# Крах алгоритмической проблематики теории соответствия?[1]

А.В. Чагров, Л.А. Чагрова

**abstract.** Three key problems of the Correspondence Theory are considered: given a modal propositional formula and a first-order formula, to recognize, whether they are equivalent in Kripke frames (the correspondence problem); given a modal propositional formula, to recognize, whether there is a first-order formula which is equivalent to it in Kripke frames (the problem of first-order definability of modal propositional formulas), given a first-order formula, to recognize, whether there is a modal propositional formula which is equivalent to it in Kripke frames (the problem of modal definability of first-order formulas). For all of these problems concise proofs of algorithmic undecidability have been given.

## 1 Постановка проблем

Нижеследующий текст является изложением материала устного выступления авторов на конференции «Успехи модальной логики», которая в очередной, точнее — шестой, раз проводилась в 2006 году. Волею обстоятельств сам доклад был сделан не нами, а нашим близким другом Михаилом Викторовичем Захарьящевым. Таким образом, в природе имеются три текста материалов этого доклада: предлагаемый ниже; устный[2] текст выступления М.В. Захарьящева на рабочем (английском) языке конференции, которое лишь основывалось на варианте предлагаемого здесь текста, но несомненно не совпадало с ним по многим причинам; текст [10], опубликованный в материалах упомянутой конференции, имеющий непустое, конечно, пересечение с предыдущими двумя, но не содержащий по причине жестких редакторских требований на объем многих моментов, фольклорных

[1]Работы поддержана РФФИ. Грант № 06-06-80380-а.

[2]Мы предполагаем, что он не материализован ни в каком более-менее полном виде — слайды не в счет.

утверждений и доказательств. Кроме того, мы учитывали и состав участников конференции, так что все три текста между собой существенно различны, хотя во всех них рассматривается алгоритмическая проблематика теории соответствия, теории, в которой сравниваются возможности описания свойств реляционных структур средствами разных языков. Имеется в виду, что вполне удовлетвлорительный для большинства (хотя и не всех!) практических потребностей такого описания язык первого порядка не является удовлетворительным именно из-за своей большой выразительности, делающей даже очень простые вопросы «риторическими», точнее — оставляющей их без эффективного ответа в силу теоремы Чёрча, которую можно понимать как отсутствие эффективного ответа на вопрос «Верно ли, что данная формула описывает тривиальное свойство (не выделяет никаких моделей, истинна во всех)?» Модальные пропозициональные формулы в этом отношении более просты. Многие проблемы, с ними связанные, алгоритмически разрешимы; такова, к примеру, проблема истинности формулы во всех моделях.

Конечно, трудно себе представить, как бы среагировал Готфрид Вильгельм Лейбниц с его идеей использования возможных миров для истолкования модальностей на современное состояние исследований по модальной логике, не говоря уж об Аристотеле, чья не очень точно сформулированная модальная силлогистика явилась отправной точкой многовекового изучения модальностей, но в последние два-три десятилетия важнейшей составной частью этого направления логики стало изучение возможностей модальных и близких к ним языков для описания свойств реляционных структур.

Мы выражаем надежду, что через какое-то время исследователи обратятся к модальным истокам и вспомнят, что семантика возможных миров (реляционная семантика, окрестностная семантика и их варианты) для модальных операторов была предложена в качестве рабочего инструмента, позволяющего перевести некоторые содержательные обсуждения модальных операторов — их свойств, взаимозависимостей и т.д. — на более точный язык. Этот «более точный» язык не претендует и не может претендовать на абсолютную адекватность предмету обсуждения, но во многих случаях позволяет обойтись без длинных малопродуктивных дискуссий. Однако здесь мы будем следовать нынешнему основному направлению.

С технической стороны язык пропозициональной модальной логики при описании реляционных структур предоставляет довольно существенные преимущества по сравнению, скажем, с классическим языком первого порядка. Он может быть эффективнее в двух, по крайней мере, аспектах. Модальные пропозициональные формулы могут быть более выразительными, чем формулы первого порядка, — то есть они имеют определенные второпорядковые черты (нюансы). С другой стороны, модальные пропозициональные формулы более доступны алгоритмическому изучению (освоению): для них многие проблемы разрешимы, причем либо соответствующие алгоритмы имеют вполне допустимую сложность, либо для снижения сложности этих алгоритмов более-менее ясны необходимые ограничения.

Здесь представлены хорошо известные хрестоматийные примеры описаний и отсутствия описаний свойств реляционных структур:

| **формула первого порядка** | **модальная формула** |
|---|---|
| $\forall x\, xRx$ | $\Box p \to p$ |
| $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (xRy \;\&\; yRz \Rightarrow xRz)$ | $\Box p \to \Box\Box p$ |
| $\forall x\, \exists y\, yRx$ | нет |
| $\forall x\, \forall y\, xRy$ | нет |
| нет | $\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$ |
| нет | $\Box(\Box p \to p) \to \Box p.$ |

Эти и другие примеры можно с подробным обсуждением найти в [7, 8, 12]. Попутно отметим, что упомянутый в названии данной статьи раздел современной модальной логики[3] является просто дословным переводом названия обзорной статьи [8].

Поскольку переход от первопорядковых (или других мощных классических) описаний свойств реляционных структур к мо-

[3]Среди исследователей довольно распространено мнение, что современная модальная логика «покоится на трех китах», вот их английские «имена»: *completeness theory*, *correspondence theory*, *duality theory*.

дальным описаниям преследует повышение эффективности, разумно его (переход) ставить (или хотя бы пытаться ставить) в алгоритмические рамки.

К сожалению, как было обнаружено в конце 80-х годов (XX-го, разумеется, века), алгоритмическая часть теории соответствия в основном отрицательна. То есть практически все алгоритмические проблемы теории соответствия оказываются неразрешимыми. Это является определенной платой за стремление к выразительности используемых языков.

Однако среди исследователей в связи с указанным «отрицательным» обстоятельством распространены различные мифы. Например, считается, что доказательство неразрешимости первопорядковой определимости модальных формул либо очень трудно технически, либо малопонятно. Кроме того, при изложении алгоритмической части теории соответствия[4] практически всегда[5] ограничиваются неразрешимостью модальной определимости формул первого порядка, считая, по-видимому, что модальная определимость формул первого порядка имеет больше отношение к модальной логике, чем, скажем, первопорядковая определимость модальных формул. Здесь мы ставим целью опровержение некоторых из таких мифов.

Для начала скажем, что в упомянутом «мифотворчестве» во многом «виноваты» докладчики, особенно Л.А. Чагрова. А именно результаты о неразрешимости ключевых алгоритмических проблем в теории соответствия были получены в ее диссертации [6] 1989 года, текст которой по российской «традиции» практически недоступен, а их доказательства доступны лишь в виде депонированных в ВИНИТИ статей на русском языке, которые не находятся в свободном обороте. Кроме того, в указанной диссертации рассматривалась технически более сложная теория соответствия — ее вариант для интуиционистских пропозициональных формул. Не вдаваясь в подробности, скажем, что там приводится фактически одно длинное (более 100 с лишним страниц плотного текста!) доказательство,

[4]Нам неизвестны монографические изложения; речь идет о лекционных курсах, о программе которых мы можем судить по выложенной в интернете информации и ее обсуждению в интернете же.

[5]Собственно, мы иного не встречали.

которое при небольших вариациях дает следующие результаты:

1) проблема первопорядковой определимости интуиционистских формул неразрешима;

2) проблема первопорядковой определимости интуиционистских формул на счетных шкалах неразрешима;

3) множество интуиционистских формул, которые не являются первопорядково определимыми, но первопорядково определимы на счетных шкалах, неразрешимо;

4) проблема интуиционистской пропозициональной определимости первопорядковых формул неразрешима;

5) проблема соответствия интуиционистских пропозициональных формул и формул первого порядка неразрешима.

Конечно, параллельно доказательствам этих фактов легко получить и их аналоги для модального случая, хотя модальный случай и предоставляет некоторые технические преимущества по сравнению с интуиционистским.

Схема доказательств из диссертации Чагровой принципиально громоздка. В частности, там строится неразрешимое суперинтуиционистское исчисление с первопорядково определимой аксиоматикой. Представление об этой схеме можно получить из статьи авторов [9], где она (схема) применяется для доказательства неразрешимости первопорядковой определимости модальных формул на классе конечных шкал. Стоит заметить, что кроме этого применения неизбежным представляется и использование этой схемы для третьего факта (пункта 1) о неразрешимости из перечисленных выше пяти.

Несколько упрощенное доказательство неразрешимости первопорядковой определимости интуиционистских формул было опубликовано Л.А. Чагровой в Журнале символической логики в 1991 году, то есть в [13]. Использованная здесь схема доказательства была несколько ранее разработана для модального случая в [3, 4].

Но и в этом случае не было дано прямого (и более простого!) доказательства неразрешимости первопорядковой определимости для модального случая. Добавим, что один из анонимных рецензентов счел приведенный в статье Л.А. Чагровой текст доказательства «non-friendly».

Обсуждая в последнее время с нашими коллегами алгоритмическую проблематику теории соответствия, мы поняли, что необходимость предоставления прозрачных доказательств назрела. Кроме того, надежда на то, что вслед за пионерскими доказательствами Л.А. Чагровой последуют более простые (как это часто бывает в математике), не оправдывается; создается даже впечатление о неизбежной громоздкости доказательств даже тех фактов, которые на самом деле получаются «почти бесплатно».

Наведением порядка в этой области мы и займемся.

Сначала дадим несколько необходимых определений. В соответствии с нашими пропедевтическими целями мы не будем рассматривать проблематику во всей возможной общности. Например, мы не будем использовать локальный вариант определимости, не будем считать класс рассматриваемых шкал параметром (то есть для нас определимость будет определимостью над классом **всех** шкал), не будем всерьез рассматривать иные пропозициональные языки, кроме одномодального, и т.д.

Итак.

Структура вида $F = \langle W, R\rangle$ ($F$ — от английского термина *Frame* с установившимся сейчас переводом *шкала*) может пониматься как:

- **mf** модельная структура (терминология С. Крипке [15], см. перевод этой статьи в [2]) для модальных пропозициональных формул;

- **cm** модель для формул первого порядка в смысле классической теории моделей, сигнатура формул состоит из бинарного отношения достижимости $R$ и равенства;

- модель для формул второго порядка в смысле классической теории моделей, сигнатура формул состоит из бинарного отношения достижимости $R$, равенства и неинтерпретированных одноместных предикатов.

Конечно, здесь можно добавить и другие пункты. Например:

- модельная структура для временны́х пропозициональных формул: $R$ — для разговоров о «будущем», $R^{-1}$ — о «прошлом».

Нас будут интересовать только пункты (**mf**) (**m**odal **f**rame) и (**cm**) (**c**lassical **m**odel), поскольку в кратком изложении невозможно охватить всю сопутствующую проблематику, а кроме того, значительная часть используемого нами технического аппарата без особого труда может быть приспособлена и в других ситуациях. Ограничимся лишь самыми общими замечаниями об описании классов структур (реляционных структур, более точно) формулами различных языков.

Пусть $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ — два языка, для которых структуры вида $F = \langle W, R \rangle$ являются модельными или просто являются моделями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Формулы $\varphi$ из языка $\mathcal{L}_1$ и $\Phi$ из языка $\mathcal{L}_2$ называем эквивалентными (семантически эквивалентными), если

$$F \models \varphi \iff F \models \Phi \text{ (для любой } F\text{)}.$$

Собственно, эквивалентность в этом определении и есть то самое *соответствие*, теория которого нас здесь интересует. Первая естественная проблема:

**Алгоритмическая проблема соответствия для языков $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$.** *Существует ли алгоритм, который по произвольным формулам $\varphi$ из языка $\mathcal{L}_1$ и $\Phi$ из языка $\mathcal{L}_2$ выяснял бы, являются ли они эквивалентными.*

Эта проблема осмысленна даже в том случае, когда $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$, то есть когда рассматривается один язык. Чуть позже разовьем эту тему, а сейчас дадим определение, которое оказывается нетривиальным только для случая различия языков $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Формула $\varphi$ из языка $\mathcal{L}_1$ называется $\mathcal{L}_2$-определимой, если существует формула $\Phi$ из языка $\mathcal{L}_2$, которая эквивалентна $\varphi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Формула $\Phi$ из языка $\mathcal{L}_2$ называется $\mathcal{L}_1$-определимой, если существует формула $\varphi$ из языка $\mathcal{L}_1$, которая эквивалентна $\Phi$.

Конечно, поскольку языки $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ произвольны, то эти два определения ничем не отличаются (поэтому о них можно было говорить в единственном числе). Однако отличия появятся, если мы будем иметь в виду конкретные языки $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$.

Далее полагаем:

- $\mathcal{L}_1 = \mathcal{MPL}$ — модальный пропозициональный язык;
- $\mathcal{L}_2 = \mathcal{FOL}$ — первопорядковый язык (классически понимаемый).

Формулы языка $\mathcal{MPL}$ будем для краткости называть модальными, а языка $\mathcal{FOL}$ — первопорядковыми.

В этом случае приведенные выше определения обретают следующий вид.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Модальная формула $\varphi$ называется первопорядково определимой, если существует первопорядковая формула, которая эквивалентна $\varphi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Первопорядковая формула $\Phi$ называется модально определимой, если существует модальная формула, которая эквивалентна $\Phi$.

Конкретизацией интересующих нас далее алгоритмических проблем являются следующие пять проблем.

**Алгоритмическая проблема первопорядковой определимости.** *Существует ли алгоритм, который по произвольной модальной формуле $\varphi$ выяснял бы, является ли $\varphi$ первопорядково определимой.*

**Алгоритмическая проблема модальной определимости.** *Существует ли алгоритм, который по произвольной первопорядковой формуле $\Phi$ выяснял бы, является ли $\Phi$ модально определимой.*

Кроме того, уместно сформулировать и следующие алгоритмические проблемы соответствия.

**Алгоритмическая проблема соответствия МОДАЛЬНЫХ формул.** *Существует ли алгоритм, который по произвольным модальным формулам выяснял бы, являются ли они эквивалентными.*

**Алгоритмическая проблема соответствия МОДАЛЬНЫХ и ПЕРВОПОРЯДКОВЫХ формул.** *Существует ли алгоритм, который по произвольным модальной формуле $\varphi$ и* *первопорядковой формуле* Φ *выяснял бы, являются ли они эквивалентными.*

**Алгоритмическая проблема соответствия ПЕРВОПОРЯДКОВЫХ формул.** *Существует ли алгоритм, который по произвольным первопорядковым формулам выяснял бы, являются ли они эквивалентными.*

Конечно, две из проблем — алгоритмическая проблема соответствия МОДАЛЬНЫХ формул и алгоритмическая проблема соответствия ПЕРВОПОРЯДКОВЫХ формул — не имеют прямого отношения к теории соответствия. Мы их приводим потому, что они укладываются в контекст обсуждения и много места не потребуют.

Теперь мы готовы к тому, чтобы приступить к изложению нашего основного материала. Мы по существу будем демонстрировать, что все указанные проблемы решаются отрицательно. Однако нас будут интересовать не только (и даже не столько!) сами отрицательные ответы, сколько доступность получения этих ответов. Более того, мы намеренно не будем акцентировать внимание на некоторых фактах неразрешимости, которые можно найти в [10].

Теперь будем рассматривать сформулированные проблемы в порядке усложнения их решений; этот порядок случайно оказался обратным порядку предыдущих формулировок. Формулировки проблем соответственно будут повторены. Эпитет «алгоритмическая» будет часто опускаться. Будем для легкости чтения делать и другие сокращения, легко восстановимые по контексту, например: формулировка теоремы *проблема модальной определимости неразрешима* восстанавливается до *проблема модальной определимости первопорядковых формул алгоритмически неразрешима* или, совсем уже точно, — до *алгоритмическая проблема модальной определимости первопорядковых формул имеет отрицательное решение, то есть требуемый алгоритм не существует.*

## 2 Алгоритмическая проблема соответствия первопорядковых формул

Проблема: *Существует ли алгоритм, который по произвольным первопорядковым формулам $\Phi$ и $\Psi$ выяснял бы, являются ли они эквивалентными.*

Неразрешимость этой проблемы — это по существу теорема Чёрча о неразрешимости логики первого порядка: положим $\Psi = \top$, то есть $\Psi$ — константа «истина» (или любая формула, ее «изображающая», если язык не содержит этой констаты, например, формула $p \to p$). Мы опускаем стандартные ссылки на источники, где теорема Чёрча доказывается для случая сигнатуры из одного бинарного отношения (двуместной предикатной буквы).

ТЕОРЕМА 6 (Теорема Чёрча). *Проблема соответствия первопорядковых формул неразрешима.*

## 3 Алгоритмическая проблема соответствия модальных и первопорядковых формул

Проблема: *существует ли алгоритм, который по произвольным модальной формуле $\varphi$ и первопорядковой формуле $\Phi$ выяснял бы, являются ли они эквивалентными.*

Доказательство неразрешимости в этом случае мало чем отличается от предыдущего. Положим, что $\varphi = \top$, и получаем из теоремы Чёрча требуемое. Правда, теперь $\top$ — модальная формула, но это не меняет дела, поскольку модальная $\top$ и первопорядковая $\top$ истинны в одних и тех же (более точно, во всех!) шкалах.

ТЕОРЕМА 7 (Теорема Чёрча). *Проблема соответствия модальных и первопорядковых формул неразрешима.*

## 4 Алгоритмическая проблема соответствия модальных формул

Проблема: *Существует ли алгоритм, который по произвольным модальным формулам $\varphi_1$ и $\varphi_2$ выяснял бы, являются ли они эквивалентными.*

В этом случае, конечно, теорема Чёрча (точнее — ее доказательство) нам помочь не может, поскольку относится не к модальному языку. Однако и для модального пропозиционального языка есть хорошо известные результаты, которые способны на такую помощь. Одним из них является построение неразрешимого модального исчисления в работе [14]. Там была предложена формула (конъюнкция аксиом, дополнительных к аксиоматике логики $\mathbf{K}$) $\alpha$, такая что проблема “$\mathbf{K} \oplus \alpha \vdash \beta$?” неразрешима, причем в доказательстве в качестве формул $\beta$ брались формулы из некоторого разрешимого множества $\{\beta_i : i \in \omega\}$ и в том случае, когда $\mathbf{K} \oplus \alpha \nvdash \beta_i$, этот факт устанавливался с помощью подходящей шкалы. Таким образом, мы имеем

$$\mathbf{K} \oplus \alpha \vdash \beta_i$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{формулы } \alpha \text{ и } \alpha \wedge \beta_i \text{ эквивалентны.}$$

Значит, справедлива

ТЕОРЕМА 8 (Изард, 1977). *Проблема соответствия модальных формул неразрешима.*

## 5 Алгоритмическая проблема модальной определимости

Проблема: *существует ли алгоритм, который по произвольной первопорядковой формуле $\Phi$ выяснял бы, является ли $\Phi$ модально определимой.*

Для этой проблемы нам понадобится вариант теоремы Чёрча. Более точно, мы будем использовать в качестве исходной неразрешимой проблемы неразрешимость теории строгого частичного порядка “без первого элемента”.

ЛЕММА 9. *Теория первого порядка с аксиомами*

- $TRANS = \forall x, y, z\, (xRy \,\&\, yRz \Rightarrow xRz)$,
- $IRR = \forall x \neg xRx$,
- $\forall x \exists y\, yRx$

*неразрешима.*

Доказательство этой леммы является стандартной учебной задачей на доказательство теоремы Чёрча.

Рассмотрим теперь формулу

$$TRANS \mathbin{\&} IRR \mathbin{\&} \forall x \exists y\, yRx \mathbin{\&} \neg\Theta,$$

где $\Theta$ — произвольная замкнутая формула первого порядка.

Несложно понять, что справедлива следующая эквивалентность:

$$TRANS \mathbin{\&} IRR \mathbin{\&} \forall x \exists y\, yRx \vdash \Theta$$

$$\Updownarrow$$

формула $TRANS \mathbin{\&} IRR \mathbin{\&} \forall x \exists y\, yRx \mathbin{\&} \neg\Theta$ модально определима.

Направление $\Downarrow$ вполне очевидно: если

$$TRANS \mathbin{\&} IRR \mathbin{\&} \forall x \exists y\, yRx \vdash \Theta,$$

то формула $TRANS \mathbin{\&} IRR \mathbin{\&} \forall x \exists y\, yRx \mathbin{\&} \neg\Theta$ эквивалентна модальной формуле $\bot$, то есть модально определима ею.

Обоснуем направление $\Uparrow$ рассуждением «от противного».

Предположим, что

$$TRANS \mathbin{\&} IRR \mathbin{\&} \forall x \exists y\, yRx \nvdash \Theta,$$

но формула $TRANS \mathbin{\&} IRR \mathbin{\&} \forall x \exists y\, yRx \mathbin{\&} \neg\Theta$ определима некоторой модальной формулой $\varphi$.

Из того, что $TRANS \mathbin{\&} IRR \mathbin{\&} \forall x \exists y\, yRx \nvdash \Theta$, по теореме Геделя о полноте следует, что существует модель (она же шкала) $F$, такая, что

$$F \models TRANS \mathbin{\&} IRR \mathbin{\&} \forall x \exists y\, yRx \mathbin{\&} \neg\Theta.$$

Поскольку формулы $\varphi$ и $TRANS \mathbin{\&} IRR \mathbin{\&} \forall x \exists y\, yRx \mathbin{\&} \neg\Theta$ эквивалентны, мы получаем тогда

$$F \models \varphi.$$

Теперь воспользуемся «модальной спецификой» формулы $\varphi$, более точно — тем, что истинность модальных формул сохраняется при взятии порожденных подшкал. Этот «модальный» факт совершенно тривиален: для истинности (да и неистинности) модальной формулы в точке шкалы важны лишь те точки, которые из данной точки достижимы за какое-нибудь число шагов[6], а потому если мы с каждой точкой в подшкалу заносим и все достижимые из нее (это и есть *порождение*), то формула в подшкале окажется вновь истинной, если была таковой в точках (точке) исходной шкалы.

Возьмем в качестве шкалы $F'$ произвольную подшкалу шкалы $F$, порожденную какой-либо ее точкой $w$, то есть множеством точек $F'$ будет

$$W' = \{w\} \cup \{w' : wR^n w' \text{ для некоторого } n \in \omega\},$$

где $xR^ny$, как обычно, означает, что в шкале есть точки $z_1, \ldots, z_{n-1}$ такие, что $xRz_1Rz_2R\ldots Rz_{n-1}Ry$, а отношение достижимости $R'$ шкалы $F'$ индуцировано отношением достижимости $R$ шкалы $F$:

$$R' = R \cap (W' \times W'),$$

то есть для точек множества $W'$ соотношение $xR'y$ выполняется в точности тогда, когда $xRy$.

Поскольку $\varphi$ — модальная формула, мы имеем $F' \models \varphi$, то есть по ее выбору, в частности,

$$F' \models TRANS \mathbin{\&} IRR \mathbin{\&} \forall x \exists y\, yRx.$$

В силу того, что $F \models TRANS \mathbin{\&} IRR$, точка $w$ не достижима из себя ни за какое число шагов, а потому она в шкале $F'$ не имеет предшественников, то есть нет ни одной такой точки $u$, что $uR'w$, а это противоречит тому, что $F' \models \forall x \exists y\, yRx$.

Полученное противоречие показывает, что допущенное нами верным быть не может, а тем самым справедливость доказываемого нами утверждения $\Uparrow$ установлена.

В результате мы свели неразрешимую по лемме проблему к проблеме модальной определимости, то есть доказана

[6]Количество этих шагов можно даже ограничить модальной глубиной испытуемой формулы, но тогда нужный нам факт останется справедливым, но его обоснование уже потребует некоторых, хоть и несложных, вспомогательных рассуждений.

ТЕОРЕМА 10. *Проблема модальной определимости неразрешима.*

В приведенном доказательстве «модальная специфика» использована в двух обстоятельствах: одна конкретная модальная формула, а именно $\perp$, и сохранение истинности модальных формул при взятии порожденных подшкал. Поэтому попутно с доказательством интересующего нас утверждения были получены доказательства и многого другого, в частности: доказательства неразрешимости свойств формул первого порядка «сохранять свою истинность при взятии порожденных подшкал», «быть определимой модальной формулой $\perp$». Сформулируем эти и другие утверждения, поскольку они оказались доказанными, в виде теорем.

ТЕОРЕМА 11. *Проблема определимости первопорядковых формул модальной формулой $\perp$ неразрешима.*

Формула $\perp$ константна, а потому в эквивалентности $\Updownarrow$ обоснование направления $\Downarrow$ можно было бы закончить словами *эквивалентна константной модальной формуле* $\perp$ вместо *эквивалентна модальной формуле* $\perp$, а в обосновании направления $\Uparrow$ от противного заметить, что раз формула не является модально определимой, то она не является определимой константными модальными формулами. Тем самым получена

ТЕОРЕМА 12. *Проблема определимости первопорядковых формул константными модальными формулами неразрешима.*

Заметив, что мы отметили лишь одно свойство модальной формулы $\perp$, а их много, получаем следующую схему теорем.

МУЛЬТИТЕОРЕМА 13. Проблема определимости модальными формулами, обладающими свойством ..., неразрешима.

Здесь вместо многоточия можно поставить, например, «быть позитивной формулой», «быть салквистовой формулой», «иметь длину 1». Конечно, при получении утверждения для конкретного свойства формулировка должна быть «причесана». Так, вместо *Проблема определимости модальными формулами, обладающими свойством «быть позитивной формулой», неразрешима* следует писать *Проблема определимости позитивными модальными формулами неразрешима.*

Конечно, свойствами формулы $\bot$ исчерпываются, мягко говоря, далеко не все интересные свойства модальных формул. Однако приведенное доказательство легко модифицируется, хотя вдаваться здесь в подробности в наши планы не входит. Некоторые факты читатель может найти в [10].

Теперь обратимся к операции взятия порожденной подшкалы. Как уже отмечено, нами доказана

ТЕОРЕМА 14. *Не существует алгоритма, который по произвольной формуле первого порядка давал бы ответ на вопрос, верно ли, что истинность этой формулы сохраняется при взятии порожденных подшкал.*

Имеются и другие операции над шкалами, сохраняющие истинность модальных формул. Таковы, например, $p$-морфизмы, дизъюнктные объединения. Походящими модификациями нашего доказательства (по сути, нужно лишь подходящим образом изменить первопорядковую теорию в формулировке леммы) несложно[7] установить справедливость аналогов только что сформулированной теоремы, получающихся заменой слов *взятии порожденных подшкал* на *$p$-морфизм* и т.п.

Завершим этот раздел замечанием, что, хотя здесь и были слова «модальная формула» и им сопутствующие, мы занимались свойствами формул первого порядка (!), то есть рассмотренные задачи относились скорее к алгоритмической проблематике классической логики первого порядка.

## 6 Алгоритмическая проблема первопорядковой определимости

Как видно из предыдущих разделов, неразрешимость почти всех алгоритмических проблем теории соответствия обосновывается довольно просто, да и имеет мало отношения к теории соответствия. Исключением является следующая проблема:
*существует ли алгоритм, который по произвольной модальной формуле выяснял бы, является ли она первопорядково определимой.*

Основным результатом по этой проблеме является

[7] Однако не будем рисковать называть это упражнение тривиальным.

ТЕОРЕМА 15. *Проблема первопорядковой определимости модальных формул неразрешима.*

Подробное и вполне обозримое (менее восьми страниц) доказательство этой теоремы содержится в [10]. Использованная нами схема доказательства та же, что и в [3, 4, 13, 12, 16]. В явной форме эта схема лаконично описана в [11]. Для читателей «Логических исследований» отметим, что по сути она была использована в [5].

Здесь мы ограничимся лишь общим описанием доказательства, хотя не пропустим ни одного важного, ключевого момента, так что заинтересованный читатель сможет восстановить опущенные рутинные подробности.

Для доказательства нам понадобятся следующие ингредиенты:

1) $\mathcal{P}$ — некоторая машина Минского с неразрешимой проблемой остановки (см., например, [1] или [5]);

2) модальная формула

$$\neg H = \neg\Diamond(\Box^2\bot \wedge \Diamond\neg p \wedge \Diamond p) \quad (= \Box(\Box^2\bot \to \Box p \vee \Box\neg p)),$$

имеющая в качестве эквивалента первопорядковую формулу

$$\neg\exists x\,\exists y\,(xRy \wedge \neg\exists z\, yR^2z \wedge \exists u\exists v(yRu \wedge yRv \wedge u \neq v));$$

3) модальная формула (формула Лёба)

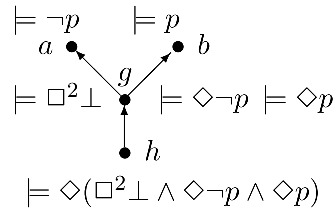
$$\boldsymbol{la} = \Box(\Box q \to q) \to \Box q,$$

не имеющая первопорядкового эквивалента.

Конечно, обе модальные формулы были выбраны авторами по их собственному вкусу, имеются и другие подходящие формулы. В частности, авторам оказалось удобным использовать то обстоятельство, что формула $\boldsymbol{la}$ *истинна на всех транзитивных шкалах, не имеющих бесконечных возрастающих цепей*, то есть цепей вида $z_0Rz_1R\ldots Rz_{n-1}Rz_nR\ldots$.

Поясним, почему указанные в пункте 6 формулы эквивалентны.

В самом деле, попытка опровергнуть формулу $\neg H$ приводит нас к шкале, изображенной на рисунке




$$h \not\models \neg\Diamond(\Box^2\bot \wedge \Diamond\neg p \wedge \Diamond p)$$

причем должно быть справедливо, что $\forall z\, \neg gR^2z$. Рядом с точками шкалы написаны некоторые формулы (точнее, подформулы формулы $\neg H$), которые в этих точках являются истинными.

Таким образом, для опровержения этой формулы должны выполняться следующие условия (прослеживаем шаг за шагом):

$$\begin{aligned}
&gRa \wedge gRb \wedge a \neq b\\
&\qquad g \models \Diamond\neg p \wedge \Diamond p;\\
&\exists u \exists v(gRu \wedge gRv \wedge u \neq v)\\
&\qquad g \models \Diamond\neg p \wedge \Diamond p;\\
&\neg\exists z\, gR^2z \wedge \exists u \exists v(gRu \wedge gRv \wedge u \neq v)\\
&\qquad g \models \Box^2\bot \wedge \Diamond\neg p \wedge \Diamond p;\\
&hRg \wedge \neg\exists z\, gR^2z \wedge \exists u \exists v(gRu \wedge gRv \wedge u \neq v)\\
&\qquad h \models \Diamond(\Box^2\bot \wedge \Diamond\neg p \wedge \Diamond p);\\
&\exists x \exists y\, (xRy \wedge \neg\exists z\, yR^2z \wedge \exists u \exists v(yRu \wedge yRv \wedge u \neq v))\\
&\qquad \not\models \neg\Diamond(\Box^2\bot \wedge \Diamond\neg p \wedge \Diamond p).
\end{aligned}$$

Подчеркнем, что мы только что приводили не доказательство, а пояснения, которые легко восполнимы до доказательства.

С помощью указанных ингредиентов так определяем теперь модальные формулы $Ax\mathcal{P}$ и $\beta_i$ ($i$ — входные данные машины $\mathcal{P}$), что

1. $Ax\mathcal{P} \vdash \beta_i$ в точности тогда, когда $\mathcal{P}$ завершает свою работу, начав ее на входных данных $i$,

и

условие $Ax\mathcal{P} \not\vdash \beta_i$ может быть установлено с помощью некоторой *транзитивной шкалы, не содержащей возрастающих цепей*;

2. $\neg H \vdash Ax\mathcal{P}$.

Далее. Определяем формулу

$$Ax\mathcal{P} \wedge (\beta_i \to \neg H) \wedge (\neg H \vee \boldsymbol{la}).$$

Главным нужным нам свойством этой формулы является следующая эквивалентность:

$$Ax\mathcal{P} \wedge (\beta_i \to \neg H) \wedge (\neg H \vee \boldsymbol{la}) \text{ первопорядково определима}$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathcal{P} \text{ завершает свою работу, начав ее на входе } i.$$

Для обоснования стрелки $\Uparrow$ замечаем, что если $\mathcal{P}$ завершает свою работу, начав ее на входе $i$, то наша формула эквивалентна формуле $\neg H$, которая первопорядково определима.

Чтобы обосновать стрелку $\Downarrow$ (точнее, ее контрапозицию), воспользуемся свойствами формулы Лёба $\boldsymbol{la}$.

Нам понадобятся некоторые детали, относящиеся к моделированию работы машин Минского средствами модальных формул.

Чтобы не вводить новых алфавитов, будем использовать старые символы — $\beta$, $i$ и др. — в новом смысле. Контекстность использования символов позволяет избежать какой-либо путаницы.

Вместо записей данных $i$ будем теперь использовать тройки натуральных чисел $\langle \alpha, m, n \rangle$, $\langle \beta, k, l \rangle$ («нам нужно перейти с помощью машины $\mathcal{P}$ от тройки $\langle \alpha, m, n \rangle$ к тройке $\langle \beta, k, l \rangle$»).

Напомним, что машиной Минского (ее программой) $\mathcal{P}$ является конечное множество инструкций для преобразования троек; каждая инструкция имеет один из четырех видов (в книге [1] обсуждается чуть иное, но эквивалентное определение):

- $s \to \langle t, 1, 0 \rangle$ (если первой компонентой тройки является $s$, мы должны заменить ее на $t$, добавить 1 ко второй компоненте, а третью компоненту не менять);

- $s \to \langle t, 0, 1\rangle$ (если первой компонентой тройки является $s$, мы должны заменить ее на $t$, добавить 1 к третьей компоненте, а вторую компоненту не менять);
- $s \to \langle t, -1, 0\rangle\,(\langle t', 0, 0\rangle)$ (если первой компонентой тройки является $s$ и вторая компонента больше 0, мы должны заменить первую компоненту на $t$, вычесть 1 из второй компоненты, а третью компоненту не менять, а если первой компонентой тройки является $s$ и вторая компонента равна 0, то нужно заменить первую компоненту на $t'$, не меняя ничего во второй и третьей компонентах);
- $s \to \langle t, 0, -1\rangle\,(\langle t', 0, 0\rangle)$ (если первой компонентой тройки является $s$ и третья компонента больше 0, мы должны заменить первую компоненту на $t$, вычесть 1 из третьей компоненты, а вторую компоненту не менять, а если первой компонентой тройки является $s$ и третья компонента равна 0, то нужно заменить первую компоненту на $t'$, не меняя ничего во второй и третьей компонентах).

Компоненты троек можно понимать так: первая компонента — номер инструкции, а вторая и третья — информация в двух (соответственно, первом и втором) счетчиках. Иногда описанные машины Минского называют регистровыми машинами с двумя регистрами.

ПРИМЕР 16. Если у нас в программе $\mathcal{P}$ имеется инструкция

$$s \to \langle t, 0, -1\rangle\,(\left\langle t', 0, 0\right\rangle),$$

то за один шаг с ее помощью производятся такие вычисления:

$$\mathcal{P} : \langle s, 5, 3\rangle \to \langle t, 5, 2\rangle$$

и

$$\mathcal{P} : \langle s, 5, 0\rangle \to \left\langle t', 5, 0\right\rangle.$$

Тот факт, что по программе $\mathcal{P}$ из тройки $\langle \alpha, m, n\rangle$ за некоторое конечное число шагов получается тройка $\langle \beta, k, l\rangle$, будем записывать аналогично:

$$\mathcal{P} : \langle \alpha, m, n\rangle \to \langle \beta, k, l\rangle\,.$$

Договоримся, что все программы детерминированные, то есть в программе не может быть двух разных инструкций с одинаковыми левыми частями. (Эта договоренность несущественна.)

**Основная неразрешимая проблема**: *не существует алгоритма, который по данной программе* $\mathcal{P}$ *и тройкам* $\langle \alpha, m, n \rangle$, $\langle \beta, k, l \rangle$ *мог бы выяснить, верно ли, что справедливо* $\mathcal{P} : \langle \alpha, m, n \rangle \to \langle \beta, k, l \rangle$.

**Неразрешимость проблемы второй тройки**: *существуют такие программа* $\mathcal{P}$ *и тройка* $\langle \alpha, m, n \rangle$, *что не существует алгоритма, способного выяснить по произвольной тройке* $\langle \beta, k, l \rangle$, *верно ли, что* $\mathcal{P} : \langle \alpha, m, n \rangle \to \langle \beta, k, l \rangle$.

Фиксируем такие программу $\mathcal{P}$ и тройку $\langle \alpha, m, n \rangle$.

На следующей иррефлексивной транзитивной шкале $F_i$ (см. рис. 1) мы представляем множество

$$\{\langle \beta, k, l \rangle : \mathcal{P} : \langle \alpha, m, n \rangle \to \langle \beta, k, l \rangle\}.$$

Здесь три последовательности точек

$$a_0^0,\ a_1^0,\ a_2^0, \dots\ , a_\beta^0, \dots$$

$$a_0^1,\ a_1^1,\ a_2^1, \dots\ , a_k^1, \dots$$

$$a_0^2,\ a_1^2,\ a_2^2, \dots\ , a_l^2, \dots$$

изображают возможные компоненты троек.

Полагаем по определению, что в шкале $F_i$ точки вида $s(\beta, k, l)$ образуют множество

$$\{s(\beta, k, l) : \mathcal{P} : \langle \alpha, m, n \rangle \to \langle \beta, k, l \rangle\}.$$

Точки $a$, $b$, $g$, $h$ позволяют получить опровержение формулы $\neg H$: достаточно (впрочем, и необходимо) положить

$$a \models p,\ b \not\models p \text{ или } a \not\models p,\ b \models p.$$

Точки шкалы $F_i$ могут быть описаны формулами от одной переменной $p$ следующим образом.

Полагаем, что оценка выбрана так, что $a \models p$, $b \not\models p$ (случай $a \not\models p$, $b \models p$ аналогичен).

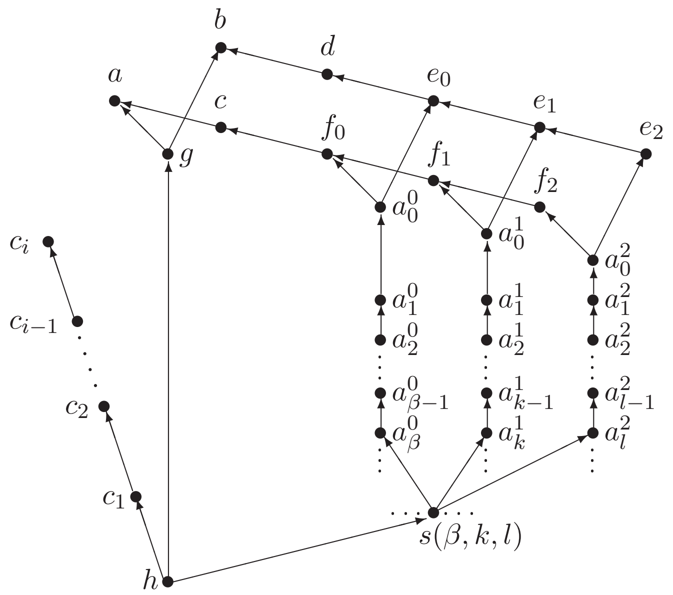



Рис. 1. Шкала $F_i$

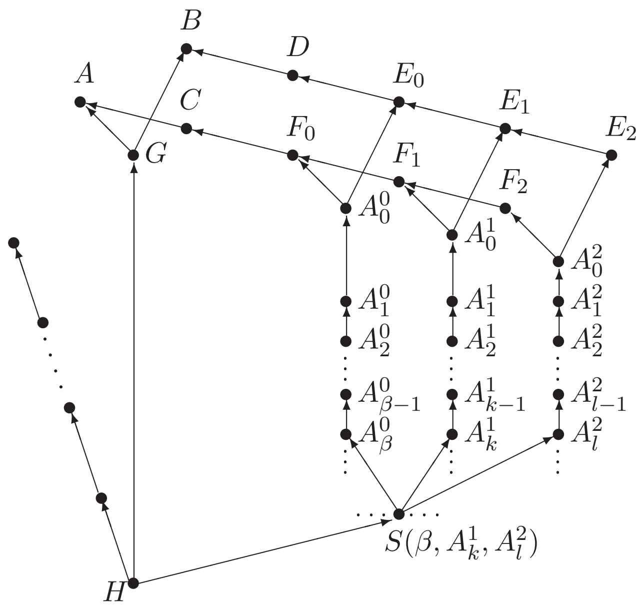



Рис. 2. Шкала $F_i$ и формулы, описывающие ее точки

При выбранной оценке на рис. 2 происходит упомянутое описание: каждая формула находится около той единственной точки, в которой истинна.

Сами формулы таковы:

$$A = \Box\bot \wedge p,\ B = \Box\bot \wedge \neg p,$$

$$C = \Diamond A \wedge \neg\Diamond\Diamond A \wedge \neg\Diamond B,\ D = \Diamond B \wedge \neg\Diamond\Diamond B \wedge \neg\Diamond A,$$

$$G = \Box^2\bot \wedge \Diamond\neg p \wedge \Diamond p,\ H = \Diamond G,$$

$$E_0 = \Diamond D \wedge \neg\Diamond\Diamond D,\ E_1 = \Diamond E_0 \wedge \neg\Diamond\Diamond E_0 \wedge \neg\Diamond C,$$

$$E_2 = \Diamond E_1 \wedge \neg\Diamond\Diamond E_1 \wedge \neg\Diamond C,\ F_0 = \Diamond C \wedge \neg\Diamond\Diamond C,$$

$$F_1 = \Diamond F_0 \wedge \neg\Diamond\Diamond F_0 \wedge \neg\Diamond D,\ F_2 = \Diamond F_1 \wedge \neg\Diamond\Diamond F_1 \wedge \neg\Diamond D,$$

$$A_0^0 = \Diamond E_0 \wedge \Diamond F_0 \wedge \neg\Diamond\Diamond E_0 \wedge \neg\Diamond\Diamond F_0,$$

$$A_0^1 = \Diamond E_1 \wedge \Diamond F_1 \wedge \neg\Diamond\Diamond E_1 \wedge \neg\Diamond\Diamond F_1,$$

$$A_0^2 = \Diamond E_2 \wedge \Diamond F_2 \wedge \neg\Diamond\Diamond E_2 \wedge \neg\Diamond\Diamond F_2,$$

$$A_{j+1}^i = \Diamond A_j^i \wedge \neg\Diamond^2 A_j^i \wedge \bigwedge_{i\neq k=0}^{2} \neg\Diamond A_0^k,$$

где $i \in \{0,1,2\}$, $j \geq 0$, и

$$S(\beta, A_k^1, A_l^2) = \Diamond A_\beta^0 \wedge \neg\Diamond A_{\beta+1}^0 \wedge \Diamond A_k^1 \wedge \neg\Diamond\Diamond A_k^1 \wedge \Diamond A_l^2 \wedge \neg\Diamond\Diamond A_l^2$$

для произвольных $\beta$, $k$ и $l$.

Легко видеть, что

- $F_i \models H \wedge S(\alpha, A_m^1, A_n^2) \to H \wedge S(\beta, A_k^1, A_l^2) \iff \mathcal{P} : \langle\alpha, m, n\rangle \to \langle\beta, k, l\rangle$.

По данной программе машины Минского $\mathcal{P}$ можно построить (стандартное упражнение, см. указанные выше источники) формулу $Ax\mathcal{P}$ со свойствами:

- $F_i \models Ax\mathcal{P}$;
- $\neg H \vdash Ax\mathcal{P}$;

- справедлива эквивалентность:

$$Ax\mathcal{P} \vdash H \wedge S(\alpha, A^1_m, A^2_n) \to H \wedge S(\beta, A^1_k, A^2_l)$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathcal{P} : \langle \alpha, m, n\rangle \to \langle \beta, k, l\rangle\,.$$

Упоминавшаяся выше формула $Ax\mathcal{P} \wedge (\beta_i \to \neg H) \wedge (\neg H \vee \boldsymbol{la})$ принимает следующий конкретный вид

$$Ax\mathcal{P} \wedge ((H \wedge S(\alpha, A^1_m, A^2_n) \to H \wedge S(\beta, A^1_k, A^2_l)) \to \neg H) \wedge (\neg H \vee \boldsymbol{la})$$

и мы имеем по построению

$$F_i \models Ax\mathcal{P} \wedge ((H \wedge S(\alpha, A^1_m, A^2_n) \to H \wedge S(\beta, A^1_k, A^2_l)) \to \neg H) \wedge$$
$$(\neg H \vee \boldsymbol{la}).$$

В самом деле,

- $F_i \models Ax\mathcal{P}$ как было отмечено выше;
- $F_i \models (H \wedge S(\alpha, A^1_m, A^2_n) \to H \wedge S(\beta, A^1_k, A^2_l)) \to \neg H$, поскольку если $F_i \not\models^V \neg H$ ($V$ — некоторая оценка переменных), то $h$ является единственной точкой со свойством $h \models^V H$, а кроме того, выполняется $h \models^V H \wedge S(\alpha, A^1_m, A^2_n)$, но $h \not\models^V H \wedge S(\beta, A^1_k, A^2_l)$;
- $F_i \models \neg H \vee \boldsymbol{la}$, поскольку шкала $F_i$ транзитивна и не содержит бесконечных возрастающих цепей.

Допустим теперь, что формула $\Phi$ является первопорядковым эквивалентом формулы

$$Ax\mathcal{P} \wedge ((H \wedge S(\alpha, A^1_m, A^2_n) \to H \wedge S(\beta, A^1_k, A^2_l)) \to \neg H) \wedge (\neg H \vee \boldsymbol{la}).$$

Тогда $F_i \models \Phi$.

Пусть $F'$ — произвольное ультрапроизведение всех шкал $F_i$ по какому-нибудь неглавному ультрафильтру над $\omega - \{0\}$. Легко понять (то есть показать с помощью формул первого порядка, описывающих устройство шкал $F_i$, а истинность формул первого порядка сохраняется при ультрапроизведениях), что шкала устроена так, как показано на рис. 3.

Но теперь в шкале (по-прежнему транзитивной, иррефлексивной) появилась бесконечная возрастающая цепь. Значит, мы имеем

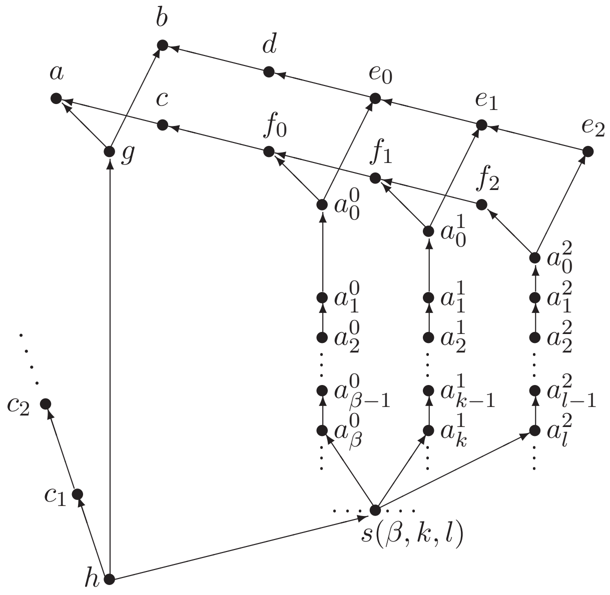



Рис. 3. Шкала $F'$

- $F' \models \Phi$, поскольку $\Phi$ является формулой первого порядка;
- $F' \not\models \neg H \vee \boldsymbol{la}$, поскольку при всякой оценке $V$, такой что
  - $x \models p$ в точности тогда, когда $x = a$, и
  - $x \models q$ в точности тогда, когда $x \notin \{h, c_1, c_2, \dots\}$ (с помощью свойств ультрапроизведений легко показать, что цепь $c_1 R c_2 R c_3 R \dots$ в $F'$ бесконечна),

  мы имеем
  - $h \not\models \neg H$ и
  - $h \not\models \boldsymbol{la}$.

Таким образом, $F' \models \Phi$ и $F' \not\models \boldsymbol{la}$, что противоречит тому, что они эквивалентны.

Полученное противоречие показывает, что допущенное нами неверно, то есть формула не имеет первопорядкового эквивалента.

Доказательство теоремы этого раздела закончено.

## 7 Заключительные замечания

Ну, что же. Мы показали, что вроде бы знак вопроса в названии статьи можно убрать. Однако нам этого делать не хотелось бы. Необходимо, на наш взгляд, просто отдавать себе отчет, что при рассмотрении алгоритмической проблематики в теории соответствия необходимы изначальные разумные ограничения при постановке задач. Надеемся, что приведенные доказательства помогут исследователям находить эти ограничения.

## Литература


[1] *Мальцев А.И.* Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука, 1986.

[2] *Фейс Р.* Модальная логика. М.: Наука, 1974.

[3] *Чагров А.В.* Неразрешимые свойства расширений логики доказуемости // Алгебра и логика. 1990. Т. 29. N 3. С. 350–367.

[4] *Чагров А.В.* Неразрешимые свойства расширений логики доказуемости. II // Алгебра и логика. 1990. Т. 29. N 5. С. 613–623.

[5] *Чагров А.В.* Алгоритмическая проблема аксиоматизации табличной нормальной модальной логики // Логические исследования. Вып 9. М.: Наука, 2002. С. 251–263.

[6] *Чагрова Л.А.* О проблеме определимости пропозициональных формул интуиционистской логики формулами классической логики первого порядка. Калинин: КГУ, 1989. (Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, защищенная в Институте математики с вычислительным центром АН МССР, Кишинев.)

[7] *van Benthem J.A.F.K.* Modal Logic and Classical Logic. Bibliopolis, Napoli, 1983.

[8] *van Benthem J.A.F.K.* Correspondence Theory // D.M.Gabbay, F.Guenthner (eds.). Handbook of Philosophical Logic. 2nd Edition, Vol. 3. Kluwer Academic Publishers, 2001. P. 325–408.

[9] *Chagrov A.V., Chagrova L.A.* Algorithmic problems concerning first-order definability of modal formulas on the class of all finite frames // Studia Logica. 1995. Vol. 55. No. 3. P. 421–448.

[10] *Chagrov A.V., Chagrova L.A.* The Truth About Algorithmic Problems in Correspondence Theory // Advances in Modal Logic. Vol. 6. College Publications, 2006. P. 121–138.

[11] *Chagrov A., Zakharyashchev M.* The undecidability of the disjunction property of propositional logics and other related problems // Journal of Symbolic Logic. 1993. Vol. 58. P. 967–1002.

[12] *Chagrov A., Zakharyashchev M.* Modal Logic. Oxford University Press, 1997.

[13] *Chagrova L.A.* An undecidable problem in correspondence theory // Journal of Symbolic Logic. 1991. Vol. 56. P. 1261–1272.

[14] *Isard S.* A finitely axiomatizable undecidable extension of $K$ // Theoria. 1977. Vol. 43. P. 195–202.

[15] *Kripke S.* Semantical analysis of modal logic, Part I // Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 1963. Bd. 9. S. 67–96.

[16] *Zakharyaschev M., Wolter F. and Chagrov A.* Advanced Modal Logic // D.M.Gabbay, F.Guenthner (eds.). Handbook of Philosophical Logic. 2nd Edition. Vol. 3. Kluwer Academic Publishers, 2001. P. 83–266.