[8] *Жегалкин И.И.* О технике вычисления предложений в символической логике // Матем. сб. 1927. Т. 34, вып. 1. С. 9.

[9] *Жегалкин И.И.* Арифметизация символической логики // Матем. сб. 1928. Т. 35, вып. 3–4; 1929. Т. 36, вып. 3–4; *Он же.* К проблеме разрешимости // Матем. сб. 1939. Т.6 (48), вып. 2; *Он же.* Проблема разрешимости на конечных классах // Ученые записки. МГУ. 1946. Вып. 3-4.

[10] *Шуранов Б.М.* Иван Иванович Жегалкин: вклад в математическую логику // Вестник Международного славянского университета. Вып. 4. М., 1998. С. 32–33.

[11] *Новоселов Н.Н.* Эффективизм // Философская энциклопедия. 1970. Т. 5.

[12] *Бирюкова Л.Г., Бирюков Б.В.* Из истории генетического метода: об одном опыте осмысления грассмановской индуктивно-рекурсивной арифметики (В.Ф. Каган) // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. Материалы VI Международной научной конференции. [СПб], Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2000.

[13] *Бирюкова Л.Г., Бирюков Б.В.* «Учение о формах (величинах)» Германа и Роберта Грасманов как предвосхищение конструктивного направления в математике I. // Вопросы кибернетики. Кибернетика и логическая формализация. Аспекты истории и методологии. М., 1982 [Издание научного совета по кибернетике АН СССР].

[14] *Бирюков Б.* Грассман Роберт // Философская энциклопедия. 1960.Т. 1.

[15] *Малыхина Г.И.* Логические исследования Роберта Грассмана. Дисс. канд. филос. наук. Л., 1981.

[16] *Hao Wang.* The axiomatization of arithmetic // Journal of Symbolic Logic. 1957. Vol. 22. P. 145–158.

Натуральный вывод для системы логики линейного времени

А.Е. Болотов, А. Бащуковски, О.М. Григорьев[1], В.О. Шангин

Abstract. We present a sound and complete Quine-style natural deduction system for propositional linear-time temporal logic based on similar systems for the propositional classical logic. The presented system can serve as a basis for the construction of provers, which are of interest in the context of research in Artificial Intelligence.

1 Введение

В нашей статье предложена семантически непротиворечивая и полная система натурального вывода типа Фитча для логики линейного времени PLTL (the propositional linear-time temporal logic). Первые системы натурального вывода (НВ) были предложены независимо Г. Генценом [2] и С. Яськовским [3]. В дальнейшем подход С. Яськовского разрабатывался Ф. Фитчем [4] и У. Куайном [5]. Поэтому мы будем называть системы НВ такого типа системами НВ типа Куайна. Отметим интересную деталь в развитии НВ. С одной стороны, неоспоримо, что НВ — это тип логического вывода, который наиболее адекватно имитирует рассуждения, характерные для человеческого мышления, решающего (прежде всего) математическую задачу. С другой стороны, до 90-х годов прошлого века НВ не использовался в качестве основы для построения различных автоматических процедур поиска вывода. В качестве причины при этом называлось нарушение при построении НВ свойства подформульности, говорящего, что в выводе формулы используются только подформулы или отрицания подформул этой формулы. В результате долгое время исследования в области автоматического

[1]Работа поддержана РГНФ. Грант № 06-03-00020а.

поиска логического вывода были сосредоточены на поиске вывода с помощью метода резолюции, секвенциальных и аналитико-табличных типов логического вывода. Однако в последнее время ситуация стала меняться. Например, системы НВ используются в логических frameworks, при анализе которых существенную роль играет понятие гипотетических рассуждений, т.е. умозаключений с помощью посылок. В частности, системы НВ были предложены для интуиционистской линейной логики. В нашей статье для логики линейного времени предложена семантически непротиворечивая и полная система натурального вывода типа Куйана, основанная на аналогичных системах натурального вывода для классической и интуиционистской логик. Предложенная система натурального вывода, по нашему мнению, может служить основой для построения различных автоматических процедур поиска вывода, реализуемых в рамках программы создания Искусственного интеллекта. Структура статьи следующая. В § 2 задаются синтаксис и семантика линейной временной логики PLTL. В § 3 описывается система НВ для PLTL, которую в дальнейшем мы будем называть PLTL_{ND}, и приводится пример доказательства. Теоремам о семантической непротиворечивости и полноте PLTL_{ND} посвящен § 4. Итоги работы и темы для будущих исследований обсуждаются в § 5.

2 Синтаксис и семантика линейной временной логики PLTL

Алфавит языка PLTL задается следующим образом:

- бесконечный список *Prop* пропозициональных переменных:

  $p, q, r, \ldots, p_1, q_1, r_1, \ldots, p_n, q_n, r_n, \ldots;$

- стандартные логические символы для классической логики, $\neg, \wedge, \Rightarrow, \vee$;

- логические символы для временной логики:

$\Box$	–	«всегда будет»;
$\Diamond$	–	«когда-нибудь будет»;
$\bigcirc$	–	«в следующий момент времени»;
$\mathcal{U}$	–	«... до тех пор пока не наступит...».

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (правильно построенная формула (**ппф**)).

1. Любая пропозициональная переменная есть **ппф**.
2. Если A и B есть **ппф**, то $A \wedge B$, $\neg A$, $A \vee B$ и $A \Rightarrow B$ суть **ппф**.
3. Если A и B есть **ппф**, то $\Box A$, $\Diamond A$, $\bigcirc A$ и $A \mathcal{U} B$ суть **ппф**.

Моделью для PLTL является дискретная и линейная последовательность состояний (моментов времени, миров)

$$\sigma = s_0, s_1, s_2, \ldots,$$

которая изоморфна множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$ и в которой любое состояние s_i включает те пропозициональные переменные, которые истинны в i-й момент времени.

Выражение $\langle\sigma, i\rangle \models A$ будет обозначать тот факт, что формула A выполнима в модели σ в i-й момент времени.

Далее определяется отношение $\models$ — выполнимости формулы языка PLTL в модели, $i, j, k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{lll}
\langle\sigma, i\rangle \models p & \Leftrightarrow & p \in s_i, \text{ для } p \in Prop \\
\langle\sigma, i\rangle \models \neg A & \Leftrightarrow & \langle\sigma, i\rangle \not\models A \\
\langle\sigma, i\rangle \models A \wedge B & \Leftrightarrow & \langle\sigma, i\rangle \models A \text{ и } \langle\sigma, i\rangle \models B \\
\langle\sigma, i\rangle \models A \vee B & \Leftrightarrow & \langle\sigma, i\rangle \models A \text{ или } \langle\sigma, i\rangle \models B \\
\langle\sigma, i\rangle \models A \Rightarrow B & \Leftrightarrow & \langle\sigma, i\rangle \not\models A \text{ или } \langle\sigma, i\rangle \models B \\
\langle\sigma, i\rangle \models \Box A & \Leftrightarrow & \text{для всякого } j \text{ если } i \leq j \\
 & & \quad \text{то } \langle\sigma, j\rangle \models A \\
\langle\sigma, i\rangle \models \Diamond A & \Leftrightarrow & \text{существует } j \text{ такое, что } i \leq j \\
 & & \quad \text{и } \langle\sigma, j\rangle \models A \\
\langle\sigma, i\rangle \models \bigcirc A & \Leftrightarrow & \langle\sigma, i+1\rangle \models A \\
\langle\sigma, i\rangle \models A \mathcal{U} B & \Leftrightarrow & \text{существует } j \text{ такое, что } i \leq j \\
 & & \quad \text{и } \langle\sigma, j\rangle \models B \text{ и для каждого } k, \\
 & & \quad \text{если } i \leq k < j, \text{ то } \langle\sigma, k\rangle \models A
\end{array}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (Выполнимость). Формула A называется выполнимой, если и только если существует модель σ такая, что $\langle\sigma, 0\rangle \models A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (Общезначимость). Формула A является общезначимой, если и только если A выполнима в любой модели, то есть для всякой модели σ, $\langle\sigma, 0\rangle \models A$.

3 Система натурального вывода PLTL$_{ND}$

3.1 Расширенные PLTL синтаксис и семантика

Язык PLTL$_{ND}$ строится за счет добавления к алфавиту языка PLTL множества индексов.

Индексы из множества Lab — это переменные по мирам из σ:

$$Lab : \{x, y, z, x_1, x_2, x_3, \dots\}.$$

Пусть g есть функция, отображающая множество Lab в $\mathbb{N}$. Определим двухместные отношения $\prec$, $\preceq$, $Next$ и операцию $'$ следующим образом:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 (Отношения $\prec$, $\preceq$, $Next$ и операция $'$). Для x, $y \in Lab$:

(4.1) $\prec \subset Lab^2 : x \prec y \Leftrightarrow g(x) < g(y)$,

(4.2) $\preceq \subset Lab^2 : x \preceq y \Leftrightarrow g(x) \leq g(y)$,

(4.3) $Next \subset Lab^2 : Next(x, y) \Leftrightarrow g(y) = g(x) + 1$, так что для всякого $i \in Lab$, существует $j \in Lab$ такой, что $Next(i, j)$ (сериальность),

(4.4) При наличии индекса i операция $'$, примененная к i, дает нам индекс i' такой, что $Next(i, i')$.

Следующие свойства данных отношений получаются из данного определения.

ЛЕММА 5 (Свойства $\prec$, $\preceq$ и $Next$).

- *Для всякого $i, j \in Lab$, если $Next(i, j)$, то $i \preceq j$.*
- *Для всякого $i, j \in Lab$, если $i \prec j$, то $i \preceq j$.*
- *Свойства $\preceq$:*
  - *Для всякого $i \in Lab$: $i \preceq i$ (рефлексивность),*
  - *Для всякого $i, j, k \in Lab$, если $i \preceq j$ и $j \preceq k$, то $i \preceq k$ (транзитивность).*

В дальнейшем высказывания, выражающие свойства отношений, называются *реляционными формулами.*

Теперь зададим понятие формулы языка PLTL$_{ND}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 (Язык PLTL$_{ND}$).

- Если A — формула PLTL и $i \in Lab$ — индекс, то $i : A$ является формулой языка PLTL$_{ND}$.
- Любая реляционная формула типа $Next(i, i')$ и $i \preceq j$ является формулой языка PLTL$_{ND}$.

Семантика PLTL$_{ND}$. В дальнейшем мы используем буквы $A, B, C, D, \dots$ как метасимволы для формул PLTL, а каллиграфические буквы $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D} \dots$ для обозначения формул языка PLTL$_{ND}$, то есть индексированных или реляционных формул. Интуитивно запись $i : A$ обозначает, что формула A выполнима в мире, соответствующем индексу i. Поэтому семантика для языка PLTL$_{ND}$ строится аналогично семантике для языка PLTL, заданной в § 2.

Пусть Γ обозначает множество формул языка PLTL$_{ND}$, $D_\Gamma = \{x \mid x : A \in \Gamma\}$, σ — это модель, определенная в § 2, и пусть f есть функция, которая отображает элементы D_Γ в σ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7 (Реализуемость PLTL$_{ND}$-формулы в модели). Модель σ *реализует* множество Γ при отображении f^σ, если выполняются следующие условия:

(1) Для всякого $x \in D_\Gamma$ и для всякой формулы A, если $x : A \in \Gamma$, то $\langle \sigma, f^\sigma(x) \rangle \models A$,

(2) Для всяких x, y, если $x \preceq y \in \Gamma$ и $f^\sigma(x) = i$, и $f^\sigma(y) = j$, то $i \leq j$,

(3) Для всяких x, y, если $Next(x, y) \in \Gamma$ и $f^\sigma(x) = i$, и $f^\sigma(y) = j$, тогда $j = i + 1$.

Множество Γ в этом случае называется *реализуемым* в σ при отображении f^σ. Если из контекста понятно, о каких модели и отображении идет речь, то Γ называется реализуемым.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8 (Общезначимость PLTL$_{ND}$-формул). Формула $\mathcal{A} = i : B$ является общезначимой (символически $\models_{ND} \mathcal{A}$), если и только если множество $\{\mathcal{A}\}$ реализуемо в любой модели, для любой функции f.

3.2 Пропозициональные правила

Множество правил делится на два класса: *правила исключения* и *правила введения* логических связок. Правила первого рода позволяют нам упрощать формулы, в то время как правила второго рода направлены на синтезирование формул.

Представим указанные два типа правил для пропозициональных связок.

Правила исключения:	Правила введения:
$\wedge_{\text{и}_1}\ \dfrac{i:A\wedge B}{i:A}$	$\wedge_{\text{в}}\ \dfrac{i:A,\quad i:B}{i:A\wedge B}$
$\wedge_{\text{и}_2}\ \dfrac{i:A\wedge B}{i:B}$	$\vee_{\text{в}_1}\ \dfrac{i:A}{i:A\vee B}$
$\vee_{\text{и}}\ \dfrac{i:A\vee B,\quad i:\neg A}{i:B}$	$\vee_{\text{в}_2}\ \dfrac{i:B}{i:A\vee B}$
$\Rightarrow_{\text{и}}\ \dfrac{i:A\Rightarrow B,\quad i:A}{i:B}$	$\Rightarrow_{\text{в}}\ \dfrac{[i:C],\quad i:B}{i:C\Rightarrow B}$
$\neg_{\text{и}}\ \dfrac{i:\neg\neg A}{i:A}$	$\neg_{\text{в}}\ \dfrac{[j:C],\quad i:B,\quad i:\neg B}{j:\neg C}$

В формулировке правил «$\Rightarrow$ в» и «$\neg$ в» формула $i:C$ является последним неисключенным допущением в выводе (это понятие будет разъяснено ниже). Применяя какое-либо из этих правил на n-ом шаге построения вывода, мы исключаем последнее допущение, а также все следующие за ним формулы вывода до шага $n-1$ включительно. Если последнее допущение было введено на шаге k, то такое исключение будем обозначать в выводах как $[k-(n-1)]$.

3.3 Правила для временных операторов

В формулировке правил исключения и введения временных операторов мы используем понятия *абсолютно* и *относительно* ограниченная переменная, аналогично тому как это делается в первопорядковой логике [1]. Так, говоря, что переменная j, являющаяся индексом некоторой формулы, ограничена абсолютно.

и обозначая этот факт через $\mapsto j$, мы имеем в виду, что значение этой переменной фиксировано. Иначе говоря, переменная j теперь пробегает не по всему множеству моментов времени, а ей приписан строго определенный момент. Говоря, что переменная i является относительно ограниченной переменной j, и обозначая это через $j\mapsto i$, мы имеем в виду, что уже абсолютно ограниченная j, ограничивает возможное множество значений для i, с которой она связана в реляционной формуле, например, в $i\preceq j$.

Представим теперь правила исключения и введения временных операторов.

Правила исключения:

$$\Box_{\text{и}}\ \frac{i:\Box A,\quad i\preceq j}{j:A}$$

$$\Diamond_{\text{и}}\ \frac{i:\Diamond A}{i\preceq j,\quad j:A}\qquad \text{где } \forall C(j:C\notin M1)\ \mapsto j,\ j\mapsto i$$

$$\bigcirc^{\star}_{\text{и}}\ \frac{i:\bigcirc A}{i':A}\qquad \text{где } i':A\in M1$$

$$\mathcal{U}_{\text{и1}}\ \frac{i:A\,\mathcal{U}\,B,\quad i:\neg B}{i:A,\quad j:B,\quad i\prec j}\qquad \text{где } \forall C(j:C\notin M1)\ \mapsto j,\ j\mapsto i$$

$$\mathcal{U}^{\star\star}_{\text{и2}}\ \frac{i^{[AB]}\preceq j^{[AB]},\,i^{[AB]}\preceq k,\,k\prec j^{[AB]}}{k:A}$$

Правила введения:

$$\Box_{\text{в}}{}^{\star\star\star}\ \frac{j:A,\quad [i\preceq j]}{i:\Box A}\qquad \text{где} j:A\notin M1\ \mapsto j,\ j\mapsto i$$

$$\Diamond_{\text{в}}\ \frac{j:A,\quad i\preceq j}{i:\Diamond A}\qquad \bigcirc_{\text{в}}\ \frac{i':A,\quad Next(i,i')}{i:\bigcirc A}$$

$$\mathcal{U}_{\text{в}_1}\ \frac{i:B}{i:A\,\mathcal{U}\,B}\qquad \mathcal{U}_{\text{в}_2}\ \frac{i:A,\quad i':B,\quad Next(i,i')}{i:A\,\mathcal{U}\,B}$$

$$\mathcal{U}^{\star\star\star\star}_{\text{в}_3}\ \frac{j:A,\ l:B,\ i\preceq l,\ [i\preceq j],\ [j\preceq l]}{i:A\,\mathcal{U}\,B}\qquad \text{где } j:A\notin M1\ \mapsto j,\ j\mapsto i,\ j\mapsto l$$

Условие $\forall C(j:C \notin M1)$ в правилах $\Diamond_{\text{И}}$ и $\mathcal{U}_{\text{И}_1}$ означает, что j не должен встречаться в выводе любой формулы C, которая отмечена меткой $M1$. Переменная j в этих правилах не встречается в других посылках и допущениях вывода.

Условие $j : A \notin M1$ в правилах $\Box_{\text{В}}$ и $\mathcal{U}_{\text{В}_3}$ означает, что $j : A$ не отмечена меткой $M1$.

$\star$ В правиле $\bigcirc_{\text{И}}$ заключение $i' : A$ отмечено в выводе меткой M_1.

$\star\star$ В правиле $\mathcal{U}_{\text{И}_2}$ выражение $i^{[AB]}$ означает, что в выводе переменная i отмечена $[AB]$, если эта переменная была получена в результате применения правила $\mathcal{U}_{\text{И}_1}$ к формуле $i : A\mathcal{U} B$.

$\star\star\star$ В правиле $\Box_{\text{В}}$ формула $i \preceq j$ должна быть последней неисключенной посылкой; применяя правило на шаге n, мы исключаем формулу $i \preceq j$ и все следующие за ней формулы вывода, заканчивая шагом $n - 1$. Переменная j не встречается в других посылках и допущениях вывода.

$\star\star\star\star$ Применяя правило $\mathcal{U}_{\text{В}_3}$ на шаге n, мы исключаем допущение $i \preceq j$ или $j \preceq l$, которое встречается раньше в выводе, и все следующие за ней формулы вывода, заканчивая шагом $n - 1$. Переменная j не встречается в других посылках и допущениях вывода.

К приведенным правилам добавим также правило индукции:

Индукция: $\dfrac{i:A \quad [i \preceq j] \qquad j:A \Rightarrow \bigcirc A}{i:\Box A}$, где

- $j:A \notin M1$ и $\mapsto j$, $j \mapsto i$.
- $i \preceq j$ должно быть последней посылкой; применяя правило на шаге n, мы исключаем формулу $i \preceq j$ и все следующие за ней формулы вывода, заканчивая шагом $n - 1$.

Следующие правила применяются к реляционным формулам:

Рефлексивность: $\dfrac{}{i \preceq i}$

Транзитивность: $\dfrac{i \preceq j,\ j \preceq k}{i \preceq k}$

$\bigcirc$ **Сериальность:** $\dfrac{}{Next(i, i')}$

$\bigcirc / \preceq$: $\dfrac{Next(i, i')}{i \preceq i'}$ $\qquad \prec / \preceq$: $\dfrac{i \prec j}{i \preceq j}$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9 (Вывод в PLTL$_{ND}$). Вывод $\mathfrak{D}$ PLTL$_{ND}$-формулы $\mathcal{A}$ из множества PLTL$_{ND}$-формул Γ есть непустая последовательность PLTL$_{ND}$-формул, в которой

1. Каждый элемент из Γ и PLTL$_{ND}$-формула $\mathcal{A}$ имеют вид $i : C$ (для некоторой PLTL-формулы C и $i \in Lab$) и префиксированы одинаковым индексом,
2. Каждый член $\mathfrak{D}$ есть либо элемент множества Γ, либо допущение, либо получен из PLTL$_{ND}$-формул предыдущих шагов вывода по одному из правил системы PLTL$_{ND}$,
3. Ни один индекс, входящий в $\mathfrak{D}$, не является ограниченным дважды и не ограничивает сам себя,
4. Индекс $\mathcal{A}$ не ограничен в $\mathfrak{D}$,
5. Множество неисключенных допущений пусто.

Выражение $\Gamma \vdash_{ND} \mathcal{A}$ обозначает, что существует PLTL$_{ND}$-вывод $\mathcal{A}$ из Γ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10 (Доказательство в системе PLTL$_{ND}$). Доказательством $PLTL$-формулы A называется непустая конечная последовательность формул $C_1, C_2, ...C_n$, $(n \leq 1)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. Каждая формула $\mathcal{A}_i$, где $(1 \leq i \leq n)$, есть либо посылка, либо получена из предыдущих формул по одному из правил;

2. Последняя формула вывода $\mathcal{A}_n$ есть $x : B$, для некоторого индекса x;

3. Ни одна переменная в доказательстве не ограничивается абсолютно более одного раза;

4. Ни одна переменная не ограничивает в доказательстве сама себя.

Теоремой называется формула, для которой имеется доказательство. Символически обозначается как $\vdash_{ND} B$.

Теперь приведем пример доказательства формулы

(1) $\Box(p \Rightarrow \bigcirc p) \Rightarrow (p \Rightarrow \Box p)$.

Доказательство начинается взятием в качестве посылки антецедента этой формулы, то есть $\Box(p \Rightarrow \bigcirc p)$.

1. $x : \Box(p \Rightarrow \bigcirc p)$	посылка
2. $x : p$	посылка
3. $x \preceq y$	посылка
4. $y : p \Rightarrow \bigcirc p$	$\Box_{И}$, 1, 3
5. $x : \Box p$	Индукция 2, 3, 4, $\mapsto y, y \mapsto x$, [3—4]
6. $x : p \Rightarrow \Box p$	$\Rightarrow_{В}$ 5, [2—5]
7. $x : \Box(p \Rightarrow \bigcirc p) \Rightarrow (p \Rightarrow \Box p)$	$\Rightarrow_{В}$, 6, [1—6]

Еще две посылки вводятся на шаге 2 и 3 соответственно, что позволяет нам на шаге 4 применить правило $\Box_{И}$ к формулам 1 и 3. Далее следует применение правила индукции к формулам 2–4. Напомним, что в результате применения правила индукции переменная y становится абсолютно ограниченной и переменная x становится относительно ограниченной. Также мы исключаем из вывода формулы 3—4, начиная с последней неисключенной посылки 3. На шаге 6 к формуле применяется правило $\Rightarrow_{В}$ и формулы 2—5 исключаются. Еще одно применение этого правила на шаге 7 дает нам искомое доказательство. На этом шаге

мы также исключаем все формулы, начиная с последней неисключенной посылки 1. Так как последней формулой является формула $x : \Box(p \Rightarrow \bigcirc p) \Rightarrow (p \Rightarrow \Box p)$, и множество неисключенных посылок пусто, мы имеем доказательство для 1. В следующем параграфе приводятся другие примеры доказательств в нашей системе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11 (Логическое следование в PLTL$_{ND}$). PLTL$_{ND}$-формула $\mathcal{A}$ логически следует из множества PLTL$_{ND}$-формул Γ, символически $\Gamma \models_{ND} \mathcal{A}$, если имеет место следующее:

1. Все элементы из Γ и PLTL$_{ND}$-формула $\mathcal{A}$ имеют вид $i : C$ (для некоторой PLTL формулы C и $i \in Lab$) и префиксированы одинаковым индексом,

2. Для всякого отображения f^σ и всякой модели σ, PLTL$_{ND}$-формула $\mathcal{A}$ реализуема всякий раз, когда реализуемо множество Γ.

4 Метатеоретические свойства

Данный параграф посвящен рассмотрению метатеоретических свойств нашей системы НВ. Мы показываем, что система является семантически непротиворечивой и полной.

4.1 Семантическая непротиворечивость

Прежде всего докажем лемму, необходимую для доказательства теоремы о непротиворечивости.

ЛЕММА 12. *Допустим, что нам даны следующие условия:*

- $\mathfrak{D}$ *есть вывод* $PLTL_{ND}$*-формулы* $\mathcal{B}$ *из множества* $PLTL_{ND}$*-формул* Γ
- $\Phi_m \subseteq \mathfrak{D}$ *есть объединение* Γ *и множества неисключенных допущений* Θ_m*, содержащихся в* $\mathfrak{D}$ *на некотором шаге* m.
- Λ_m *есть множество* $PLTL_{ND}$*-формул* $\mathfrak{D}$ *на шаге* m *такое, что для всякой* C*, если* $C \in \Lambda_m$*, то она получена применением одного из правил вывода, и* Δ *есть заключение* $PLTL_{ND}$*-правила, примененного на шаге* $m + 1$.

- Φ_{m+1} *состоит из множества* Γ *и всех неисключенных после применения правила допущений из* Θ_m*;* Λ_{m+1} *состоит из неисключенных членов* Λ_m *и элементов множества* Δ.

Тогда для всяких f^σ *и* σ*, если* Φ_{m+1} *реализуемо в модели* σ *при отображении* f^σ*, то* Λ_{m+1} *также реализуемо в* σ *при* f^σ.

Доказательство. Доказательство леммы ведется по числу применений PLTL_{ND}-правил в выводе. Предполагая, что утверждение леммы верно для некоторого числа n ($n \in \mathbb{N}$) применений PLTL_{ND}-правил в выводе $\mathfrak{D}$, мы должны показать, что утверждение справедливо и для $n+1$. В качестве базиса рассмотрим случай, когда ни одно из правил вывода не применялось и $B \in \Phi_0$. Понятно, что множество Λ_0 пусто и, следовательно, реализуемо в любой модели σ при любом отображении f^σ. Таким образом, для этого случая утверждение леммы доказывается тривиально. Теперь допустим, что в выводе сделано m применений правил. Рассмотрим $m+1$-е применение.

Случай $\Rightarrow_\text{В}$. Предположим, что $x : B$ есть некоторая PLTL_{ND}-формула в выводе и $x : A$ есть последняя посылка, содержащаяся в множестве Φ_m. Применение правила $\Rightarrow_\text{В}$ приводит к появлению PLTL_{ND}-формулы $x : A \Rightarrow B$ в $\mathfrak{D}$. Для доказательства леммы потребуется рассмотреть несколько подслучаев, в зависимости от того, в какой части доказательства помещается $x : B$, и какова структура всего доказательства.

Подслучай 1. $x : B \in \Lambda_m$ и множество Φ_m образует начальный отрезок $\mathfrak{D}$, состоящий из всех элементов Γ, за которыми непосредственно следуют все элементы из Θ_m. После применения правила $\Rightarrow_\text{В}$ получаем $x : A \Rightarrow B$ на $m+1$-м шаге вывода, $\Phi_{m+1} = \Phi_m - \{x : A\}$ (поскольку $x : A$ есть последняя неисключенная посылка), $\Lambda_{m+1} = \Delta = \{x : A \Rightarrow B\}$ (поскольку все PLTL_{ND}-формулы вывода, начиная с последней неисключенной посылки и до результата применения правила, исключаются). Таким образом, необходимо показать, что $\{x : A \Rightarrow B\}$ реализуемо в любой модели σ при любом отображении f^σ, при условии реализуемости Φ_{m+1}. Заметим, что если некоторая модель, при некотором отображении реализует Φ_{m+1}, но опровергает формулу A, то эта модель реализует множество $\{x : A \Rightarrow B\}$ по условию истинности импликации. Допустим, что в какой-то произвольно взятой модели σ', при некотором отображении $f^{\sigma'}$, Φ_{m+1} и $\{x : A\}$ реализуемы. Заметим, что объединение этих двух множеств есть множество Φ_m. По допущению индукции известно, что реализуемость Φ_m влечет реализуемость Λ. Но $x : B \in \Lambda$, откуда $\{x : A \Rightarrow B\}$ реализуемо.

Подслучай 2. $x : B \in \Lambda$, но некоторые элементы из Θ_m появляются в выводе после какого-то числа применений PLTL_{ND}-правил. Теперь множество Λ_{m+1} может содержать элементы помимо $\{x : A \Rightarrow B\}$. Наиболее трудная часть доказательства связана со случаем, когда некоторая модель, например σ', при некотором отображении $f^{\sigma'}$, реализует множество Φ_{m+1}, но не реализует $\{x : A\}$. Как и в предыдущем случае, известно, что σ' реализует $\{x : A \Rightarrow B\}$, но встает вопрос о реализуемости оставшейся части множества Λ_{m+1}. Обозначим $\Lambda_{m+1} - \{x : A \Rightarrow B\}$ через Λ^*_{m+1}. Здесь необходимо обратиться к структуре вывода. Пусть Φ^p_{m+1} есть подмножество Φ_{m+1}, состоящее из всех посылок и допущений, предшествующих формулам Λ^*_{m+1} в выводе. По предположению, какие-то применения правил осуществлялись после того, как все элементы Λ^*_{m+1} появились в выводе. По допущению индукции, реализуемость Φ^p_{m+1} влечет реализуемость Λ^*_{m+1}. Допустим, что Λ^*_{m+1} нереализуемо в σ' при отображении $f^{\sigma'}$. Тогда множество Φ^p_{m+1}также нереализуемо. Но $\Phi^p_{m+1} \subseteq \Phi_{m+1}$ и Φ_{m+1} реализуемо в σ', что приводит к противоречию. Случай, когда Φ_{m+1} и $\{x : A\}$ оба реализуемы в σ', непосредственно следует из допущения индукции.

Подслучай 3. Допустим, что $x : B \in \Phi_m$. В этом случае после применения правила $\Rightarrow_\text{В}$ получаем, что $\Phi_{m+1} = \Phi_m \cup \{x : B\}$, Λ_{m+1} есть $\{x : A \Rightarrow B\} \cup \Lambda^*_{m+1}$, где $\Lambda^*_{m+1} \subset \Lambda_{m+1}$. Для доказательства применяются рассуждения, аналогичные приведенным в предыдущих подслучаях.

Случай $\Box_\text{В}$. Допустим, что для некоторой PLTL-формулы A и индекса y, $y : A$ содержится в $\mathfrak{D}$ после m применений PLTL_{ND}-правил, а также что в выводе имеется реляционное суждение $x \preceq y$, являющееся последней неисключенной посылкой. Применение правила $\Box_\text{В}$ приводит к появлению в выводе PLTL_{ND}-формулы $x : \Box A$. Как и в случае $\Rightarrow_\text{В}$, требуется рассмотреть ряд подслучаев, зависящих от расположения PLTL_{ND}-формулы $x : \Box A$ в $\mathfrak{D}$.

Подслучай 1. $x : \Box A \in \Lambda_m$ и после применения правила имеем $\Phi_{m+1} = \Phi_m - \{x \preceq y\}$ и $\Lambda_{m+1} = \Delta\{x : \Box A\}$. По допущению индукции, если множество Φ_m реализуемо в модели σ при отображении f^σ, то реализуемо и Λ_m. Допустим, что множество Φ_{m+1} реализуемо в модели σ при отображении f_1^σ, где $f_1^\sigma = f^\sigma - \{\langle y, f^\sigma(y)\rangle\}$. Необходимо показать, что тогда реализуемо и множество Λ_{m+1}, то есть $\langle \sigma, f_1^\sigma(x)\rangle \models \Box A$. Пусть существует такой элемент j в σ, что $f_1^\sigma(x) \leq j$. Расширим отображение f_1^σ до f^σ таким образом, что $f^\sigma(y) = j$. Тогда при таком отображении в модели σ реализуемо множество Φ_m, а значит и Λ_m. Но $y : A \in \Lambda_m$, откуда $\langle \sigma, f^\sigma(y)\rangle \models A$, то есть $j \models A$.

Подслучаи 2 и 3 рассматриваются аналогично с учетом структуры вывода, как это было сделано для правила $\Rightarrow_B$.

Также аналогично доказываются случаи применения других правил. Q.E.D.

ТЕОРЕМА 13 (Непротиворечивость PLTL$_{ND}$).
Пусть $\mathfrak{D} = \langle \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_k\rangle$ *есть вывод PLTL$_{ND}$-формулы $\mathcal{B}$ из множества посылок* Γ. *Тогда* $\Gamma \models_{ND} B$.

Доказательство. Согласно определению 10, PLTL$_{ND}$-формула $\mathcal{A}_k$ имеет вид $x : B$, для некоторого индекса x. В общем случае $x : B$ принадлежит некоторому множеству Λ неисключенных PLTL$_{ND}$ формул вывода. Заметим, что множество неисключенных посылок пусто. Тогда, согласно лемме 12, реализуемость Γ влечет реализуемость Λ. В частности, если множество Γ пусто, то оно реализуемо в любой модели σ при любом отображении f^σ, по определению 7. Следовательно, Λ также реализуемо в любой модели σ при любом отображении f^σ. Таким образом, любая формула, принадлежащая Λ, общезначима. В частности, $x : B$ общезначима. Q.E.D.

4.2 Семантическая полнота

Семантическая полнота нашей системы следует из того факта, что в ней доказуемы все теоремы, доказуемые в следующей формулировке аксиоматики PLTL [3, 6].

Схемы аксиом для PLTL.

$A1.$ Схемы для классической пропозициональной логики
$A2.$ $\Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Box B)$
$A3.$ $\bigcirc\neg A \Rightarrow \neg\bigcirc A$
$A4.$ $\neg\bigcirc A \Rightarrow \bigcirc\neg A$
$A5.$ $\bigcirc(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\bigcirc A \Rightarrow \bigcirc B)$
$A6.$ $\Box A \Rightarrow A \wedge \bigcirc\Box A$
$A7.$ $\Box(A \Rightarrow \bigcirc A) \Rightarrow (A \Rightarrow \Box A)$
$A8.$ $(A\,\mathcal{U}\,B) \Rightarrow \Diamond B$
$A9.$ $(A\,\mathcal{U}\,B) \Rightarrow (B \vee (A \wedge \bigcirc(A\,\mathcal{U}\,B)))$
$A10.$ $(B \vee (A \wedge \bigcirc(A\,\mathcal{U}\,B))) \Rightarrow (A\,\mathcal{U}\,B)$

Правила вывода:

Генерализация $\dfrac{\vdash A}{\vdash \Box A}$ Модус поненс $\dfrac{\vdash A, \quad \vdash A \Rightarrow B}{\vdash B}$

Для доказательства семантической полноты нашей системы мы, во-первых, показываем, что все вышеуказанные аксиомы доказуемы в нашей системе и, во-вторых, что если посылки правил вывода для аксиоматической системы доказуемы в нашей системе, то заключения также доказуемы.

ЛЕММА 14. *Все частные случаи аксиом PLTL доказуемы в системе PLTL$_{ND}$.*

Доказательство. Случаи с пропозициональными аксиомами тривиальны: в силу полноты натурального вывода для классической логики любой такой частный случай аксиомы имеет доказательство, значит, теперь достаточно к каждой формуле этого доказательства добавить некоторый произвольный индекс.

Доказательства остальных аксиом приводятся в приложении. Q.E.D.

Доказательство следующей леммы, используемой в дальнейшем, может быть легко получено индукцией по длине PLTL$_{ND}$-формулы:

ЛЕММА 15. *Пусть $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ — это доказательство формулы B в системе PLTL$_{ND}$. Пусть B' получено из B подстановкой C' вместо некоторой ее подформулы C. Тогда последовательность $\mathcal{A}'_1, \mathcal{A}'_2, \ldots, \mathcal{A}'_n$, где любое вхождение C заменено на C', является доказательством B'.*

Таким образом, из леммы 15 и доказательств частных случаев аксиом PLTL мы получаем доказательство леммы 14.

ЛЕММА 16. *Если посылки правил вывода для аксиоматической системы доказуемая системе* PLTL_{ND}, *то и их заключения также доказуемы.*

Доказательство. Случай 1. Правило генерализации. Рассмотрим доказательство произвольно выбранной формулы A, и пусть x и y будут индексы, которые не встречаются в этом доказательстве. Теперь мы можем перестроить данное доказательство, начиная его с допущения $\neg\Box A$ (здесь мы специально используем метаформулы вместо формул PLTL_{ND}, что может быть легко обосновано при учете леммы 15):

1. $x : \neg\Box A$ посылка
2. $x : \Diamond\neg A$ $1, \neg\Box$ преобразование
3. $x \preceq y$ $2, \Diamond_{\text{и}}, \mapsto y, y \mapsto x$
4. $y : \neg A$ $2, \Diamond_{\text{и}}$

На этом шаге мы возвращаемся к искомому доказательству A, обращая внимание на то, что оно заканчивается формулой $z : A$ (отметим, что $z \neq x \neq y$). В этом доказательстве мы действуем следующим образом: заменяем любое вхождение индекса z на y. При этом полученная последовательность также является доказательством формулы A. Теперь новое доказательство (которое содержит, скажем, n шагов) мы записываем под шагами 1—4 и продолжаем его, получая следующую последовательность:

1. $x : \neg\Box A$ посылка
2. $x : \Diamond\neg A$ $1, \neg\Box$ преобразование
3. $x \preceq y$ $2, \Diamond_{\text{и}}, \mapsto y, y \mapsto x$
4. $y : \neg A$ $2, \Diamond_{\text{и}}$
5. (первая формула в доказательстве A)

...

...

...

$n+5$. $y : A$ (последняя формула в доказательстве A)

Шаги 4 и $n+5$ содержат противоречащие формулы. Значит, применимо правило $\neg_{\text{в}}$, и на шаге $n+6$ выводима формула $\neg\neg\Box A$. При этом все формулы, начиная с 1 и вплоть до n, исключаются. Формула $\Box A$ получается на следующем шаге

по правилу $\neg_{\text{и}}$. Полученная последовательность удовлетворяет всем условиям доказательства в нашей системе.

1. $x : \neg\Box A$	посылка
2. $x : \Diamond\neg A$	$1, \neg\Box$ преобразование
3. $x \preceq y$	$2, \Diamond_{\text{и}}, \mapsto y, y \mapsto x$
4. $y : \neg A$	$2, \Diamond_{\text{и}}$
5.	первая формула в доказательстве A
...	
...	
...	
$n+5$. $y : A$	последняя формула в доказательстве A
$n+6$. $\neg\neg\Box A$	$4, n+5, \neg_{\text{в}}, [1-(n+5)]$
$n+7$. $\Box A$	$\neg_{\text{и}}, n+6$

Случай 2. Правило модус поненс.Пусть доказательства для формул $A \Rightarrow B$ и A содержат соответственно n и m шагов. Для тех же формул несложно построить новые доказательства такие, что множества индексов в них не пересекаются. Пусть последней формулой доказательства формулы $A \Rightarrow B$ будет $x : A \Rightarrow B$. Доказательство формулы получается следующим образом:

1.	первая формула в доказательстве $A \Rightarrow B$
...	
...	
...	
n. $x : A \Rightarrow B$	последняя формула в доказательстве $A \Rightarrow B$

Теперь мы можем заменить индекс x, находящийся на последнем шаге доказательства A, и продолжить построение доказательства B следующим образом:

$n+1$.	первая формула в доказательстве A
...	
...	
...	
$n+m$. $x : A$	последняя формула в доказательстве A
$n+m+1$. $x : B$	$n, n+m, \Rightarrow_{\text{и}}$

Полученная последовательность удовлетворяет всем условиям доказательства в нашей системе. Q.E.D.

Теперь мы можем перейти к доказательству полноты системы временной логики PLTL_{ND}.

ТЕОРЕМА 17 (Семантическая полнота системы PLTL_{ND}). *Для любой формулы A системы $PLTL_{ND}$ верно, что если $\models_{ND} A$, то формула A доказуема.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную теорему A логики PLTL. Индукцией по n — длине вывода аксиоматического доказательства для A, мы теперь покажем, что A также доказуема в системе PLTL_{ND}.

Базисный случай. $n = 1$. В этом случае A — это один из частных случаев PLTL аксиом, и значит, базовый случай следует в силу леммы 14.

Индукционный шаг. Если утверждение теоремы 17 верно для доказательства длины m, $(1 \leq m \leq n)$, то оно также верно и для доказательства длины $m + 1$, $(1 \leq m \leq n)$.

Здесь формула на шаге $m + 1$ является или аксиомой, или получена из некоторых предыдущих формул, или по генерализации, или по модус поненс. Для этих случаев утверждение теоремы 17 следует из леммы 16.

Q.E.D.

5 Заключение

В настоящей статье для логики линейного времени предложена семантически непротиворечивая и полная система натурального вывода. Насколько известно авторам, единственной работой по данной проблеме является [7], которая основана на результатах [8]. В системе, предложенной Марчиньоли, многие правила вывода (например, $\vee_{\text{И}}, \Rightarrow_{\text{В}}, \neg_{\text{В}}$) являются непрямыми. Непрямое правило вывода предполагает построение дополнительного подвывода, гарантирующего наличие отношения логического следования между посылками и заключением. По нашему мнению, построение дополнительного подвывода приводит к усложнению вывода, затрудняя построение процедуры поиска вывода в системе. Поэтому для всех/некоторых связок приведены прямые правила вывода.

Темой будущих исследований может, в частности, стать вопрос о построении процедуры поиска вывода в нашей системе с использованием наработок [1], апробированных на классической и интуиционистской логиках. Еще одной темой будущих исследований может стать вопрос о сложности данного метода, а также обобщение этого метода на логику ветвящегося времени.

Литература

[1] *Болотов А.Е., Бочаров В.А., Горчаков А. А., Макаров В.В., Шангин В.О.* Пусть докажет компьютер. М.: Наука, 2004.

[2] *Gentzen G.* Investigation into Logical Deduction, The Collected Papers of Gerhard Gentzen. Amsterdam. North-Holland, 1969. P. 68–131.

[3] *Gabbay D., Phueli A., Shelah S., and Stavi J.* On the temporal analysis of fairness. // Proceedings of 7th ACM Symposium on Principles of Programming Languages. 1980. P. 163–173.

[4] *Fitch F.* Symbolic Logic. NY, Roland Press, 1952.

[5] *Quine W.* On natural deduction. // Journal of Symbolic Logic. V. 15. 1950. P. 93–102.

[6] *Fisher M., Dixon C., and Peim M.* Clausal Temporal Resolution. // ACM Transactions on Computational Logic (TOCL). V. 1. № 2. 2001. P. 12-56.

[7] *Marchignoli D.* Natural Deduction Systems for Temporal Logic. Department of Informatics, Unviersity of Pisa. 2002.

[8] *Simpson A.* The Proof Theory and Semantics of Intuitionistic Modal Logic. College of Science and Engineering, School of Informatics, University of Edinburgh, 1994.

Приложение

Здесь мы приводим доказательства всех аксиом системы PLTL в системе PLTL_{ND}.

Аксиома 2.

1.	$i: \Box(p \Rightarrow q)$	посылка
2.	$i: \Box p$	посылка
3.	$i \preceq j$	$\preceq$ посылка
4.	$j: p \Rightarrow q$	$1, 3, \Box_{\text{И}}$
5.	$j: p$	$2, 3\ \Box_{\text{И}}$
6.	$j: q$	$4, 5, \Rightarrow_{\text{И}}$
7.	$i: \Box q$	$3, 6, \Box_{\text{В}}$,
		$\mapsto j,\ j \mapsto i,\ [3-6]$
8.	$i: \Box p \Rightarrow \Box q$	$7, \Rightarrow_{\text{В}}, [2-7]$
9.	$i: \Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \Rightarrow \Box q)$	$8, \Rightarrow_{\text{В}}, [1-8]$

Аксиома 3

1.	$i\colon \bigcirc\neg p$	посылка
2.	$i'\colon \neg p$	$1, \bigcirc_{\text{И}}, i' \in M1$
3.	$i\colon \bigcirc p$	посылка
4.	$i'\colon p$	$3, \bigcirc_{\text{И}}$
5.	$i\colon \neg\bigcirc p$	$2, 4, \neg_{\text{В}}, [2\text{—}4]$
6.	$i\colon \bigcirc\neg p \Rightarrow \neg\bigcirc p$	$5, \Rightarrow_{\text{В}}, [1\text{—}5]$

Аксиома 4

1.	$i : \neg\bigcirc p$	посылка
2.	$i' : p$	посылка
3.	$Next(i, i')$	$\bigcirc$ сериальность
4.	$i : \bigcirc p$	$2, 3, \bigcirc_{\text{В}}$
5.	$i' : \neg p$	$1, 4, \neg_{\text{В}}, [2\text{—}4]$
6.	$i : \bigcirc\neg p$	$3, 5, \bigcirc_{\text{В}}$
7.	$i : \neg\bigcirc p \Rightarrow \bigcirc\neg p$	$5, \Rightarrow_{\text{В}}, [1\text{—}6]$

Аксиома 5.

1.	$i\colon \bigcirc(p \Rightarrow q)$	посылка
2.	$i\colon \bigcirc p$	посылка
3.	$i'\colon p \Rightarrow q$	$1, \bigcirc_{\text{И}}, i' \in M1$
4.	$i'\colon p$	$2, \bigcirc_{\text{И}}$
5.	$i'\colon q$	$3, 4, \Rightarrow_{\text{И}}$
6.	$Next(i, i')$	$\bigcirc$ сериальность
7.	$i\colon \bigcirc q$	$5, 6, \bigcirc_{\text{В}}$
8.	$i\colon \bigcirc p \Rightarrow \bigcirc q$	$7, \Rightarrow_{\text{В}}, [2\text{—}6]$
9.	$i\colon \bigcirc(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\bigcirc p \Rightarrow \bigcirc q)$	$8, \Rightarrow_{\text{В}}, [1\text{—}8]$

Аксиома 6.

1.	$i\colon \Box p$	посылка
2.	$i\colon \neg(p \wedge \bigcirc \Box p)$	посылка
3.	$i\colon \neg p \vee \neg\bigcirc \Box p$	классическая выводимость
4.	$i\colon p$	посылка
5.	$i\colon \neg p$	посылка
6.	$i\colon \neg\neg p$	$\neg_{\text{В}}$ 4, 5, [5]
7.	$i\colon \neg\bigcirc \Box p$	$\vee_{\text{И}}, 3, 6$
8.	$i\colon \bigcirc\neg \Box p$	в силу Аксиомы 3
9.	$Next(i, i')$	$\bigcirc$ сериальность
10.	$i'\colon \neg \Box p$	8, $\bigcirc_{\text{И}}$, $i' \in M1$
11.	$i'\colon \Diamond\neg p$	10, временная эквивален.
12.	$i' \preceq j$	11, $\Diamond_{\text{И}}$
13.	$j\colon \neg p$	11, $\Diamond_{\text{И}}$, $\mapsto j$, $j \mapsto i'$
14.	$i \preceq i'$	$9, \bigcirc / \preceq$
15.	$i \preceq j$	12, 14, $\preceq$ транзитивность
16.	$j\colon p$	1, 15 $\Box_{\text{И}}$
17.	$i\colon \neg p$	$\neg_{\text{В}}$, 13, 16, [4—16]
18.	$i \preceq i$	$\preceq$ рефлексивность
19.	$i\colon p$	1, 18, $\Box_{\text{И}}$
20.	$i\colon \neg\neg(p \wedge \bigcirc \Box p)$	$\neg_{\text{В}}$, 17, 19, [3—19]
21.	$i\colon p \wedge \bigcirc \Box p$	20, $\neg_{\text{И}}$
22.	$i\colon \Box p \Rightarrow p \wedge \bigcirc \Box p$	21, $\Rightarrow_{\text{В}}$, [1—21]