеет место и в семантике логики аргументации, ибо атомарная оценка основана на применении функций $\mathtt{g}^+$ и $\mathtt{g}^-$ и множества возможных аргументов и контраргументов $\mathbf{A}$, что означает использование теории когерентности.

В [7] семантика A_4 была охарактеризована посредством аргументационной матрицы $\mathfrak{M} = \langle\{1, -1, 0, \tau\}, V_d, \mathbf{A}, \mathtt{g}^+, \mathtt{g}^-\rangle$ и функции оценки $v[\varphi]$ для соответствующего множества логических связок. Можно сформулировать реляционный вариант семантики логики аргументации, задав отношение частичного порядка $\geq$ на множестве $\mathbf{A}$, изменив, соответственно, определения $v[\varphi]$.

Аналогично A_4, рассмотренной в [7], для логик $A_4^{(i)}$, $i = 0, 1, 2, 3$ могут быть построены формализации доказательства и выводимости из гипотез посредством метода аналитических таблиц как для логики высказываний, так и для логики предикатов.

В последнее время активно развиваются идеи и средства формализации аргументации [13, 14, 16]. Обстоятельный обзор логик аргументации и их семантик содержится в [4].

8 Логики аргументации для ДСМ-метода автоматического порождения гипотез

В [8] были представлены принципы ДСМ-метода автоматического порождения гипотез, реализующего синтез познавательных процедур — индукции, аналогии и абдукции (с возможным применением дедукции после завершения формирования знаний в результате применения ДСМ-рассуждений).

ДСМ-метод АПГ для формализации рассуждений использует итеративную логику, которая обладает следующим принципом «раскрытия неопределенностей»:

$(\tau, n) = \{\langle 1, n+1\rangle, \langle -1, n+1\rangle, \langle 0, n+1\rangle\} \cup (\tau, n+1)$, где n и $n+1$ — числа применений правил правдоподобного вывода, выражающие степень правдоподобия порождаемых гипотез (чем меньше n, тем больше степень правдоподобия гипотезы) [8].

Истинностные значения ДСМ-логик определяются следующим образом:

$\langle \nu, n\rangle \,\&^{(i)} \langle \mu, m\rangle = \langle \nu \,\&^{(i)} \mu, \, max(n, m)\rangle$,

$\langle \nu, n\rangle \vee^{(i)} \langle \mu, m\rangle = \langle \nu \vee^{(i)} \mu, \, min(n, m)\rangle$,

$\langle \nu, n\rangle \supset \langle \mu, m\rangle = \langle \nu \supset \mu, \, max(n, m)\rangle$,

$\sim \langle \nu, n\rangle = \langle \sim \nu, n\rangle$.

Рассмотрим логические связки, определяемые следующими истинностными таблицами

$\&_2^{(4)}$	1	-1	0	τ
1	1	0	0	τ
-1	0	-1	0	τ
0	0	0	0	0
τ	τ	τ	0	τ

$\vee_2^{(4)}$	1	-1	0	τ
1	1	τ	1	1
-1	τ	-1	-1	-1
0	1	-1	0	τ
τ	1	-1	τ	τ

Тогда для симметричного ДСМ-метода АПГ $\&_2^{(4)}$ и $\vee_2^{(4)}$ оказываются адекватными в соответствии с рекуррентным определением множества истинностных значений (τ, n), определенным выше. В силу этого для симметричного ДСМ-метода АПГ адекватными являются логики аргументации $A_{4,i}^{(4)}$, $(i = 1, 2)$, исходными логическими связками которых являются $\sim, \supset$, $\{\&_n^{(4)}\}_{n \in N}$, $\{\vee_n^{(4)}\}_{n \in N}$ с $V_{d,1} = \{1\}$ и $V_{d,2} = \{1, -1\}$.

Отметим, что $A_{4,2}^{(4)}$ с $V_{d,2} = \{1, -1\}$ наиболее соответствует идее симметричного ДСМ-метода АПГ.

Логики аргументации $A_{4,i}^{(4)}$ являются нестандартными четырехзначными логиками аргументации, так как $\&_2^{(4)}$ и $\vee_2^{(4)}$ являются неассоциативными логическими связками, а их ограничения $\&_2^{(4)} |_{\{1,-1\}}$ и $\vee_2^{(4)} |_{\{1,-1\}}$ не являются, соответственно, $\&$ и $\vee$ двузначной логики.

В заключение следует указать, что всем логикам аргументации, рассмотренным выше, соответствуют формализации посредством метода аналитических таблиц.

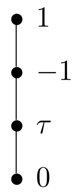
9 Логики аргументации $A_{4,i}^{(4)}$ и их ДСМ-расширения

Рассмотрим логики аргументации $A_{4,i}^{(4)}$, $i = 1, 2$ такие, что $V_{d,1} = \{1\}$, $V_{d,2} = \{1, -1\}$ соответственно для $A_{4,1}^{(4)}$ и $A_{4,2}^{(4)}$. Сигнатура $A_{4,i}^{(4)}$ состоит из $\sim$, $\supset$, $\{\&_n^{(4)}\}_{n \in N}, \vee^{(4)}$, где: $\sim$, $\supset$ — логические связки из $A_4^{(0)}$, а

$\&_2^{(4)}$	1	-1	0	τ
1	1	0	0	τ
-1	0	-1	0	τ
0	0	0	0	0
τ	τ	τ	0	τ

$\vee_2^{(4)}$	1	-1	0	τ
1	1	τ	1	1
-1	τ	-1	-1	-1
0	1	-1	0	τ
τ	1	-1	τ	τ

Легко видеть, что $\&_2^{(4)}$ является неассоциативной логической связкой, так как $0 = (1\,\&_2^{(4)} - 1)\,\&_2^{(4)}\tau \neq 1\,\&_2^{(4)}(-1\&_2^{(4)}\tau) = 1\,\&_2^{(4)}\tau = \tau$, а $p \vee^{(4)} q = max_4(p, q)$ для порядка



(4)

Мотивацией для введения $\&_2^{(4)}$ является следующее соображение, лежащее в основе процедурной семантики ДСМ-метода автоматического порождения гипотез [8]. Бесконечнозначная логика, посредством которой формализуются ДСМ-рассуждения [8], имеет конечное число типов истинностных значений и счетное множество истинностных значений $\overline{\nu}$ таких, что $\overline{\nu} = \langle \nu, n \rangle$, где ν — тип истинностных значений, а n — натуральное число, обозначающее число применений правил правдоподобного вывода (степень правдоподобия порождаемых гипотез). Минимальным множеством типов внутренних истинностных значений является множество $\{1,\,-1,\,0,\,\tau\}$, где $1, \text{-}1, 0$ и τ соответственно обозначают «фактическую истину», «фактическую ложь», «фактическую противоречивость» и «недоопределенность». Причем $\overline{\nu} = \langle \nu, n \rangle$, где $\nu \in \{1,\,-1,\,0\}$, а (τ, n) — множество возможных истинностных значений, что представляется рекуррентным соотношением

$(\tau, n) = \{\langle 1,\, n+1 \rangle, \langle -1,\, n+1 \rangle, \langle 0,\, n+1 \rangle\} \cup (\tau,\, n+1)$.

Это означает, что ДСМ-метод автоматического порождения гипотез образует процедурную семантику для итеративного порождения гипотез и их истинностных значений. В этом смысле ДСМ-логика является итеративной логикой, множество истинностных значений которой порождается динамически, уменьшая при этом неопределенность высказываний из базы фактов, оценкой которых является $(\tau, 0)$. Очевидно, что факты имеют истинностные значения $\langle\nu, 0\rangle$, где $\nu \in \{1, -1, 0\}$ или оценку $(\tau, 0)$ — недоопределенность, а гипотезы имеют истинностные значения $\langle\nu, n\rangle(\nu \in \{1, -1, 0\})$ или оценку (τ, n), где $n > 0$, представляющую множество возможных истинностных значений порождаемых гипотез.

В ДСМ-методе автоматического порождения гипотез [8], как было отмечено выше, истинностные значения $\langle\nu, n\rangle(\nu \in \{1, -1, 0\})$ и множества истинностных значений (τ, n), представляющие неопределенность, содержат параметр n, где $n \in N$ (множество натуральных чисел). Параметр n представляет степень правдоподобия истинностных значений порождаемых гипотез посредством ДСМ-метода АПГ. Эти истинностные значения подчинены принципу: чем больше n, тем меньше степень правдоподобия порождаемых гипотез. В силу этого введем определения для ν, $\mu \in \{1, -1, 0\}$:

$\langle\nu, n\rangle \,\&_2^{(4)} \langle\mu, m\rangle = \langle\nu \,\&_2^{(4)} \mu, max(n, m)\rangle$,

$\langle\nu, n\rangle \vee_2^{(4)} \langle\mu, m\rangle = \langle\nu \vee_2^{(4)} \mu, min(n, m)\rangle$,

$\langle\nu, n\rangle \,\&_2^{(4)} (\tau, m) = \{\langle\nu \,\&_2^{(4)} 1, max(n, m+1)\rangle, \langle\nu \,\&_2^{(4)} -1, max(n, m+1)\rangle, \langle\nu \,\&_2^{(4)} 0, max(n, m+1)\rangle\} \cup (\nu \,\&_2^{(4)} \tau, max(n, m+1))$,

$\langle\nu, n\rangle \vee_2^{(4)} (\tau, m) = \{\langle\nu \vee_2^{(4)} 1, min(n, m+1)\rangle, \langle\nu \,\&_2^{(4)} -1, min(n, m+1)\rangle, \langle\nu \vee_2^{(4)} 0, min(n, m+1)\rangle\} \cup (\nu \vee_2^{(4)} \tau, min(n, m+1))$[4].

Предположим теперь, что логики аргументации $A_{4,i}^{(4)}$ являются базисными конечнозначными логиками, истинностными значениями которых являются типы истинностных значений ν, μ соответственно в $\langle\nu, n\rangle$ и (τ, m), принадлежащих бесконечнозначной логике ДСМ-метода АПГ. Проведем эвристические рассуждения для выяснения адекватности истинностных таблиц для $\&_2^{(4)}$ и $\vee_2^{(1)}$ ДСМ-метода АПГ.

(1) $\nu = 1$:

$\langle 1, n\rangle \,\&_2^{(4)} (\tau, m) = \{\langle 1 \,\&_2^{(4)} 1, max(n, m+1)\rangle, \langle 1 \,\&_2^{(4)} -1, max(n, m+1)\rangle, \langle 1 \,\&_2^{(4)} 0, max(n, m+1)\rangle\} \cup (1 \,\&_2^{(4)} \tau, max(n, m+1)) =$

[4]Напомним, что в $\langle\nu, n\rangle$ и (τ, m) — n и m обозначают число применений правил правдоподобного вывода (индукции и аналогии) [8].

$\{\langle 1, max(n, m+1)\rangle, \langle 0, max(n, m+1)\rangle, \langle 0, max(n, m+1)\rangle\} \cup (\tau, max(n, m+1)) = (\tau, max(n, m))$, так как $\{\langle 1, max(n, m+1)\rangle, \langle 0, max(n, m+1)\rangle\}$ представляют неопределенность с возможными типами истинностных значений «1» или «0».

(2) $\nu = -1$:

$\langle -1, n\rangle \,\&_2^{(4)} (\tau, m) = \{\langle -1 \,\&_2^{(4)} 1, max(n, m+1)\rangle, \langle -1 \,\&_2^{(4)} -1, max(n, m+1)\rangle, \langle -1 \,\&_2^{(4)} 0, max(n, m+1)\rangle\} \cup (-1 \,\&_2^{(4)} \tau, max(n, m+1)) = \{\langle 0, max(n, m+1)\rangle, \langle -1, max(n, m+1)\rangle, \langle 0, max(n, m+1)\rangle\} \cup (\tau, max(n, m+1)) = (\tau, max(n, m))$.

(3) $\nu = 0$:

$\langle 0, n\rangle \,\&_2^{(4)} (\tau, m) = \{\langle 0 \,\&_2^{(4)} 1, max(n, m+1)\rangle, \langle 0 \,\&_2^{(4)} -1, max(n, m+1)\rangle, \langle 0 \,\&_2^{(4)} 0, max(n, m+1)\rangle\} \cup (0 \,\&_2^{(4)} \tau, max(n, m+1)) = \{\langle 0, max(n, m+1)\rangle, \langle 0, max(n, m+1)\rangle, \langle 0, max(n, m+1)\rangle\} \cup \langle 0, max(n, m+1)\rangle = \langle 0, max(n, m)\rangle$.

(4) $\nu = \tau$:

$(\tau, n) \,\&_2^{(4)} (\tau, m) = (\tau, max(n, m))$.

Таким образом, адекватны равенства $1 \,\&_2^{(4)} \tau = \tau$, $-1 \,\&_2^{(4)} \tau = \tau$, $0 \,\&_2^{(4)} \tau = \tau$ и $\tau \,\&_2^{(4)} \tau = \tau$.

Соответственно, положим, что $1 \,\&_2^{(4)} 1 = 1$, $1 \,\&_2^{(4)} -1 = 0$, $p \,\&_2^{(4)} q = q \,\&_2^{(4)} p$ и $0 \,\&_2^{(4)} q = 0$. Тогда $\&_2^{(4)}(p, q)$ и ее n-арное расширение $\&_n^{(4)}(p_1, \ldots, p_n)$ адекватны итеративному порождению истинностных значений бесконечнозначной логики A_∞ ДСМ-метода АПГ.

Аналогично проверим адекватность истинностной таблицы $\vee_2^{(1)}$ ДСМ-методу АПГ.

(1) $\nu = 1$:

$\langle 1, n\rangle \vee_2^{(4)} (\tau, m) = \{\langle 1 \vee_2^{(4)} 1, min(n, m+1)\rangle, \langle 1 \vee_2^{(4)} -1, min(n, m+1)\rangle, \langle 1 \vee_2^{(4)} 0, min(n, m+1)\rangle\} \cup (\tau \vee_2^{(4)} 1, min(n, m+1)) = \{\langle 1, min(n, m+1)\rangle, (\tau, min(n, m+1)), \langle 1, min(n, m+1)\rangle\} \cup \{\langle 1, min(n, m+1)\rangle\} = \{\langle 1, min(n, m+1)\rangle, (\tau, min(n, m+1))\} = \langle 1, min(n, m+1)\rangle\}$, так как $1 \vee_2^{(4)} \tau = 1$.

(2) $\nu = -1$:

$\langle -1, n\rangle \vee_2^{(4)} (\tau, m) = \{\langle -1 \vee_2^{(4)} 1, min(n, m+1)\rangle, \langle -1 \vee_2^{(4)} -1, min(n, m+1)\rangle, \langle -1 \vee_2^{(4)} 0, min(n, m+1)\rangle\} \cup (\tau \vee_2^{(4)} -1, min(n, m+1)) = \{(\tau, min(n, m+1)), \langle -1, min(n, m+1)\rangle, \langle -1, min(n, m+1)\rangle\} \cup \{\langle -1, min(n, m+1)\rangle\} = \{(\tau, min(n, m+1)), \langle -1, min(n, m+

$1)\rangle\} = \langle -1, min(n, m+1)\rangle$, так как $\tau \vee_2^{(4)} -1 = -1$.

(3) $\nu = 0$:

$\langle 0, n\rangle \vee_2^{(4)} (\tau, m) = \{\langle 0 \vee_2^{(4)} 1, min(n, m+1)\rangle, \langle 0 \vee_2^{(4)} -1, min(n, m+1)\rangle, \langle 0 \vee_2^{(4)} 0, min(n, m+1)\rangle\} \cup (0 \vee_2^{(4)} \tau, min(n, m+1)) = \{\langle 1, min(n, m+1)\rangle, \langle -1, min(n, m+1)\rangle, \langle 0, min(n, m+1)\rangle\} \cup (\tau, min(n, m+1)) = (\tau, max(n, m+1))$, так как $0 \vee_2^{(4)} \tau = \tau$ и в силу определения $(\tau, min(n, m+1))$.

(4) $\nu = \tau$:

$(\tau, n) \vee_2^{(4)} (\tau, m) = \{(\tau \vee_2^{(4)} 1, min(n+1, m+1)), (\tau \vee_2^{(4)} -1, min(n+1, m+1)), (\tau \vee_2^{(4)} 0, min(n+1, m+1))\} \cup (\tau \vee_2^{(4)} \tau, min(n+1, m+1)) = \{\langle 1, min(n+1, m+1)\rangle, \langle -1, min(n+1, m+1)\rangle, (\tau, min(n+1, m+1))\} = (\tau, min(n+1, m+1)))$, так как $1 \vee_2^{(4)} -1 = \tau$.

(5) $\langle 1, n\rangle \vee_2^{(4)} \langle -1, m\rangle = \langle 1 \vee_2^{(4)} -1, min(n, m)\rangle = (\tau, min(n, m))$, так как $1 \vee_2^{(4)} -1 = \tau$.

(6) Аналогично: $\langle -1, n\rangle \vee_2^{(4)} \langle 1, m\rangle = (\tau, min(n, m))$ в силу коммутативности $\vee_2^{(4)}$.

Так как $\langle \nu, n\rangle \,\&_2^{(4)} \langle \mu, m\rangle$ и $\langle \nu, n\rangle \vee_2^{(4)} \langle \mu, m\rangle$ при ν, $\mu \in \{1, -1, 0\}$ определяются посредством $\langle \nu \,\&_2^{(4)} \mu, max(n, m)\rangle$ и $\nu \vee_2^{(4)} \mu, min(n, m)\rangle$ соответственно установлена адекватность определения $\&_2^{(4)}$ и $\vee_2^{(4)}$ для $A_{4,i}^{(4)}$ и ее бесконечнозначных расширений $A_{\infty,i}^{(4)}$, являющихся вариантом ДСМ-логик с конструктивно порождаемым множеством истинностных значений. Базисной логике аргументации $A_{4,1}^{(4)}$ соответствует $A_{\infty,1}^{(4)}$ с множеством выделенных истинностных значений $V_{d,1}^{(\infty)} = \{\langle 1, n\rangle\}_{n\in N}$, а базисной логике аргументации $A_{4,2}^{(4)}$ соответствует $A_{\infty,2}^{(4)}$ с $V_{d,2}^{(\infty)} = \{\langle 1, n\rangle, \langle -1, n\rangle\}_{n\in N}$, где N — множество натуральных чисел.

Базисными логиками аргументации для бесконечнозначных ДСМ-логик $A_{\infty,i}^{(4)}$ являются логики $A_{4,i}^{(4)}$ такие, что истинностными значениями являются типы истинностных значений ν, входящие в качестве первой компоненты в $\langle \nu, n\rangle$ — истинностные значения логик $A_{\infty,i}^{(4)}$ $(i = 1, 2)$.

Сигнатурой $A_{\infty,i}^{(4)}$ является $\sim, \supset, \{\&_n^{(4)}\}_{n\in N}, \{\vee_n^{(4)}\}_{n\in N}$, где $\&_n^{(4)}$ и $\vee_n^{(4)}$ определяются для типов истинностных значений ниже следующим образом $(n \geq 2)$.

Обозначим посредством $v[\varphi]$ функцию оценки формул φ логик $A^{(4)}_{4,i}$.

$\&^{(4)}_n(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ и $\vee^{(4)}_n(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ соответственно обозначают n-членные конъюнкции и дизъюнкции.

(1) $v[\&^{(4)}_n(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)] = 1$, если и только если $v[\varphi_1] = v[\varphi_2] = \ldots = v[\varphi_n] = 1$.

(2) $v[\&^{(4)}_n(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)] = -1$, если и только если $v[\varphi_1] = v[\varphi_2] = \ldots = v[\varphi_n] = -1$.

(3) $v[\&^{(4)}_n(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)] = 0$, если и только если $\exists i \exists j (v[\varphi_i] = 1 \,\&\, v[\varphi_j] = -1) \vee \exists h (v[\varphi_h] = 0)$.

(4) $v[\&^{(4)}_n(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)] = \tau$, если и только если $\exists i (v[\varphi_i] = \tau) \,\&\, \forall j (v[\varphi_j] \neq 0) \,\&\neg \exists h \exists m (v[\varphi_h] = 1 \,\&\, v[\varphi_m] = -1)$.

(5) $v[\vee^{(4)}_n(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)] = 1$, если и только если $\exists i (v[\varphi_i] = 1) \,\&\, \forall j (v[\varphi_j] \neq -1)$.

(6) $v[\vee^{(4)}_n(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)] = -1$, если и только если $\exists i (v[\varphi_i] = -1) \,\&\, \forall j (v[\varphi_j] \neq 1)$.

(7) $v[\vee^{(4)}_n(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)] = 0$, если и только если $v[\varphi_1] = v[\varphi_2] = \ldots = v[\varphi_n] = 0$.

(8) $v[\vee^{(4)}_n(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)] = \tau$, если и только если $\exists i \exists j ((v[\varphi_i] = 1 \,\&\, v[\varphi_j] = -1) \,\&\, \forall h (h \neq i \,\&\, h \neq j) \supset (v[\varphi_h] = 0 \vee (v[\varphi_h] = \tau)) \vee \exists m (v[\varphi_m] = \tau \,\&\, \forall k (v[\varphi_k] = \tau \vee v[\varphi_j] = 0))$.

Рассмотрим некоторые функциональные свойства логик $A^{(4)}_{4,i}$.

Определим логическую связку эквиваленции аналогично [7]:

$(p \equiv q) \rightleftharpoons \&^{(4)}_n((p \supset q), (q \supset p), (\sim p \supset \sim q), (\sim q \supset \sim p))$, где $\rightleftharpoons$ — знак равенства по определению. Легко показать, что

$$(p \equiv q) = \begin{cases} 1, \text{если } v[p] = v[q] \\ 0, \text{если } v[p] \neq v[q] \end{cases}.$$

Следовательно, для любой оценки v $v[(\varphi \equiv \psi)] = 1$ тогда и только тогда, когда $v[\varphi] = v[\psi]$[5].

Пусть $\nabla(p_1, \ldots, p_n)$ — четырехзначная n-арная логическая связка, пусть, далее, φ — формула, содержащая вхождение переменных $p_1, \ldots, p_n$ и логических связок $A_{4,i}^{(4)}$ (т.е. $\sim$, $\supset$, $\{\&_n^{(4)}\}_{n \in N}$, $\{\vee_n^{(4)}\}_{n \in N}$) и не содержащая вхождений ∇. Тогда будем говорить, что $\nabla(p_1, \ldots, p_n)$ выразима в $A_{4,i}^{(4)}$, если и только если для любой оценки v имеет место $v[\nabla(p_1, \ldots, p_n) \equiv \varphi] = 1$, т.е. для любой оценки v $v[\nabla(p_1, \ldots, p_n)] = v[\varphi]$.

Легко показать, что константы 1, -1, 0, τ выразимы в $A_{4,i}^{(4)}$:

$1 \equiv (p \supset p), -1 \equiv\sim (p \supset p), 0 \equiv \&_2^{(4)}((p \supset p), \sim (p \supset p)), \tau \equiv \vee_2^{(4)}((p \supset p), \sim (p \supset p))$.

Очевидно также, что $(p \equiv q)$ выразима в $A_{4,i}^{(4)}$, так как

$(p \equiv q) \equiv \&_4^{(4)}((p \supset q), (q \supset p), (\sim p \supset\sim q), (\sim q \supset\sim p))$.

Пусть $V_d^{(i)}$ — множества выделенных истинностных значений для логик $A_{4,1}^{(4)}$ и $A_{4,2}^{(4)}$ соответственно, тогда тавтологией $A_{4,i}^{(4)}$ будем называть формулу φ такую, что для всякой оценки v $v[\varphi] \in V_d^{(i)}$, где $V_d^{(1)} = \{1\}$, а $V_d^{(2)} = \{1, -1\}$.

Тавтологии и доказуемые формулы будем обозначать посредством $\models \varphi$ и $\vdash \varphi$ соответственно, где $\models$ — обозначение тавтологичности, а $\vdash$ — обозначение доказуемости формулы φ соответственно.

Очевидно следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *В логике $A_{4,2}^{(4)}$ имеются тавтологии трех типов таких, что они принимают истинностные значения только «1», только «-1» и «1,-1».*

Пусть $\models_1$, $\models_2$ и $\models_3$ обозначают тавтологичность трех приведенных выше типов соответственно, тогда

$\models_1 (p \supset p), \models_2 (\sim (p \supset p)), \models_3 ((p \vee_2^{(4)} \sim (p \supset p)) \supset (\sim p \supset\sim (p \supset p)))$.

Таким образом,

---

[5]Обратим внимание на тот факт, что в трехзначной логике Д.А. Бочвара логическая связка эквивалентности $\equiv$ определяется аналогично: $(p \equiv q) \rightleftharpoons (p \to q) \widehat{\cap} (q \to p) \widehat{\cap} (\sim p \supset\sim q) \widehat{\cap} (\sim q \supset\sim p)$, где $\widehat{\cap}$ и $\to$ соответственно внутренняя конъюнкция и внешняя импликация B_3 [3, 6].

$\models_1 \varphi \rightleftharpoons \forall v(v[\varphi] = 1)$,
$\models_2 \varphi \rightleftharpoons \forall v(v[\varphi] = -1)$,
$\models_3 \varphi \rightleftharpoons \forall v(v[\varphi] \subseteq \{1, -1\})$.
В самом деле,

p	$p \vee_2^{(4)} 0$	$\sim p$	$\sim p \vee_2^{(4)} 0$	$p \vee_2^{(4)} 0 \supset (\sim p \vee_2^{(4)} 0)$
1	1	−1	−1	−1
−1	−1	1	1	1
0	0	0	0	1
τ	τ	τ	τ	1

Таблица A

Согласно методу аналитических таблиц [15] построим классификацию формул логик $A_{4,i}^{(4)}$, особенностью которой будет введение параметра n — числа различных переменных, входящих в данную формулу φ.

Определим непомеченные формулы $A_{4,i}^{(4)}$ стандартным образом. Пусть φ — формула, тогда $J_1\varphi$, $J_{-1}\varphi$, $J_0\varphi$, $J_\tau\varphi$ будем называть помеченными формулами.

$$J_\nu\varphi = \begin{cases} t, \text{если } v[\varphi] = \nu \\ f, \text{если } v[\varphi] \neq \nu, \end{cases}$$

где t, f — истина и ложь двузначной логики соответственно.

Классификацию формул построим для помеченных формул $A_{4,i}^{(4)}$. Эта классификация учитывает наличие (отсутствие) и характер ветвления следствий, получаемых из посылок правил вывода, что соответствует определению оценки $v[\varphi]$ для формул $\sim \varphi, (\varphi \supset \psi)$, $\&_n^{(4)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, $\vee_n^{(4)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

$\alpha^{(n)}$ — формулы ($n = 1, 2, \dots$):
$J_\nu(\sim \varphi)$, где $\nu \in \{1, -1, 0, \tau\}$, а $n = 1$;
$J_1(\&_n^{(4)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n))$, $J_{-1}(\&_n^{(4)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n))$, $J_0(\vee_n^{(4)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n))$.
$\beta_1^{(2)}$ — формулы: $J_0(\varphi_1 \supset \varphi_2)$, $\beta_2^{(2)}$ — формулы: $J_\tau(\varphi_1 \supset \varphi_2)$;
$\beta_3^{(3)}$ — формулы: $J_{-1}(\varphi_1 \supset \varphi_2)$;
$\beta_4^{(4)}$ — формулы: $J_1(\varphi_1 \supset \varphi_2)$.
$\gamma^{(n)}$ — формулы: $J_0(\&_n^{(4)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n))$.
$\delta^{(n)}$ — формулы: $J_1(\vee_n^{(4)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n))$, $J_{-1}(\vee_n^{(4)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n))$.

$\mu^{(n)}$ — формулы: $J_\tau(\vee_n^{(4)}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n))$.

$\eta^{(n)}$ — формулы: $J_\tau(\&_n^{(4)}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n))$.

Можно представить число ветвлений в правилах вывода формул соответствующего типа. Например, $\mathbf{B}^{\&^{(4)}}_{\tau,n}$ обозначает число ветвлений для $\eta^{(n)}$ — формул.

Соответственно получаем $\mathbf{B}^{\vee^{(4)}}_{1,n} = \mathbf{B}^{\vee^{(4)}}_{-1,n} = \tilde{A}_3^n - \tilde{A}_2^n = 3^n - 2^n$ для $\delta^{(n)}$ — формул, где $\tilde{A}_m^k$ — число размещений с повторениями из m элементов по k элементам.

$\mathbf{B}^{\&^{(4)}}_{0,n}$ для $\gamma^{(n)}$ — формул: $\mathbf{B}^{\&^{(4)}}_{0,n} = \tilde{A}_3^n - 2\tilde{A}_2^n + n + 1 = 3^n - 2^{n+1} + n + 1$, а также

$\mathbf{B}^{\vee^{(4)}}_{\tau,n} = A_n^2 \cdot \tilde{A}_2^{n-2} + \tilde{A}_2^n - 1 = n(n-1)2^{n-2} + 2^n - 1$, где A_n^2 — число размещений из n элементов по 2 для $\mu^{(n)}$ — формул; для $\eta^{(n)}$ — формул: $\mathbf{B}^{\&^{(4)}}_{\tau,n} = 2\tilde{A}_2^n - 3 = 2^{n+1} - 3$.

В соответствии с классификацией формул логик $A_{4,i}^{(4)}$ приведем пример правил для числа $n = 1$ и $n = 2$.

$$\alpha^{(1)}$$

$$\frac{J_1(\sim\varphi)}{J_{-1}\varphi},\quad \frac{J_{-1}(\sim\varphi)}{J_1\varphi},\quad \frac{J_0(\sim\varphi)}{J_0\varphi},\quad \frac{J_\tau(\sim\varphi)}{J_\tau\varphi};$$

$$\alpha^{(2)}$$

$$\frac{J_1(\&_2^{(4)}(\varphi_1,\varphi_2))}{J_1\varphi_1, J_1\varphi_2},\quad \frac{J_{-1}(\&_2^{(4)}(\varphi_1,\varphi_2))}{J_{-1}\varphi_1, J_{-1}\varphi_2},\quad \frac{J_0(\vee_2^{(4)}(\varphi_1,\varphi_2))}{J_0\varphi_1, J_0\varphi_2};$$

$$\beta_1^{(2)} \qquad\qquad \beta_2^{(2)}$$

$$\frac{J_0(\varphi_1\supset\varphi_2)}{J_1\varphi_1,\ J_0\varphi_2 \mid J_\tau\varphi_1, J_0\varphi_2},\qquad \frac{J_\tau(\varphi_1\supset\varphi_2)}{J_1\varphi_1,\ J_\tau\varphi_2 \mid J_0\varphi_1, J_\tau\varphi_2},$$

$$\beta_3^{(3)}$$

$$\frac{J_{-1}(\varphi_1\supset\varphi_2)}{J_1\varphi_1,\ J_{-1}\varphi_2 \mid J_0\varphi_1, J_{-1}\varphi_2 \mid J_\tau\varphi_1, J_{-1}\varphi_2};$$

$$\beta_4^{(4)}$$

$$\frac{J_1(\varphi_1\supset\varphi_2)}{J_{-1}\varphi_1 \mid J_1\varphi_2 \mid J_0\varphi_1, J_0\varphi_2 \mid J_\tau\varphi_1, J_\tau\varphi_2};$$

$$\gamma^{(2)}$$

$$\frac{J_0(\&_2^{(4)}(\varphi_1,\varphi_2))}{J_0\varphi_1 \;\Big|\; J_0\varphi_2 \;\Big|\; J_1\varphi_1, J_{-1}\varphi_2 \;\Big|\; J_{-1}\varphi_1, J_1\varphi_2};$$

$$\delta^{(2)}$$

$$\frac{J_1(\vee_2^{(4)}(\varphi_1,\varphi_2))}{J_1\varphi_1, J_1\varphi_2 \;\Big|\; J_1\varphi_1, J_0\varphi_2 \;\Big|\; J_1\varphi_1, J_\tau\varphi_2}$$

$$J_0\varphi_1, J_1\varphi_2 \;\Big|\; J_\tau\varphi_1, J_1\varphi_2$$

$$\frac{J_{-1}(\vee_2^{(4)}(\varphi_1,\varphi_2))}{J_{-1}\varphi_1, J_{-1}\varphi_2 \;\Big|\; J_{-1}\varphi_1, J_0\varphi_2 \;\Big|\; J_{-1}\varphi_1, J_\tau\varphi_2}$$

$$J_0\varphi_1, J_{-1}\varphi_2 \;\Big|\; J_\tau\varphi_1, J_{-1}\varphi_2$$

$$\mu^{(2)}$$

$$\frac{J_\tau(\vee_2^{(4)}(\varphi_1,\varphi_2))}{J_1\varphi_1, J_{-1}\varphi_2 \;\Big|\; J_{-1}\varphi_1, J_1\varphi_2 \;\Big|\; J_0\varphi_1, J_\tau\varphi_2}$$

$$J_\tau\varphi_1, J_0\varphi_2 \;\Big|\; J_\tau\varphi_1, J_\tau\varphi_2$$

$$\eta^{(2)}$$

$$\frac{J_\tau(\&_2^{(4)}(\varphi_1,\varphi_2))}{J_1\varphi_1, J_\tau\varphi_2 \;\Big|\; J_{-1}\varphi_1, J_\tau\varphi_2 \;\Big|\; J_\tau\varphi_1, J_1\varphi_2}$$

$$J_\tau\varphi_1, J_{-1}\varphi_2 \;\Big|\; J_\tau\varphi_1, J_\tau\varphi_2$$

Приведем пример $\mu^{(3)}$ — правила вывода для $n = 3$ членов дизъюнкции $\vee_3^{(n)}$:

$J_\tau(\vee_3^{(4)}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3))$

$J_1\varphi_1, J_{-1}\varphi_2, J_0\varphi_3$	$J_0\varphi_1, J_1\varphi_2, J_{-1}\varphi_3$	$J_1\varphi_1, J_0\varphi_2, J_{-1}\varphi_3$
$J_{-1}\varphi_1, J_0\varphi_2, J_1\varphi_3$	$J_1\varphi_1, J_{-1}\varphi_2, J_\tau\varphi_3$	$J_\tau\varphi_1, J_1\varphi_2, J_{-1}\varphi_3$
$J_1\varphi_1, J_\tau\varphi_2, J_{-1}\varphi_3$	$J_{-1}\varphi_1, J_\tau\varphi_2, J_1\varphi_3$	$J_\tau\varphi_1, J_\tau\varphi_2, J_0\varphi_3$
$J_\tau\varphi_1, J_0\varphi_2, J_\tau\varphi_3$	$J_0\varphi_1, J_\tau\varphi_2, J_\tau\varphi_3$	$J_0\varphi_1, J_0\varphi_2, J_\tau\varphi_3$
$J_0\varphi_1, J_\tau\varphi_2, J_0\varphi_3$	$J_\tau\varphi_1, J_0\varphi_2, J_0\varphi_3$	$J_\tau\varphi_1, J_\tau\varphi_2, J_\tau\varphi_3$

В соответствии с классификацией $\alpha^{(n)}$-, $\beta_i^{(2)}$-, $\beta_3^{(3)}$-, $\beta_4^{(4)}$-, $\gamma^{(n)}$-, $\delta^{(n)}$-, $\mu^{(n)}$-, $\eta^{(n)}$-формул и определением числа разветвлений в правилах вывода $\mathbf{B}_{0,n}^{\&(4)}$ для $\gamma^{(n)}$-формул, $\mathbf{B}_{\pm 1,n}^{\vee(4)}$ для $\delta^{(n)}$-формул, $\mathbf{B}_{\tau,n}^{\vee(4)}$ для $\mu^{(n)}$-формул, $\mathbf{B}_{\tau,n}^{\&(4)}$ для $\eta^{(n)}$-формул, а также в соответствии с определением числа разветвлений в правилах вывода построим соответствующую таблицу

Тип формул	Число разветвлений	Логические связки
$\alpha^{(n)}$	0	$J_\nu(\sim\varphi)$, $\nu \in \{1, -1, 0, \tau\}$, $J_1(\&_n^{(4)})$, $J_{-1}(\&_n^{(4)})$, $J_0(\vee_n^{(4)})$
$\beta_1^{(2)}$,$\beta_2^{(2)}$	2	$J_0(\supset)$,$J_\tau(\supset)$
$\beta_3^{(3)}$	3	$J_{-1}(\supset)$
$\beta_4^{(4)}$	4	$J_1(\supset)$
$\gamma^{(n)}$	$\tilde{A}_3^n - 2\tilde{A}_2^n + 1 + n =$ $3^n - 2^{n+1} + n + 1$	$J_0(\&_n^{(4)})$
$\delta^{(n)}$	$\tilde{A}_3^n - \tilde{A}_2^n = 3^n - 2^n$	$J_1(\vee_n^{(4)})$,$J_{-1}(\vee_n^{(4)})$
$\mu^{(n)}$	$A_2^n \cdot \tilde{A}_2^{n-2} + \tilde{A}_2^n - 1 =$ $n(n-1)2^{n-2} + 2^n - 1$	$J_\tau(\vee_n^{(4)})$
$\eta^{(n)}$	$2\tilde{A}_2^n - 3 = 2^{n+1} - 3$	$J_\tau(\&_n^{(4)})$

Таблица B

$A_2^n = n(n-1)$ — число размещений из n по 2, $\tilde{A}_m^n = m^n$ — число размещений с повторениями из m по n.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Числа разветвлений в правилах вывода логик* $A^{(4)}_{4,i}$ $(i = 1, 2)$ *определяются согласно таблице B.*

Блоком следствий правила вывода будем называть элемент разветвлений. Например, для $\beta^{(3)}_3$-формул имеем 3 блока $J_1\varphi_1$, $J_{-1}\varphi_2$; $J_0\varphi_1$, $J_{-1}\varphi_2$; $J_\tau\varphi_1$, $J_{-1}\varphi_2$ для посылки $J_{-1}(\varphi_1 \supset \varphi_2)$.

Для $\gamma^{(n)}$, $\delta^{(n)}$, $\mu^{(n)}$, $\eta^{(n)}$-формул определяются соответствующие правила вывода (аналогично [7] такие, что в каждом блоке (для $\delta^{(n)}$-, $\mu^{(n)}$-, $\eta^{(n)}$-правил) имеется n элементов). Всего же элементов в следствиях этих правил $B \cdot n$, где B — число блоков правил вывода. Например, число элементов в следствиях $\delta^{(n)}$-правил есть $\mathbf{B}^{\&(4)}_{\pm1,n} \cdot n = (3^n - 2^n)n$. Число же элементов в следствиях $\gamma^{(n)}$-правил есть $(3^n - 2^{n+1} + 1)n + n$. Число элементов в следствиях $\alpha^{(n)}$-правил равно n.

Представление правил вывода логик аргументации является делом трудоемким, хотя для каждого конкретного n, используя определение $v[\varphi]$ и таблицу B, это сделать несложно. Из таблицы B видно, что $A^{(4)}_{4,i}$ имеют комбинаторную природу[6], что требует вычислительных ресурсов современных компьютеров, ибо человеческие ресурсы ограничены, по-видимому, для $n > 6$. В этом смысле можно говорить о компьютерной осуществимости логик $A^{(4)}_{4,i}$.

10 Доказуемость формул в $A^{(4)}_{4,i}$ $(i = 1, 2)$

Аналогично [7] сформулируем схемы правил вывода для помеченных формул логик $A^{(4)}_{4,i}$. Напомним, что формулой (непомеченной формулой) называется правильно построенное выражение для сигнатуры $p, q, r, \ldots$ (быть может, с нижними индексами, $\sim, \supset$, $\{\&^{(4)}_n\}_{n\in N}$, $\{\vee^{(4)}_n\}_{n\in N}$). Если φ — формула, то $J_\nu\varphi$ — помеченная формула, где $\nu \in \{1, -1, 0, \tau\}$.

В схемах правил посылки $\alpha^{(n)}$-формул будут представлены посредством $\alpha^{(n)}$, где $n \geq 1$, а следствие — посредством $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. В схемах $\beta^{(j)}_i$-формул $(i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, 3, 4)$ посылки будут представлены посредством $\beta^{(j)}_i$, где i — номер вида правила, а j — число разветвлений (блоков) в следствии правила. Компонентами блоков будут $\beta^{(i)}_{k,m}$, где i — номер вида правила, k —

[6]Разумеется, в смысле комбинаторики, а не комбинаторной логики.

номер блока, а m — номер компоненты в k-том блоке. Таким образом, имеем следующие схемы правил вывода:

$$\frac{\alpha^{(n)}}{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}$$

$$\frac{\beta_1^{(2)}}{\beta_{11}^{(1)},\ \beta_{12}^{(1)}\ \Big|\ \beta_{21}^{(1)}, \beta_{22}^{(1)}} \qquad \frac{\beta_2^{(2)}}{\beta_{11}^{(2)},\ \beta_{12}^{(2)}\ \Big|\ \beta_{21}^{(2)}, \beta_{22}^{(2)}}$$

$$\frac{\beta_3^{(3)}}{\beta_{11}^{(3)},\ \beta_{12}^{(3)}\ \Big|\ \beta_{21}^{(3)}, \beta_{22}^{(3)}\ \Big|\ \beta_{31}^{(3)}, \beta_{32}^{(3)}}$$

$\beta_1^{(2)}$ представляет $J_0(\varphi_1 \supset \varphi_2)$, а $\beta_2^{(2)}$ представляет $J_\tau(\varphi_1 \supset \varphi_2)$; соответственно $\beta_3^{(3)}$ представляет $J_{-1}(\varphi_1 \supset \varphi_2)$.

$\beta_4^{(4)}$ представляет $J_1(\varphi_1 \supset \varphi_2)$, а следствие этой посылки состоит из четырех блоков $\beta_1^{(4)}$; $\beta_2^{(4)}$; $\beta_{31}^{(4)}$, $\beta_{32}^{(4)}$; $\beta_{41}^{(4)}$, $\beta_{42}^{(4)}$.

Таким образом, получаем

$$\frac{\beta_4^{(4)}}{\beta_1^{(4)}\ \Big|\ \beta_2^{(4)}\ \Big|\ \beta_{31}^{(4)}, \beta_{32}^{(4)}\ \Big|\ \beta_{41}^{(4)}, \beta_{42}^{(4)}}$$

В схемах правил посылки $\gamma^{(n)}$-формул будут представлены посредством $\gamma^{(n)}$, где $n \geq 2$, а следствия — посредством блоков, число которых $\mathbf{B}_{0,n}^{\&(4)} = \tilde{A}_3^n - 2\tilde{A}_2^n + 1 + n = 3^n - 2^{n+1} + n + 1$; т.е. $\mathbf{B}_{0,n}^{\&(4)} = B_{\gamma^{(n)}} + n$, где $B_{\gamma^{(n)}} = 3^n - 2^{n+1} + 1$.

В силу определения $v[\&_n^{(4)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)]$ и $\mathbf{B}_{0,n}^{\&(4)}$ из утверждения 2 получаем следующую схему $\gamma^{(n)}$-правила

$$\frac{\gamma^{(n)}}{\gamma_1\ \Big|\ \ldots\ \Big|\ \gamma_n\ \Big|\ \gamma_{11}, \ldots, \gamma_{1n}\ \Big|\ \ldots\ \Big|\ \gamma_{B_{\gamma^{(n)}1}}, \ldots, \gamma_{B_{\gamma^{(n)}n}}}$$

В схемах правил для $\delta^{(n)}$-формул посылки будут представлены посредством $\delta^{(n)}$, а следствия — посредством $\mathbf{B}_{\pm 1,n}^{\vee(4)} = \tilde{A}_3^n - \tilde{A}_2^n = 3^n - 2^n$.

Таким образом, получаем следующую схему $\delta^{(n)}$-правил

$$\frac{\delta^{(n)}}{\delta_{11},\ldots,\delta_{1n} \;\Big|\; \ldots \;\Big|\; \delta_{(B^{\vee(4)}_{\pm 1,n})1},\ldots,\delta_{(B^{\vee(4)}_{\pm 1,n})n}}$$

Аналогично получаем схемы правил вывода для $\mu^{(n)}$- и $\eta^{(n)}$-формул:

$$\frac{\mu^{(n)}}{\mu_{11},\ldots,\mu_{1n} \;\Big|\; \ldots \;\Big|\; \mu_{(B^{\vee(4)}_{\tau,n})1},\ldots,\mu_{(B^{\vee(4)}_{\tau,n})n}},$$

$$\frac{\eta^{(n)}}{\eta_{11},\ldots,\eta_{1n} \;\Big|\; \ldots \;\Big|\; \eta_{(B^{\&(4)}_{\tau,n})1},\ldots,\eta_{(B^{\&(4)}_{\tau,n})n}},$$

где $\mathbf{B}^{\vee(4)}_{\tau,n} = \tilde{A}^n_2 \cdot \tilde{A}^{n-2}_2 + \tilde{A}^n_2 - 1 = n(n-1)2^{n-2} + 2^n - 1$, а $\mathbf{B}^{\&(4)}_{\tau,n} = 2\tilde{A}^n_2 - 3 = 2^{n+1} - 3$.

Согласно [15] аналитическая таблица двузначной логики высказываний есть ориентированное дихотомическое дерево такое, что его вершинами являются α- и β-формулы, растущее вниз от корня к листьям, которыми являются элементарные формулы (атомарные или их отрицания). Обобщение этого определения для логики аргументации A_4 содержится в [7]. Аналогично определим аналитическую таблицу для логик $A^{(4)}_{4,i}$.

Аналитической таблицей для логик высказываний $A^{(4)}_{4,i}$ ($i = 1, 2$) будем называть растущее вниз (от корня к листьям) ориентированное дерево с разветвлениями, равными 0, 2, 3, 4, $\mathbf{B}^{\&(4)}_{0,n}$, $\mathbf{B}^{\vee(4)}_{\pm 1,n}$, $\mathbf{B}^{\vee(4)}_{\tau,n}$, $\mathbf{B}^{\&(4)}_{\tau,n}$ такое, что его корнем является помеченная формула $J_\nu\varphi$, где $\nu \in \{1, -1, 0, \tau\}$, а каждая вершина (отличная от корня) порождена применением $\alpha^{(n)}$-, $\beta^{(2)}_1$-, $\beta^{(2)}_2$-, $\beta^{(3)}_3$-, $\beta^{(4)}_4$-, $\gamma^{(n)}$-, $\delta^{(n)}$-, $\mu^{(n)}$- и $\eta^{(n)}$-правилами вывода.

Аналогично [7] определяются завершенная ветвь, замкнутая и открытая ветвь аналитической таблицы (а.т.) $\Im_{J_\nu\varphi}$, где $J_\nu\varphi$ — корень, а также замкнутая а.т. $\Im_{J_\nu\varphi}$.

Будем говорить, что непомеченная формула φ доказуема в $A^{(4)}_{4,1}$, если и только если а.т.$\Im_{J_{-1}\varphi}$ $\Im_{J_0\varphi}$, и $\Im_{J_\tau\varphi}$ являются замкнутыми. Соответственно, для доказуемой в $A^{(4)}_{4,1}$ формулы φ введем обозначение $\vdash_{A^{(4)}_{4,1}} \varphi$.

Будем говорить, что непомеченная формула φ доказуема в $A^{(4)}_{4,2}$, если и только если а.т. $\Im_{J_0\varphi}$, и $\Im_{J_\tau\varphi}$ являются замкнутыми. Соответственно, для доказуемой в $A^{(4)}_{4,2}$ формулы введем обозначение $\vdash_{A^{(4)}_{4,2}} \varphi$.

Очевидно, что имеет место

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Если* $\vdash_{A^{(4)}_{4,1}} \varphi$, *то* $\vdash_{A^{(4)}_{4,2}} \varphi$.

Аналогично [7] определяются множества Хинтикки для логик $A^{(4)}_{4,i}$.

11 Некоторые утверждения о логике высказываний $A^{(4)}_{4,1}$

Для $A^{(4)}_{4,1}$ имеет место

ТЕОРЕМА 4 (О корректности $A^{(4)}_{4,1}$). *Если* $\vdash_{A^{(4)}_{4,1}} \varphi$, *то* $\models_1 \varphi$.

Напомним, что $\models_1 \varphi \rightleftharpoons \forall v(v[\varphi] = 1)$, а множество выделенных истинностных значений $A^{(4)}_{4,1}$ $V^{(1)}_d = \{1\}$.

Аналогично [15] доказываются две леммы:

ЛЕММА 5. *Если* $\Im_{j+1}$ *— непосредственное расширение а.т.* $\Im_j$ *и* $\Im_j$ *— истинная а.т., то* $\Im_{j+1}$ *— истинная а.т.*

ЛЕММА 6. *Пусть* $J_\nu\varphi$ *— корень а.т.* $\Im_{J_\nu\varphi}$, *если* $v[J_\nu\varphi] = t$, *то* $\Im_{J_\nu\varphi}$ *— истинная а.т.* ($\nu \in \{1, -1, 0, \tau\}$).

Аналитическая таблица $\Im_{J_\nu\varphi}$ называется истинной, если в ней существует истинная ветвь θ, то есть. множество всех вершин θ Set (θ) является таким, что $\exists v \forall \psi((\psi \in Set(\theta)) \supset v[\psi] = t)$, где ψ — помеченные формулы, имеющие вид $\psi = J_\mu\psi_1$, где ψ_1 — непомеченная формула $A^{(4)}_{4,1}$.

Лемма 5 доказывается разбором случаев $\alpha^{(n)}$, $\beta^{(2)}_1$, $\beta^{(2)}_2$, $\beta^{(3)}_3$, $\beta^{(4)}_4$, $\gamma^{(n)}$, $\delta^{(n)}$, $\mu^{(n)}$ и $\eta^{(n)}$. Лемма 6 доказывается индукцией по сложности формулы $J_\nu\varphi$, а шагом индукции является лемма 5.

Доказательство. Пусть неверно, что $\models_1 \varphi$, тогда $\exists v(v[\varphi] = \mu \,\&\, \mu \neq 1)$. Следовательно, $\mu \in \{0, -1, \tau\}$, но в силу $\vdash_1 \varphi$ имеем замкнутость $\Im_{J_{-1}\varphi}$, $\Im_{J_0\varphi}$, $\Im_{J_\tau\varphi}$. Из леммы 6 следует, что в а.т. $\Im_{J_\mu\varphi}$ существует открытая ветвь θ, что противоречит замкнутости $\Im_{J_{-1}\varphi}$, $\Im_{J_0\varphi}$ и $\Im_{J_\tau\varphi}$. Q.E.D.

Имеет место также

ТЕОРЕМА 7 (О слабой полноте). *Если* $\models_1 \varphi$, *то* $\vdash_{A^{(4)}_{4,1}} \varphi$.

Доказательство теоремы 7 аналогично доказательству теоремы о полноте логики A_4 в [7] с использованием определения множеств Хинтикки для $A^{(4)}_{4,1}$.

Рассмотрим теперь логику JA_4, имеющую семантику логики $A^{(4)}_{4,1}$ и являющуюся расширением двузначной логики [9].

12 Логика высказываний JA_4

Пропозициональные переменные $p, q, r, \ldots$ (быть может с нижними индексами).

Логические связки: J_ν, где $\nu \in \{1,\ -1,\ 0,\ \tau\}$, &, $\vee$, $\to$.

$V[p] \in \{1,\ -1,\ 0,\ \tau\}$; &, $\vee$, $\to$ — логические связки двузначной логики высказываний.

1°. $p, q, r, \ldots$ — квазиформулы;

2°. если φ — квазиформула, то $J_\nu\varphi$ — формула, где $\nu \in \{1,\ -1,\ 0,\ \tau\}$;

3°. если φ, ψ — формулы, то $(\varphi \,\&\, \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \to \psi)$ — формулы;

4°. других формул нет.

$$J_\nu p = \begin{cases} t, \text{если } v[p] = \nu \\ f, \text{если } v[p] \neq \nu, \end{cases}$$

Помеченные формулы: $t\varphi, f\varphi$, где φ — формула.

Контрарные пары: $t\varphi, f\varphi$ и $J_\nu p, J_\mu p$, где $\nu \neq \mu$.

Правила вывода JA_4

$$\alpha\colon \quad \frac{t(\varphi \,\&\, \psi)}{t\varphi, t\psi}, \qquad \frac{f(\varphi \vee \psi)}{f\varphi, f\psi}, \qquad \frac{f(\varphi \to \psi)}{t\varphi, f\psi};$$

$$\beta\colon \quad \frac{f(\varphi \,\&\, \psi)}{f\varphi \mid f\psi}, \qquad \frac{t(\varphi \vee \psi)}{t\varphi \mid t\psi}, \qquad \frac{t(\varphi \to \psi)}{f\varphi \mid t\psi};$$

$$\xi\colon \quad \frac{tJ_\nu p}{J_\nu p}, \text{ где } \nu \in \{1,\ -1,\ 0,\ \tau\};$$

$$\lambda:\quad \frac{fJ_1p}{J_{-1}p \mid J_0p \mid J_\tau p},\ \frac{fJ_\tau p}{J_1p \mid J_{-1}p \mid J_0p},$$
$$\frac{fJ_{-1}p}{J_1p \mid J_0p \mid J_\tau p},\ \frac{fJ_0p}{J_1p \mid J_{-1}p \mid J_\tau p}.$$

Аналитической таблицей логики JA_4 будем называть ориентированное триадическое дерево, корнем которого является помеченная формула, а вершинами, следующими за корнем, являются формулы, порожденные применением α-, β-, ξ-, и λ-правил вывода.

Аналитическую таблицу будем называть замкнутой, если все ее ветви замкнуты, т. е. содержат контрарные пары.

Будем говорить, что фомула φ доказуема в JA_4, если а.т. $\Im_{f\varphi}$ с корнем $f\varphi$ является замкнутой.

Таким образом, $\vdash_{JA_4} \varphi \rightleftharpoons \Im_{f\varphi}$ — замкнутая а.т.

Для JA_4 имеют место теоремы о корректности и слабой полноте[7].

Множество формул $\Sigma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ будем называть противоречивым, если а.т. $\Im$ с началом

$$\left.\begin{array}{c} t\varphi_1 \\ \vdots \\ f\varphi_n \end{array}\right\}\Im$$

является замкнутой.

Пример: $\Sigma = \{(J_1p \to J_1q), J_1p \,\&\, J_{-1}q)\}$, покажем, что Σ — противоречивое множество формул.

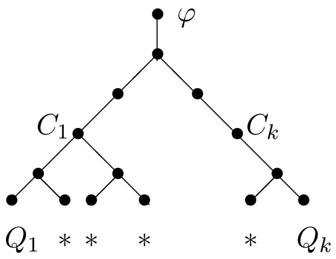
$$\begin{array}{c} \mathrm{t}(J_1p \to J_1q) \\ \mathrm{t}(J_1p \,\&\, J_{-1}q) \\ \mathrm{t}(J_1p) \\ \mathrm{t}(J_{-1}q) \\ \begin{array}{c|c} fJ_1p & tJ_1q \\ & J_1q \\ & J_{-1}q \end{array} \end{array}$$

tJ_1p, fJ_1p и $J_1q, J_{-1}q$ соответственно — контрарные пары.

[7] JA_4 используется для распознавания рациональности мнений в интеллектуальных системах для анализа социологических данных [9].

Установим теперь некоторую связь между $A^{(4)}_{4,1}$ и JA_4. Для этого используем следующую простую идею.

Рассмотрим формулу двузначной логики высказываний такую, что она не является противоречием. Построим аналитическую таблицу $\Im_\varphi$ с корнем φ:



Пусть $Q_1, \ldots, Q_k$ — все открытые ветви (замкнутые ветви отметим *), пусть далее, $C_1, \ldots, C_k$ — элементарные конъюнкции, соответствующие ветвям $Q_1, \ldots, Q_k$. Таким образом C_i — конъюнкция всех элементарных формул, принадлежащих $Set(Q_i)$, где $Set(Q_i)$ — множество всех формул ветви Q_i. Тогда имеет место следующее:

$\models (\varphi \equiv (C_1 \vee \cdots \vee C_k))$, т.е. $(C_1 \vee \ldots C_k)$ есть дизъюнктивная нормальная формула (д.н.ф.)φ. Следовательно, в силу теоремы о слабой полноте

$\vdash (\varphi \equiv (C_1 \vee \cdots \vee C_k))$.

Воспользуемся этой идеей для помеченной формулы $J_1\varphi$ логики $A^{(4)}_{4,1}$. Пусть $\Im_{J_1\varphi}$ — а.т. с корнем $J_1\varphi$ логики $A^{(4)}_{4,1}$ и пусть $\exists v(v[\varphi] = 1)$.

Рассмотрим множество всех открытых ветвей $Q_1, \ldots, Q_k$ а.т. $\Im_{J_1\varphi}$. Пусть $C_1, \ldots, C_k$ — конъюнкции, образованные элементарными формулами вида J_μp, где $\mu \in \{1, -1, 0, \tau\}$. Тогда имеет место следующая

ЛЕММА 8. *$\models (J_1\varphi \leftrightarrow (C_1 \vee \cdots \vee C_k))$, где $(p \leftrightarrow q) \rightleftharpoons ((p \to q) \,\&\, (q \to p))$, а «$\to$» — импликация двузначной логики.*

Таким образом, для $\forall v(v[(J_1\varphi \leftrightarrow (C_1 \vee \cdots \vee C_k))] = t)$.

Формула $(C_1 \vee \cdots \vee C_k)$ является формулой JA_4[8]. Введем обозначение $\pi J_1\varphi = (C_1 \vee \cdots \vee C_k)$, $\pi J_1\varphi$ — перевод помеченной формулы $J_1\varphi$ в JA_4.

[8]Формулы логик $A^{(4)}_{4,i}$ являются J-определимыми в смысле [11].

Рассмотрим формулу

$\varphi = ((\vee_2^{(4)}(p, \sim (p \supset p))) \supset (\vee_2^{(4)}(\sim p, \sim (p \supset p))))$ (см. также Таблицу A). Можно показать, что:

$\pi J_1 \varphi = (J_{-1} p \vee J_0 p \vee J_\tau p)$,

$\pi J_{-1} \varphi = J_1 p$,

$\pi J_1 \varphi \vee \pi J_{-1} \varphi$ есть $(J_1 p \vee J_{-1} p \vee J_0 p \vee J_\tau p)$, а $(J_1 p \vee J_{-1} p \vee J_0 p \vee J_\tau p) \leftrightarrow t$ (закон исключенного пятого для $A_{4,i}^{(4)}$).

Имеет место

ТЕОРЕМА 9. $\vdash_{A_{4,1}^{(4)}} \varphi$ *тогда и только тогда, когда* $\vdash_{JA_4} \pi J_1 \varphi$, *т.е. а.т.* $\Im_{f\pi_{J_1\varphi}}$ *является замкнутой.*

Доказательство. Использование леммы 8 и обратимости правил вывода для а.т. Q.E.D.

Аналогично случаю $A_{4,1}^{(4)}$ формулируются соответственно лемма 10 и лемма 11 со следующими изменениями. В лемме 10 рассматриваются две а.т. $\Im_{J_1\varphi}$ и $\Im_{J_{-1}\varphi}$ с корнями $J_1\varphi$ и $J_{-1}\varphi$ соответственно. Как для $A_{4,1}^{(4)}$, так и для $A_{4,2}^{(4)}$ ветвь θ а.т. называется истинной, если $\forall v \exists \psi((\psi \in Set(\theta)) \supset (v[\psi] = t))$, где ψ — помеченная формула. $\Im_i$ — истинная а.т., если в ней существует истинная ветвь θ (обозначение: $T_\nu(\theta)$ — истинная ветвь, а $T_\nu(\Im_i)$ — истинная а.т. $\Im_i$).

ЛЕММА 10. *Если* $T_v(\Im_i)$, *то* $T_v(\Im_{i+1})$, *где* $\Im_{i+1}$ — *непосредственное расширение а.т.* $\Im_i$, *полученное применением одного из правил вывода* $A_{4,2}^{(4)}$.

ЛЕММА 11. *Если* $v[J_1\varphi] = t$ *и* $v[J_{-1}\varphi] = t$, *то а.т.* $T_v(\Im_{J_1\varphi})$ *и* $T_\nu(\Im_{J_{-1}\varphi})$, *соответственно.*

Доказательство. Индукцией, шагом которой является утверждение леммы 10.

Очевидно, что случаи $\models_1 \varphi$ и $\models_2 \varphi$ сводятся к соответствующим рассуждениям для $A_{4,1}^{(4)}$. Поэтому рассмотрим случай, когда $\models_3 \varphi$ и $\Im_{J_1\varphi}$ и $\Im_{J_{-1}\varphi}$ незамкнутые а.т. Q.E.D.

ТЕОРЕМА 12 (О корректности $A_{4,2}^{(4)}$). *Если* $\vdash_{A_{4,2}^{(4)}} \varphi$, *то* $\models_3 \varphi$.

Напомним, что $\models_3 \varphi \rightleftharpoons \forall v(v[\varphi] \subseteq \{1, -1\})$, где $V_d^{(2)} = \{1, -1\}$.

Доказательство. Пусть неверно, что $\models_3 \varphi$, тогда $\exists v(v[\varphi] = \mu \,\&\, (\mu \in \{0,\tau\}))$; так как $\vdash_{A_{4,2}^{(4)}} \varphi$ по условию теоремы, то $\Im_{J_0\varphi}$, $\Im_\tau\varphi$ — замкнутые а.т. Из леммы 11 следует, что в а.т. $\Im_{J_\mu\varphi}$ существует открытая ветвь $\theta(\mu \in \{0,\tau\})$, что противоречит замкнутости а.т. $\Im_{J_0\varphi}$, $\Im_{J_\tau}\varphi$. Q.E.D.

Имеет место

ТЕОРЕМА 13 (О слабой полноте логики $A_{4,2}^{(4)}$). *Если* $\models_3 \varphi$, *то* $\vdash_{A_{4,2}^{(4)}}$.

$\models_3 \varphi \rightleftharpoons \forall v(v[\varphi] \in \{1,-1\})$, а $\vdash_{A_{4,2}^{(4)}} \varphi$ означает, что а.т. $\Im_{J_0\varphi}$ и $\Im_{J_\tau}\varphi$ замкнуты. Доказательство теоремы 13 аналогично доказательству теоремы о полноте логики аргументации A_4 [7] с использованием определений множеств Хинтикки для $A_{4,2}^{(4)}$.

Рассмотрим теперь связь логик $A_{4,2}^{(4)}$ и JA_4. Имеет место

УТВЕРЖДЕНИЕ 14. $\models_3 \varphi$ *тогда и только тогда, когда* $(\pi J_1\varphi \vee \pi J_{-1}\varphi) \leftrightarrow t$.

$\pi J_\nu\varphi$, где $\nu = \pm 1$, являются переводами помеченной формулы $J_\nu\varphi$ логики $A_{4,2}^{(4)}$ в язык логики JA_4. Эти переводы реализуются посредством а.т. $J_1\varphi$ и $J_{-1}\varphi$ соответственно, с использованием соответствующих д.н.ф.

Имеет место

ТЕОРЕМА 15. $\vdash_{A_{4,2}^{(4)}} \varphi$ *тогда и только тогда, когда* $\vdash_{JA_4} (\pi J_1\varphi \vee \pi J_{-1}\varphi)$, *т.е.* $\Im_{f(\pi_{J_1\varphi} \vee \pi_{J_{-1}\varphi})}$ *является замкнутой.*

Доказательство теоремы использует утверждение 14. Очевидно, что отрицание формулы $(\pi J_1\varphi \vee \pi J_{-1}\varphi)$ логики JA_4 является тождественно ложным.

Очевидно также следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 16. *Если* $\vdash_{A_{4,2}^{(4)}} \varphi$, *то* $\Im_{t\pi J_0\varphi}$, $\Im_{t\pi J_\tau\varphi}$ — *замкнутые аналитические таблицы.*

Пусть φ — формула $A_{4,2}^{(4)}$ такая, что $\models_1 \varphi$, т.е. $\forall v(v[\varphi] = 1)$, тогда $\models_2 (\sim \varphi)$, так как $\forall v(v[\varphi] = -1)$. В силу теоремы 13 получаем, что и $(\vdash_{A_{4,2}^{(4)}} \varphi)$ и $\vdash_{A_{4,2}^{(4)}} \sim \varphi$.

Однако формула $\&_2^{(4)}(\varphi, \sim \varphi)$ недоказуема, так как

$\forall v(v[\&_2^{(4)}(\varphi, \sim\varphi)] = 0)$, то в силу теоремы 12 $\&_2^{(4)}(\varphi, \sim\varphi)$ недоказуема в $A_{4,2}^{(4)}$. Следовательно, имеет место

УТВЕРЖДЕНИЕ 17. *Логика аргументации $A_{4,2}^{(4)}$ является паранепротиворечивой четырехзначной логикой*[9].

Легко видеть, что $((\&_2^{(4)}(\varphi, \sim\varphi)) \supset \varphi)$ доказуема тогда и только тогда, когда $\models_1 \varphi$, т.е. $\forall v(v[\psi] = 1)$, что следует из определения $(p \supset q)$. Если ψ есть $\vee_2^{(4)}(p, \sim p)$, то $v[\&_2^{(4)}(\varphi, \sim\varphi) \supset \vee_2^{(4)}(p, \sim p)] = 0 \supset \tau = \tau$, следовательно, эта формула недоказуема.

13 Замечание о ДСМ-логиках $A_{\infty,i}^{(4)}$

В [8] было показано, что ДСМ-метод автоматического порождения гипотез реализует синтез трех познавательных процедур — индукции, аналогии и абдукции. Взаимодействие этих процедур формализуется посредством ДСМ-рассуждений, которые являются конструктивной аргументацией в том смысле, что аргументируются формулы вида $J_{(\tau,2m)}(C \Rightarrow_1 A)$, аргументами же являются формулы вида $J(\tau, 2m+1)(C_i \Rightarrow_2 A_i)$, где $\nu \in \{1, -1, 0\}$, а результатом аргументации являются формулы вида $J_{\langle\mu,2m+2\rangle}(C \Rightarrow_1 A)$ такие, что $\mu \in \{1, -1, 0, \tau\}$, а $C_i \subset C$, $A_i \subseteq A$. В ДСМ-рассуждениях истинностные значения $\langle\nu, n\rangle$, $\nu \in \{1, -1, 0\}$ порождаются конструктивно посредством применения амплиативных правил вывода первого и второго рода — индукции и аналогии соответственно. Следовательно, теоретически ДСМ-логика является бесконечнозначной логикой аргументации с четырьмя типами истинностных значений $1, -1, 0, \tau$ (соответственно: фактическая истина, фактическая ложь, фактическое противоречие и неопределенность). Каждому типу истинного значения $\nu \in \{1, -1, 0, \tau\}$ соответствует тип правила правдоподобного вывода индукции и аналогии). Эти амплиативные правила вывода являются генераторами и гипотез и их оценок — истинностных значений $\overline{\nu} = \langle\nu, n\rangle, \nu \in \{1, -1, 0\}$, или множества возможных истинностных значений $(\tau, n) = \{\langle 1, n+1\rangle, \langle -1, n+1\rangle, \langle 0, n+1\rangle\} \cup (\tau, n+1)$, где τ представляет динамически уменьшаемую неопределенность. Следовательно, ДСМ-

[9] Обзор паранепротиворечивых логик содержится в [12].

логика является итеративной логикой, логикой «раскрытия» (возможного уменьшения) неопределенностей, конструктивной нечеткой логикой, ибо ее истинностные значения вида $\overline{\nu} = \langle \nu, n \rangle$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, содержат степень правдоподобия n (число применений правил правдоподобного вывода); и, наконец, как было сказано выше, ДСМ-логики являются логиками конструктивной аргументации. Так как ДСМ-логики являются бесконечнозначными логиками с конечным числом типов истинностных значений [1, 2] (их минимальное число равно 4), то введем для них обозначение $A^{(4)}_{\infty,i}$, где $i = 1, 2$. $A^{(4)}_{\infty,i}$ — обозначение для ДСМ-логик с четырьмя типами истинностных значений $\{1, -1, 0, \tau\}$ такими, что выделенными истинностными значениями являются 1 или 1 и -1, т.е. $i = 1, 2$. Истинностные значения ДСМ-логик информативны и конструктивно интерпретируемы, ибо посредством индукции порождаются гипотезы о причинно-следственных зависимостях как позитивных (вызывающих исследуемый эффект), так и негативных (запрещающих наличие эффекта). Когда $i = 2$, то $\overline{\nu} = \langle \pm 1, n \rangle$ в $A^{(4)}_{4,2}$ — равноправные выделенные истинностные значения, соответствующие симметричному ДСМ-методу автоматического порождения гипотез. В этом случае имеются два генератора гипотез — предикаты M^+_n и M^-_n.

Для несимметричного же ДСМ-метода, предложенного Д.В. Виноградовым, адекватна логика $A^{(4)}_{4,1}$, а множество выделенных истинностных значений $V^{(1)}_d = \{1\}$.

Следует обратить внимание на тот факт, что ДСМ-метод автоматического порождения гипотез формулируется с использованием формальных языков двух уровней — внутреннего и внешнего языков представления знаний [8]. В [3] была развита важная для многозначных логик идея, используемая при анализе логических и семантических парадоксов. Логические связки трехзначной логики Д.А. Бочвара $\mathbf{B}_3$ сформулированы в соответствии с принципом отделимости. Внутренние связки $\sim, \widehat{\cap}, \supset$ (отрицание, конъюнкция и импликация соответственно) определены так, что если $v[p] = \tau$, где τ — интерпретируется как «бессмыслица», а пропозициональная переменная p входит в формулу φ, построенную посредством $\sim, \widehat{\cap}, \supset$, то имеет место $v[\varphi] = \tau$. Внешние связки J_t, J_f, J_τ, &, $\vee$, $\rightarrow$ областью определения имеют $\{t, f, \tau\}$ — логическую истину, логическую ложь и бессмыслицу соответственно; областью значений этих связок является множество $\{t, f\}$. Во внутреннем языке $\mathbf{B}_3$ формулы построены из переменных и логических связок $\sim$, $\widehat{\cap}$, $\supset$; во внешнем языке формулы построены из внутренних и внешних связок, но каждая переменная находится в сфере действия внешней связки (такие формулы называются внешними). Примерами базисов для логики $\mathbf{B}_3$ являются $\sim$, $\widehat{\cap}$, J_t и $\sim$, $\widehat{\cap}, \rightarrow$, где J_t — одна из J-связок: $J_\nu p = \begin{cases} t, \text{если } v[p] = \nu \\ f, \text{если } v[p] \neq \nu, \end{cases} \quad \nu \in \{t, f, \tau\}$.

Согласно идее Д.А. Бочвара, во внутреннем языке $\mathbf{B}_3$ выражаются факты, но доказательства утверждений о них в нем невыразимы и не существуют тавтологии; во внешнем языке логики $\mathbf{B}_3$ существуют тавтологии и выразимы доказательства как об утверждениях о фактах, представленных во внутреннем языке, так и об утверждениях об утверждениях внешнего языка. Следовательно, тавтологии во внутреннем языке не определимы, но они определимы лишь во внешнем языке.

Логики $A_{4,i}^{(4)}$ (и вообще рассмотренные в данной статье логики аргументации) формулируются во внутреннем языке с логическими связками $\sim$, $\&_n^{(4)}$, $\vee_n^{(4)}$, $\supset$, без использования внешних связок — J_ν-операторов. Однако в отличие от $\mathbf{B}_3$ в $A_{4,i}^{(4)}$ существуют тавтологии (точнее, формулы, областью значений которых является $V_d^{(i)}$ — множество выделенных истинностных значений). Теория доказательств $A_{4,i}^{(4)}$ и других логик аргументации (стандартных и нестандартных), рассмотренных в данной статье, построенная посредством метода аналитических таблиц, использует для определения помеченных формул J-операторы J_ν, $\nu \in \{1, -1, 0, \tau\}$.

Аналогичная конструкция может быть реализована и для бесконечнозначных ДСМ-логик $A_{\infty,i}^{(4)}$, $i = 1, 2$ с сигнатурой $\sim$, $\{\&_n^{(4)}\}_{n \in N}$, $\{\vee_n^{(4)}\}_{n \in N}$, $\supset$ и со счетным множеством J-операторов: $\{J_{\langle \nu, n \rangle}\}_{n \in N}, \nu \in \{\pm 1, 0\}$, и операторами $J_{(\tau, n)}$; все эти операторы используются для определения помеченных формул логик $A_{\infty,i}^{(4)}$. Логики $A_{\infty,i}^{(4)}$ являются внутренними логиками в том смысле, что в них представимо знание о фактах и гипотезах (при

$n > 0$ в $\overline{\nu} = \langle \nu, n \rangle$), а также возможно представление зависимостей между ними, выраженных посредством формул с главной связкой импликации ($\supset$).

В [11] рассмотрены логические языки бесконечнозначных ДСМ-логик, которые являются J-определимыми, т.е. J-операторы могут быть применены к атомарным формулам. Этот вариант ДСМ-логик адекватен для формализации как процедур порождения гипотез, так и для дедуктивной имитации правдоподобных рассуждений типа ДСМ, т.е. для ДСМ-метода автоматического порождения гипотез [1, 2].

Отметим также, что простым примером J-определимой логики является JA_4, рассмотренная в данной статье.

Автор выражает благодарность Д.В. Виноградову и И.Е. Явчуновской-Беловой за полезные замечания.

Литература

[1] *Аншаков О.М., Скворцов Д.П., Финн В.К.* Логические средства экспертных систем типа ДСМ // Семиотика и информатика. 1986. Вып. 28. С. 65–101.

[2] *Аншаков О.М., Скворцов Д.П., Финн В.К.* О дедуктивной имитации некоторых вариантов ДСМ-метода автоматического порождения гипотез // Семиотика и информатика. 1993. Вып. 33. С. 164–233.

[3] *Бочвар Д.А.* Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов расширенного функционального исчисления // Математический сборник. 1938. Т. 4. № 2. С. 287–308.

[4] *Вагин В.Н., Головина Е.Ю., Загорянская А.А., Фомина М.В.* Достоверный и правдоподобный вывод в интеллектуальных системах М.: Физматлит, 2004.

[5] *Поппер К.Р.* Объективное знание. М.: УРСС, 2002.

[6] *Финн В.К.* Аксиоматизация некоторых трехзначных исчислений высказываний и их алгебр // Философия и логика. М.: Наука, 1974. С. 398–438.

[7] *Финн В.К.* Об одном варианте логики аргументации // НТИ. Сер. 2. 1996. № 5–6. С. 3–19.

[8] *Финн В.К.* Синтез познавательных процедур и проблема индукции // НТИ. Сер. 2. 1999. № 1–2. С. 8–45.

[9] *Финн В.К., Михеенкова М.А.* О логических средствах концептуализации мнений // НТИ. Сер. 2. 2002. № 6. С. 4–22.

[10] *Финн В.К.* Об интеллектуальном анализе данных // Новости искусственного интеллекта. 2004. № 3. С. 3–18.

[11] *Anshakov O.M., Finn V.K., Skvortsov D.P.* On axiomatization of many-valued logics associated with formalization of plausible reasoning // Studia Logica. 1989. XLVIII. № 4. P. 423–447. Имеется русская версия: *Аншаков О.М., Скворцов Д.П., Финн В.К.* Об аксиоматизируемости многозначных логик, связанных с формализацией правдоподобных рассуждений // Логические исследования. М.: Наука, 1993. С. 222–247.

[12] *Arruda A.I.* A survey of paraconsistent logic // Mathematical Logic in Latin America. 1980. North-Holland Publ. Co. P. 1–40.

[13] *van Benthem O.F, van Elmeren F.H., Grootendrost R. and Veltman F. (Eds.)* // Logic and Argumentation. Amsterdam. North-Holland, 1996.
[14] *Prakken H., Vreeswijk G.* Logic for defeasible argumentation // Handbook of philosophical Logic. Vol. 4. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, 2001.
[15] *Smullyan R.M.* First-Order Logic // Springer-Verlag. New York Inc., 1968.
[16] *Willard C.A.* Theory of Argumentation. Tuscaloosa and London: The University of Alabama Press, 1989.