Зарубежные направления в философии математики и их преломление в философско-логической и историко-математической мысли России XVIII–начала XX века. (Продолжение)[1]

Б.В. Бирюков, З.А. Кузичева

12 Марксистские интерпретации «Введения» в учение о линейных протяженностях

Прежде чем приступить к изложению материала настоящего параграфа, мы вынуждены сделать несколько замечаний к статье В.А. Бажанова «Партия и логика. К истории одного судьбоносного постановления ЦК ВКП(б) 1946 года», опубликованной в «Логических исследованиях» (№ 12, 2005, с. 32–48).

В.А. Бажанов ошибочно указывает, что бывший работник НКВД А.И. Асеев в 1940 г. был назначен директором *Института философии* (с. 38). В действительности, он стал директором МИФЛИ (Московского института истории, философии и литературы). Далее, В.А. Бажанов написал о «деле Ю.А. Гастева», возникшего после выхода книги последнего «Гомоморфизмы и модели» (с. 45), не разобравшись в сути вопроса. Заметим, прежде всего, что он называет вторым редактором этой книги (наряду с Б.В. Бирюковым) В.С. Тюхтина, тогда как им был Ю.А. Шрейдер (держал ли В.А. в руках книгу Гастева?). Но самое досадное то, что В.А. Бажанов повторяет легенду, распространявшуюся самим Ю.А. Гастевым, о причине гонений на

[1]Работа подготовлена при поддержке Российского гуманитарного научного фонда, проект № 03-03-00096а, 05-03-03522а.

его труд. Не вдаваясь в детали, отметим, что причиной создания комиссии АН СССР, разбиравшей факт выхода «порочной» книги, и принятия соответствующего решения РИСО АН СССР было то, что в Предисловии к ней было упомянуто имя «диссидента» А.С. Есенина-Вольпина, находившегося уже за границей. *Никаких других* вопросов кроме этого комиссией и РИСО не поднималось (но и этот вопрос весьма показателен!) Председатель РИСО, вице-президент Академии наук П.Н. Федосеев, подписавший план, по которому была издана книга Гастева, не был заинтересован в раздувании этого дела. Все это В.А. Бажанов мог бы выяснить, просто сняв телефонную трубку.

Вернемся, однако, к научно-философской тематике. До сих пор мы занимались преимущественно логическими — даже историко-логическими — вопросами. Обратимся теперь к проблематике философско-математической. Из трех направлений, выкристаллизовавшихся в этой сфере: аксиоматической методологии, теоретико-множественной установке и генетического подхода — мы здесь уделим внимание главным образом последнему.

В 1913 г. под редакцией уже знакомого нам математика А.В. Васильева и выпускника Сорбонны П.С. Юшкевича стал выходить непериодический сборник «Новые идеи в математике». В его первом выпуске был опубликован перевод «Введения» в «Учение о линейной протяженности» Г. Грассмана [1, с. 78–95]. Примечательно, что переводчиком оказался социал-демократ и оппонент В.И. Ульянова-Ленина[2]. Видимо, в этом введении содержалось нечто, привлекавшее марксистскую мысль. Правда, разные марксисты по-разному вычитывали мудрость из философских строк Г. Грассмана.

Владимир Ильич помянул Г. Грассмана еще до публикации Васильева–Юшкевича. Речь идет о книжке «Материализм и эм-

[2]Павел Соломонович Юшкевич (1873–1945), уроженец Одессы, участник революционной борьбы против «царизма», отец упоминавшегося в первой части настоящей статьи Адольфа Павловича Юшкевича. После «ссылки» (в город Кишинев!) П.С. эмигрировал из России, и образование закончил во Франции, окончив Парижский университет. Участие в издании «Новых идей в математике» — светлая страница в его жизни, участие в спровоцированном большевиками «русском бунте, бессмысленном и беспощадном» (который он, по свидетельству И.А. Бунина в «Окаянных днях», оправдывал) составляет его теневую сторону. В советские годы П.С. отдал много сил переводам на русский язык философских классиков.

пириокритицизм», в которой ее автор, имея в виду «Учение о протяженностях», оценил взгляды Г. Грассмана как «материалистические». Материализм он усматривал в грассмановском утверждении о согласии мышления с бытием и согласованности процессов мысли друг с другом. Неужели невдомек было будущему «вождю мирового пролетариата» задаться простым вопросом: а не был ли Г. Грассман верующим? Утвердительный ответ на этот вопрос — а именно он является верным — обесценивал все ленинские рассуждения о грассмановском материализме.

В.Ф. Каган в своей большой энциклопедической статье, посвященной философским вопросам математики, в частности геометрии, дал идеям Г. Грассмана иную оценку [2, столб. 406–407]. Каган отмечает, что Г. Грассман подразделял все науки на «реальные» и «формальные», и что формальные науки, по Грассману, «имеют своим предметом то, что предложено самой человеческой мыслью, и истинность их заключается во взаимном согласии процессов нашего мышления». На этом основании Каган причисляет Г. Грассмана к родоначальникам *конвенционализма*, наряду с Фреге, Пеано и Пиери. Эта оценка — так же как приводимые Каганом и мало совместимые друг с другом имена — не намного убедительней ленинской.

Ни Ленин, ни Каган не отметили одну важную для марксизма черту философии математики Г. Грассмана — ее *диалектический* характер. Это было сделано — в конце 20-х годов прошлого века — С.А. Яновской. Мы имеем в виду ее статью о категории количества у Гегеля [3]. Она отмечает, что в конце первой половины XIX века, когда идеи Гегеля и его ближайших предшественников еще не считались столь «одиозными» у математиков, в этот период такой крупный математик, как Герман Грассман, например, писал: «Противоположность между дискретным и непрерывным (как и все истинные противоположности) — текучая, ибо дискретное может быть раскрываемо как непрерывное и, наоборот, непрерывное — как дискретное» [4]. Грассман понимал, продолжала Яновская, что отсюда вовсе не следует, что различие непрерывного и дискретного лишено смысла. «Будучи единством противоположностей, заключая в себе *момент* дискретности, непрерывное, однако, *положено* в форме непрерывности. Дискретность в нем содержится лишь в скрытой, неразвитой еще форме, именно, как момент. И наоборот, дискретное *положено* в форме дискретности, заключая в себе непрерывность лишь в зародыше, лишь как *момент.* Недостаточно поэтому сказать «все и непрерывно и дискретно», но в каждом отдельном случае необходимо выяснить, в какой именно форме предстоит перед нами нечто данное, в какой из них оно *положено.* В каждом отдельном случае мы имеем дело *или* с непрерывным, *или* с дискретным. Но это непрерывное содержит в себе момент дискретности, а дискретное — момент непрерывности. Так, *относительно* непрерывная *эволюция* в действительности тоже содержит в себе множество разрывов, а дискретный *скачок* при ближайшем анализе сам выступает, как непрерывная величина. Задача исследователя состоит, однако, не в том, чтобы все *свести только* к дискретности или только к непрерывности, но чтобы в *каждом отдельном случае* подчеркнуть *существенный* для него момент» [3, с. 55–56].

Далее Яновская пишет, что для Грассмана была ясной эта черта гегелевской трактовки единства противоположностей, и в подтверждение своей мысли цитирует из его текста другое место, относящееся, правда, не к противоположению дискретного и непрерывного, а равного и различного: «Противоположность между равным и различным, — пишет он [Г. Грассман], — тоже текучая. Равное различно, поскольку уже то или иное, равное ему, каким-нибудь образом обособлено (ведь без этого обособления оно было бы только одним, значит — не было бы равного); различное — равно, хотя бы постольку, поскольку различные объекты связываются между собою относящеюся к ним деятельностью, т.е. поскольку они являются чем-то связанным. *Но это не значит, что оба момента теряются друг в друге*, так что нужен масштаб для определения того, сколько следует признать равного и сколько различного между обоими представлениями. Хотя с равным и связано всегда каким-нибудь образом различное, и наоборот, но все-таки в *каждом отдельном случае лишь одно из них является моментом рассмотрения, между тем как другое представляет лишь предпосылку и основу первого* (Курсив мой. — *С.Я.*)» [3, с. 56].

Эти высказывания и оценки С.А. Яновской нуждаются в пояснении. Когда она говорит об «одиозности» для математиков гегелевской диалектики, она имеет в виду утрату гегельянством своего первоначального обаяния. Математики склонны были признавать не гегелевский, а кантовский взгляд на их науку, а после появления неевклидовых геометрий и Кант во многом утратил у них кредит. Далее, С.А. ошибается, однозначно связывая диалектические идеи Германа Грассмана с именем Гегеля. Диалектике братья Грассманы учились не у автора «Науки логики» и «Феноменологии духа», а у Шлейермахера, основоположника герменевтики. А слишком уж «текучие» грассмановские рассуждения о равном и различном Яновская впоследствии отвергла, и в ее статьях «Количество в математике» и «Равенство (в логике и математике)» [5] мы не найдем ссылок ни на Гегеля, ни на Г. Грассмана. Другое дело — диалектика дискретного и непрерывного. Ее *С.А.* осмысливала в связи с развитием кибернетики и цифровой вычислительной техники. Например, в предисловии к русскому переводу книжки А. Тьюринга и Дж. фон Неймана она писала о познании непрерывного с помощью дискретного и обращала внимание на идею фон Неймана, который связывал прогресс логики с использованием такого аппарата, который является гораздо менее комбинаторным (то есть менее дискретным), чем используемый в настоящее время, и «гораздо более близким к математическому анализу, имеющему дело с непрерывностью» [6]. Мы знаем теперь, что разработки разного рода «непрерывностных логик» впоследствии получили значительное развитие (хотя и не привели к тому прогрессу в формализации мышления, к которому стремились и Тьюринг, и Нейман).

Не упоминая Г. Грассмана в своих последующих работах, С.А. Яновская фактически придавала современную форму его идеям.

13 И.И. Жегалкин: трансфинитные числа и арифметика «четного и нечетного»

У истоков математической логики в России XX столетия стоит И.И. Жегалкин[3], продолжавший традицию, начало которой

[3]Иван Иванович Жегалкин (1869–1947) — российский (советский) математик и логик, в 1902–1911 гг. — приват-доцент Московского университета; в советское время — доктор физико-математических наук, профессор МГУ.

положил Порецкий. Он был первым в СССР собственно математическим логиком. В частности, он явился создателем и руководителем (совместно с П.С. Новиковым и С.А. Яновской) научно-исследовательского семинара по математической логике в МГУ.

И.И. Жегалкину принадлежит первая в России монография, посвященная учению о множествах Г. Кантора — «Трансфинитные числа» [7]. Одна из характерных особенностей его подхода состояла в том, что он начинает с определения понятия *конечного* множества и на его основе вводит понятие *бесконечного* множества. Это выглядит так.

Установив понятие упорядоченного множества, Жегалкин переходит к понятию *вполне* упорядоченного множества, определяя его как такое упорядоченное множество, всякая часть которого имеет первый элемент. Далее, опираясь на теорему Цермело, согласно которой всякое непустое упорядоченное множество может быть вполне упорядочено, он определяет: «Конечным множеством называется вполне упорядоченное множество, всякая часть которого, а, следовательно, и оно само, имеет последний элемент», или также: «Конечное множество есть такое упорядоченное множество, всякая часть которого имеет первый и последний элемент», поясняя, что термин «часть» употребляется им «в широком смысле»; теперь бы мы вместо «части» сказали «подмножество». Множество, которое не может быть так упорядочено, чтобы каждое его подмножество имело первый и последний элемент, называется *бесконечным*. Определяющим свойством бесконечного множества является наличие у него собственного подмножества, равномощного самому множеству [7, с. 178, 203 и др.].

По-видимому, И.И. Жегалкин считал понятие конечного множества интуитивно более ясным, чем понятие бесконечного множества. Кроме того, определение конечного множества как такого, которое не является бесконечным, не представлялось ему логически безупречным. Поэтому построение теории множеств И.И. начал именно с него. Теперь мы знаем, что интуиция здесь подводит, так как и в понятии конечного множества таятся свои трудности.

Спустя двадцать лет, в 1927 г., Жегалкин опубликовал статью «О технике вычислений предложений в символической логике», в начале которой писал: «Настоящую работу, по ее содержанию, можно рассматривать как дополнение к капитальному труду Whitehead and Russell — “Principia Mathematica”». И далее: «Метод авторов “Principia Mathematica” — непрерывная цепь следующих друг за другом теорем. Давая верные результаты, этот метод не содержит никаких указаний, как надо поступать, чтобы получить не только верные результаты, но и ответы на поставленные вопросы. Если взять из “Principia Mathematica” на выбор любое доказанное предложение и предложить комунибудь доказать его, то наша просьба едва ли будет выполнена.

Однако можно, что и является целью этой работы, усовершенствовать технику вычисления предложений так, что получается возможность, *механически применяя раз навсегда установленные правила, убедиться простым вычислением* в истинности или ложности всякого произвольно взятого элементарного предложения» [8, с. 9].

Истинность и ложность предложения, о которых здесь говорится, — это тождественная истинность и тождественная ложность, то есть, соответственно, доказуемость предложения (формулы пропозиционального исчисления) из пустого множества посылок и опровержимость, то есть доказуемость из пустого множества посылок отрицания предложения (формулы упомянутого исчисления).

Жегалкин строит исчисление высказываний, в котором заглавные буквы латинского алфавита, например $P, Q, \ldots$ — символы предложений, а соответствующие строчные буквы $p, q, \ldots$— их истинностные значения, пробегающие множество $\{0, 1\}$. Он пишет далее: «будем числовое значение предложения принимать равным нулю, если предложение ложно, и равным единице, если оно истинно» [8, с. 10]. Над истинностными значениями определены операции сложения и умножения, задаваемые следующим образом:

$$0+0 = 0;\ 0+1 = 1+0 = 1;\ 1+1 = 0;\ 0\cdot0 = 0;\ 0\cdot1 = 1\cdot0 = 0;\ 1\cdot1 = 1.$$

Пусть p обозначает любое из чисел $0, 1$. Тогда, используя приведенные выше свойства сложения и умножения, получаем: $0 + p = p$; $0 \cdot p = 0$; $1 \cdot p = p$; $p + p = 0$; $p \cdot p = p$. Если теперь определить разность истинностных значений предложений P и

Q как такое $r = p - q$, что $r + q = p$, то, прибавляя q к обеим частям последнего равенства, получаем $r = p + q$, $p + q = r = p - q$. А это значит, что вычитание совпадает со сложением. В теоретико-множественном смысле умножение и сложение Жегалкина соответствуют пересечению и симметрической разности, которая обратна самой себе. Операции дизъюнкции и отрицания (в теоретико-множественном смысле — объединение множеств и взятие дополнения к множеству до универсального множества) — они составляют базис пропозициональной логики в построениях Уайтхеда и Рассела — получают у Жегалкина, соответственно, следующее представление:

$$p \vee q = p \cdot q + p + q \ \text{ и } \ \neg p = p + 1.$$

Использованный Жегалкиным базис операций $\{+, \cdot, 1\}$ был функционально полон, а построенное на его основе исчисление изоморфно кольцу вычетов по модулю два, то есть «пифагорейской» арифметике четного и нечетного. В системе Жегалкина сложение и умножение ассоциативны и дистрибутивны, а умножение идемпотентно. Поэтому приведение формул пропозициональной логики к каноническому виду — логическому многочлену Жегалкина — производится очень просто. Оно сводится к раскрытию скобок и приведению подобных. В результате любая формула, представленная на языке Жегалкина, предстает в виде суммы произведений переменных, включая произведения, состоящие из одиночных букв и константы 1; при этом любое четное число одинаковых слагаемых взаимно уничтожается, а любое нечетное их число сводится к одному слагаемому. Пусть, например,

$$f = (x + y)(x + z) + y(z + x).$$

Нетрудно убедиться, что многочлен Жегалкина для f имеет вид: $f = x + yz$.

Логический многочлен Жегалкина для произвольной пропозициональной формулы F, содержащий переменные $p_1, p_2, \ldots p_n$, линеен относительно каждой из них и представляет F однозначно. Проблема разрешения, поэтому, сводится к выяснению того, равна или нет единице формула F. Как отмечала С.А. Яновская, заявка на работу, в которой пропозициональная логика строилась в виде алгебраического кольца, была сделана только спустя почти двадцать лет (в 1946 г.) Правда, при этом было осуществлено построение, двойственное тому, что осуществил Жегалкин: вместо строгой дизъюнкции использовалась эквиваленция, а вместо конъюнкции — (неразделительная) дизъюнкция.

Вслед за статьей 1927 г. И.И. Жегалкин опубликовал серию работ [9], развивавших описанный выше подход. Он распространил его на логику одноместных предикатов и получил для нее решение проблемы разрешения. Он рассмотрел также некоторые частные случаи узкого исчисления предикатов (не обязательно одноместных) и нашел решения проблемы разрешения на конечных классах. Заметим, что в 1950 г. Б.А. Трахтенброт доказал неразрешимость проблемы разрешения для общего случая.

Стоит заметить, что общелогическое содержание того, чем занимался Иван Иванович, — и прежде всего проблема формализации логического следования — в явной форме им не раскрывалось. Но, как отмечается в литературе [10], всякий знающий логик его времени понимал: чтобы показать, что некоторое следствие F выводимо из посылок $F_1, F_2, \dots F_n$, достаточно образовать импликативную формулу, антецедентом которой является конъюнкция посылок, а консеквентом — данное следствие, построить для этой формулы многочлен Жегалкина и показать, что он равен единице.

Ирония судьбы: Иван Иванович при «царизме» мог совершить смелый, как тогда считалось, поступок — покинуть Московский университет в знак протеста против «реакционной» политики министра народного просвещения Кассо[4], а в советское время он не только не решался рассматривать философское содержание логики. Не решался он даже прямо сказать, что занимается этой наукой как таковой, а не только «символической» логикой. Сфера логического была тогда небезопасной областью знания, так как логику в ту пору отождествляли с «формальной логикой», наукой «метафизической» и потому подозрительной с идеологической точки зрения.

[4]Л.А. Кассо занимал этот пост в 1910–1914 гг., и в советских справочниках можно прочитать, что он преследовал «прогрессивную профессуру и революционное студенчество».

Известно, что И.И. готовил учебник логики, но рукопись его не сохранилась. Это очень похоже на судьбу книги А.В. Васильева ...

14 Три направления в философии математики. Первый опыт построения рекурсивной арифметики

Известно, что математика, математическая логика, ряд разделов физики (прежде всего классическая механика), некоторые применения математики и информатики в сфере гуманитарных наук (в их числе структурная и математическая лингвистика), — словом, то, что можно назвать дедуктивным знанием, — используют ныне самые многообразные методы. На первое место среди них, пожалуй, следует поставить построение аксиоматических систем, предполагающих всегда те или иные интерпретации. К аксиоматизации естественным образом оказывается «привязанным» аппарат логического вывода, а также эвристические приемы анализа и синтеза, к которым прибегают и при формулировке требующихся аксиом, и при поиске нужных интерпретаций. В качестве более общего подхода следует назвать формализацию содержания и идеализацию понятий — то и другое идет рука об руку и приводит к соответствующим структурам абстрактных объектов. Однако на протяжении всей истории дедуктивного знания в нем — с той или иной мерой четкости — присутствовали: теоретико-множественный подход (первоначально в виде логики объемов понятий) и генетический метод. Сущность последнего заключается в порождении объектов по определенным правилам и в последующем их исследовании — в частности, с помощью указанных выше «альтернативных» методов и приемов.

Хотя и аксиоматизация, и генетическая установка, и оперирование с классами (множествами) как объемами понятий проходят через всю историю математики и логики, не все они в равной мере удостаивались внимания со стороны математического философствования. В наибольшей мере осмыслялись аксиоматизация и учение о множествах — особенно с тех пор, как Г. Кантор разработал свое учение о множествах, и оно было сочтено базой всей математики. Между тем генетическая методология —

и связанный с ней стиль мышления — может гордиться такими именами, как Евклид, Декарт, Паскаль, Лейбниц, как Пуанкаре, Брауэр и Г. Вейль, да и Георг Кантор тоже, так как его актуальные бесконечности мыслятся генетически порождаемыми. А в России в этом контексте надо назвать Лузина, представителя так называемого эффективизма — концепции, предварявшей появление математического и логического конструктивизма: выдвигалось требование конструктивного осмысления континуума без ясной идеи конструктивности используемых методов[5]. Таковая оформилась только после создания теории алгорифмов.

Начиная с третьего десятилетия прошлого века, генетическая методология привела к конструктивистской концепции в философии математики и методологии науки. В нашем отечестве эту концепцию представляла, прежде всего, школа А.А. Маркова, хотя в менее «жестком» варианте она присутствовала и в математической «классике», например, у А.Н. Колмогорова. В последующем развитии генетическая концепция слилась с теорией алгорифмов, языками программирования и компьютерной наукой и практикой.

В течение длительного времени в философско-математических и логико-методологических работах акцентировались, прежде всего, аксиоматика и теоретико-множественная установка; в России последняя была представлена трудом И.И. Жегалкина «Трансфинитные числа». Что касается генетического подхода — не забудем, что представление о нем получило известность благодаря Д. Гильберту, — то в «докибернетическую» эру он как бы оставался в тени. И это при том, что, начиная с последней трети XIX столетия, в математике и логике подход этот взаимодействовал с аксиоматическим и теоретико-множественным стилями мышления, обогащая математико-логическое видение мира.

Недооценка генетического подхода приводила к вполне конкретным философско-математическим и историко-математическим упущениям, когда, например, из поля зрения исследователей выпадали определенные стороны творчества Лейбница и

[5]Термин «эффективизм» обычно связывают с французской школой теории множеств и функций (Борель, Лебег, Бэр и др.), установки которой принял и развивал Н.Н. Лузин. См. [11].

Паскаля, не усматривалась внутренняя связь идей Пуанкаре, Сколема, Г. Вейля, Лузина. Это суживало представления об идейных линиях, приведших к теории алгорифмов — абстрактной и прикладной, к уяснению логических основ обработки информации. Не случайно при разработке языков программирования обращение к математической логике произошло с большим запозданием.

Генетическая концепция построения строгой науки в четкой форме и на прочном алгебраическом фундаменте впервые была явлена в творчестве Германа Грассмана: именно от него отталкивался А.Н. Уайтхед в своем известном «Трактате об универсальной алгебре» (1898). В развернутом виде, но без учета наследия Г. Грассмана и «учения о величинах» его брата Роберта, концепция эта обрела новую жизнь в «рекуррентном способе мышления» Т. Сколема (1923). От его результатов прямой путь вел к теории алгорифмов...

Первым опытом осмысления в отечественной литературе генетического подхода к основаниям математики, представленного в «Учебнике арифметики» Г. Грассмана (1861), можно считать работу В.Ф. Кагана, о который речь пойдет ниже. Для этого, однако, нам придется предварительно остановиться на грассмановском построении[6]. Говоря современным языком, оно было основано на индуктивном порождении системы величин, на которой задавались некоторые операции. Заметим, что подобный метод впоследствии получил у Г. Вейля (следовавшего, впрочем, примеру А. Пуанкаре) название метода итерации[7].

Г. Грассман начинает с того, что строит систему величин, названную им основным рядом. Члены системы порождаются из единственного элемента — «положительной единичности» (он обозначается буквой e) — посредством прибавления к уже построенным величинам либо элемента e, либо «отрицательной единичности», $-e$. В результате получается потенциально бесконечная линейно упорядоченная система

$$\ldots, e + -e + -e + -e, e + -e + -e, e + -e, e, e + e, e + e + e, \ldots;$$

[6] Мы будем следовать при этом тому конспективному изложению, которое представлено в тезисах [12].

[7] Впрочем, метод этот, обогащенный за счет логики предикатов, был несравненно более мощным и пригодным для обоснования анализа.

величина $e + -e$ именуется нулем и обозначается обычным знаком 0. Естественно принять, что в этой системе каждый ее член отличен от всех остальных, и тогда она получает наименование «основного ряда»[8]. Предполагается, разумеется, что в нашем распоряжении имеется неограниченно много «положительных единичностей».

Положительная единичность e и следующие за ней члены — результат итерации операции сложения элементов e — образуют положительную часть основного ряда. Члены, предшествующие элементу e, составляют неположительную часть основного ряда; каждый член в этой части основного ряда представляет собой сумму, складывающуюся из элемента e и одной или более отрицательных единичностей.

На основном ряде рекурсивно определяется бинарная операция сложения; при этом используются операции «порождения непосредственно последующего» и «непосредственно предшествующего» члена ряда (при произвольной величине a в роли параметра); эти операции вытекают из построения основного ряда. При вычислении сумм, каковыми являются члены основного ряда, используется отношение равенства, основывающееся на графической одинаковости величин. Величины, таким образом, оказываются, говоря современным языком, словами (определенного вида) в алфавите знаков

$$e, +, -,$$

что приводит к тому, что отношение равенства (соответственно неравенства) величин сводится к отношению их графической одинаковости/неодинаковости.

Не станем прослеживать дальнейшие детали теории основного ряда. То, что следует отметить, так это способ перехода от основного ряда к ряду целых чисел. Совершается он, когда рекурсивно определяется операция умножения, причем «единичность», e, заменяется «единицей» (Eins), 1; основной ряд становится «числовым» (линейно упорядоченным множеством всех целых чисел) в результате определения: $a \cdot 1 = a$ и установления

[8]Вместо *ряда* здесь было бы более уместно говорить *последовательность*, но мы будем придерживаться уже сложившейся терминологии.

того, что числовой ряд — это такой основной ряд, единичность которого есть 1.

Для чего же основной ряд строится как в некотором смысле предшествующий числовому? Ответ: для того чтобы ввести именованные числа как величины основного ряда, множество которых изоморфно числовому ряду относительно сложения и вычитания. При этом известные свойства операции сложения (в частности ассоциативность и коммутативность) и вычитания доказываются относительно величин основного ряда в его общем виде, дистрибутивность же умножения относительно операций «+» и «−» вводится уже в предположении числового ряда. Это и понятно: перемножение именованных чисел выводит за пределы основного ряда (аналогично тому как в грассмановском «учении о протяженностях» перемножение направленных отрезков порождает ориентированную площадку — объект 2-го порядка).

15 Отечественная наука о грассмановской арифметике

В России в 20-е годы грассмановской арифметикой *целых чисел* занялся В.Ф. Каган. Заметим, что его интерес к обоснованию теории чисел не был случаен — он был связан с его исследованиями в области оснований геометрии. По-видимому, В.Ф. собирался, так сказать, перебросить мост между арифметикой и геометрией. В связи с этим стоит обратить внимание на то, что знаменитые «Principia Mathematica» Уайтхеда и Рассела были задуманы как четырехтомник, но последний том — он должен был быть посвящен геометрии и написан Уайтхедом — так и не вышел за смертью последнего.

В упоминавшейся выше большой энциклопедической статье (144 столбца!) Каган дважды обращается к обоснованию арифметики. Сначала он выделяет в построении Грассмана часть, касающуюся натуральных (целых неотрицательных) чисел и лишь потом переходит к целым числам; он, таким образом, идет путем, который противоположен оригиналу. Но основные черты грассмановского построения теории целых чисел он формулирует аккуратно. Для нас особенно интересно, что В.Ф. четко выявляет особенности конструкции грассмановской арифметики. Это — истолкование чисел как знаков определенного вида — слов в фиксированном алфавите; порождение чисел с помощью операции взятия непосредственно следующего числа в (бесконечном) числовом ряду; взаимнооднозначность соответствия между любым числом и числом, которое за ним непосредственно следует (свойство, вытекающее из процесса построения числовой системы); попарное различие всех чисел-слов; рекурсивный характер определения основных операций и индуктивный (в смысле «совершенной индукции») характер доказательств теорем; систематическое использование явных («номинальных», как говорят ныне) определений. «Грассман, — пишет В.Ф. Каган, — не только обнаружил, что в арифметике натурального ряда все доказательства могут быть проведены методом совершенной индукции, но и показал, что все основные определения могут быть установлены таким же путем» [2, столб.413], то есть рекурсивно.

Примечательной чертой кагановского изложения концепции Г. Грассмана было то, что в нем была показана логическая роль явных определений, а также того, что ныне называют определенными дескрипциями, то есть выражений, вводимых с помощью оператора «тот, который». Основание, на котором покоятся определенные дескрипции, Каган называет «принципом свободного обозначения» и поясняет его так: «если мы вводим новый символ, или термин, который раньше не имел никакого значения, то мы можем условиться разуметь под этим символом, или термином, любой ранее установленный объект» [2, столб. 413].

Каган утверждает, что на этом принципе и на «законе совершенной индукции» основана вся арифметика. Здесь уместно отметить, что кагановский «принцип свободного обозначения» был явно указан Т. Сколемом в работе 1923 г. в качестве одного из необходимых логических средств построения примитивно-рекурсивной арифметики. В «Учебнике» Г. Грассмана этот принцип применяется, например, когда вводится операция вычитания.

Следует иметь в виду, что энциклопедическая статья В.Ф. Кагана не была работой историко-математического (и тем более историко-логического) жанра. Автор, судя по всему, уяснял проблему для самого себя. Если рассматривать работу Кагана как реконструкцию грассмановской теории чисел, то в глаза бросаются допущенные В.Ф. неточности. Так, не соответствует исторической правде утверждение, будто у Г. Грассмана теория натуральных чисел выступает как особая конструкция. На деле она включена в теорию «основного ряда» и арифметику целых чисел. Рассмотрения, характеристичные именно для натуральных чисел, появляются в конструкции Г. Грассмана *после* построения основного ряда, ряда целых чисел и основных операций, определяемых для этих рядов. У Кагана (раздел 20 — «Арифметика Грассмана») дело преподносится так, будто у немецкого математика теория натуральных чисел предшествует теории чисел целых[9]. Реконструируя грассмановскую теорию натуральных чисел, В.Ф. Каган ведет рекурсию, начиная с нуля. У Г. Грассмана же рекурсивные процедуры ведутся по правой части «основного ряда» (а потом — ряда целых чисел), начинающейся с единичности «e» (и по левой части, начинающейся с нуля). В разделе 23: «Относительные (положительные и отрицательные) числа» В.Ф. снова обращается к арифметике Грассмана — на этот раз к его теории целых чисел, реконструируя грассмановские рекурсивные определения операций. Но истолкование Каганом операции сложения целых чисел отклоняется от оригинала. В приводимой им системе равенств, задающих сложение, различаются равенства, относящиеся к натуральным, с одной стороны, и к целым отрицательным числам — с другой. Это не соответствует идее Грассмана — задать операцию сложения для произвольных целых чисел; кроме того, не отмечен тот существенный факт, что немецкий математик исходит из более общей структуры — основного ряда. В данной В.Ф. Каганом характеристике грассмановских доказательств не отмечено использование в них иных, отличных от индуктивно-рекурсивных, методов.

И все же реконструкция В.Ф. Кагана для отечественного историко-методологического развития — примечательное явление. Правда, вывод В.Ф.: «Заслуга Грассмана заключается в том, что он построил строго научную арифметику натурального ря-

[9]Правда, в подстрочном примечании в конце раздела 20 отмечается, что «Грассман фактически оперирует с двухсторонним натуральным рядом, неограниченно простирающимся как в одну сторону (положительную), так и в другую (отрицательную)», однако эти слова оставляют читателя в недоумении, куда при этом следует относить число нуль.

да и тем заложил фундамент не только научной арифметики, *но и всего анализа*» [2, столб. 419] — не соответствует реальному вкладу Германа (да и Роберта) Грассмана в основания арифметики. Вклад этот более скромен: обоснованию анализа он заведомо служить не мог, так как для этого требовалась более мощная арифметика — арифметика второго порядка, то есть, говоря логическим языком, теория, содержащая кванторы (без которых Г. Грассман мог обойтись), пробегающие не только по предметным (числовым) переменным, но и по предикатам. Подобной логической теории в распоряжении братьев Грассманов не было: при всей детальности алгебрологического построения Роберта Грассмана (к которому мы вскоре перейдем) кванторов — тем более по предикатным переменным — у него не было.

В начале 80-х годов прошлого века тщательный анализ индуктивно-рекурсивной методологии Г. Грассмана, как она была представлена в его «Арифметике», провела Л.Г. Бирюкова, сотрудничавшая в этой работе с одним из авторов этих строк [13]. В то время вклад Г. Грассмана можно было уже оценить с позиций сложившейся теории алгоритмов. Но этого не мог сделать В.Ф. Каган в начале века, что не умаляет его главную заслугу: он выявил конструктивистскую компоненту построения, представленного в грассмановском «Учебнике арифметики», хотя, конечно, не мог подойти к вопросу с алгоритмических позиций.

16 Логика в контексте «учения о величинах». Инициатива И.Н. Бродского

Братья Грассманы являли собой необычайное содружество — аналогичные примеры мы вряд ли найдем в истории математики, методологии, философии и логики. Герман Грассман, знаменитый ныне математик и филолог, часть своего жизненного и научного пути прошел вместе с младшим братом, впоследствии оказавшимся чрезвычайно плодовитым автором. Роберт выпустил громадное количество своих работ (благо у него были собственная типография и издательство) по самым различным отраслям знания.

Для нас существенно, что Р. Грассман явился — в сотрудничестве с братом и независимо от Буля и Джевонса — одним из основоположников алгебраической формы логики. Работы Роберта до сих пор привлекают мало внимания за рубежом, в то время как, мы уже говорили, они почти сразу вошли в круг отечественных логических исследований. Быть может, одной из причин этой ситуации было то, что работы Р. Грассмана необычайно многочисленны, разноплановы, затрагивают широчайший круг вопросов. Сочинения Р. Грассмана выходили по много раз — с начала 60-х годов до конца XIX столетия[10]. Идентификация сочинений Р. Грассмана представляет значительную трудность, так как он имел обыкновение издавать под разными названиями одни и те же работы. Все это объясняет те трудности, которые доставляют исследователю изучение его литературного наследия.

Жизнь Роберта Грассмана сложилась так, что его научно-литературная деятельность проходила вне академической науки. Отсюда невнимание к его сочинениям со стороны немецких — и вообще западных — исследователей. Логические идеи в его работах тонули в ворохе вопросов, которыми изобиловали его произведения. Отсюда — пренебрежение к его творчеству.

Иное дело Россия. Русским ученым было недосуг разбираться в потоке работ Роберта, в которых писалось «про все», — внимание обращали только на его логическое учение. О дореволюционном изложении его концепции логики и ее оценке мы уже говорили. Но о нем помнили и в советское время: в первом томе «Философской энциклопедии» была помещена небольшая статья о нем [14].

В 70-х годах XX века И.Н. Бродский, ныне покойный[11], предложил своей аспирантке Г.И. Малыхиной в качестве темы кандидатской диссертации анализ и осмысление философско-логического наследия Р. Грассмана. Результатом исследований Га-

[10]Библиография трудов Р. Грассмана и тем более зарубежная литература, в которой хоть с какой-то степенью подробности освещаются его идеи, нам не известны. Ни в Каталоге Британского музея, ни в Национальной немецкой библиографии, ни даже в Каталоге Библиотеки Конгресса США — мы не говорим уже о российских библиотеках — невозможно найти полный перечень его работ.

[11]Иосиф Нусимович Бродский (1924–1994), выпускник Ленинградского университета 1948 г., доктор философских науки и профессор, с 1954 г. до конца дней был членом кафедры логики в своем университете, определяя — вместе со своим коллегой О.Ф. Серебрянниковым — высокий уровень работ ленинградских философских логиков.

лины Ивановны, которые направлял Бродский, явилась ее диссертация на соискание ученой степени кандидата философских наук по специальности «Логика». Подготовленная в Ленинградском университете, она там же была успешно защищена [15][12].

Исходным пунктом методологической концепции Грассманов была теория величин — она была изложена Робертом. Без «учения о величинах» невозможно верно понять особенности грассмановского логического исчисления. «Учение о величинах» предстает в качестве предельно общей и абстрактной теории, которая «закладывается» в основание логики, арифметики, комбинаторики и того же «учения о протяженностях». «Учение о величинах» в том виде, в каком оно было развито Р. Грассманом, рассматривалось Г.И. Малыхиной как предвосхищение — мы должны добавить, весьма отдаленное — общей теории формальных систем, возникшей в XX столетии.

Секрет столь универсального характера грассмановской теории величин состоит в том, что в ней вводятся «законы связи» величин (то есть законы, относящиеся к бинарным операциям и отношениям), которые являются общими для целого класса математико-логических дисциплин. Реконструируя грассмановское учение, мы обнаруживаем основные принципы его построения и его отношение к соответствующей логике (как простейшей из «форм» математики). Последняя представляет собой алгебраически трактуемую теорию понятий, суждений, умозаключений и доказательств: она представлена в работах Р. Грассмана 1872 и 1890 годов.

Анализ логического учения Р. Грассмана требует учета его историко-логического фона, сравнения построения Р. Грассмана с исчислениями Дж. Буля, Ст. Джевонса и Э. Шрёдера. Такой подход позволяет установить историческое место логических сочинений Р. Грассмана в панораме развития логической мысли XIX века, включая формализацию силлогистики. Эта формальная конструкция представляет собой расширение — за счет введения отрицательных терминов и операций объединения и пересечения классов — алгебраически трактуемой аристотелевской теории. Расширение это консервативно, так как не добавляет в

[12]Содержание этой диссертационной работы получило отражение в ряде статей Г.И., опубликованных как до, так и после ее защиты.

силлогистику новых правильных модусов. Историческая значимость «Логики» Р. Грассмана 1872 г. проявляется в том, что она оказала большое влияние на Э. Шрёдера.

Логическое и алгебраическое наследие Г. и Р. Грассманов в 80-е годы было тщательно изучено в работах Б.В. Бирюкова и Л.Г. Бирюковой, а впоследствии и З.А. Кузичевой. Выяснилось, что, реализуя генетическую программу обоснования математики и представляя логику, — понимаемую как часть науки о мышлении, — в качестве одной из «форм математики», братья Грассманы в своем логическом учении строили структуру, именуемую в современной литературе дистрибутивной решеткой. Введение дополнений превращает ее в булеву алгебру. Построение последней было сделано совершенно независимо от работ их предшественников, причем примечательно: в своей алгебре логики Грассманы использовали только прямые операции: логическое сложение (объединение классов, дизъюнкцию высказываний), логическое умножение (пересечение классов, конъюнкцию высказываний) и отрицание, трактуемое — в логике классов — как дополнение заданного класса до универсума. Совершенно необычным для алгебры логики того времени было ограничение логики понятиями с конечным объемом, что вызывалось спецификой использовавшихся Р. Грассманом индуктивно-рекурсивных доказательств. Что же касается Г. Грассмана, то выяснилось: в его исходных алгебраических построениях (выполненных до сотрудничества с братом) присутствовала аксиоматика (коммутативной) группы и по сути дела предполагалось понятие полугруппы.

В настоящее время авторами этих строк подготовлен перевод всех философских и логических работ братьев Грассманов, снабженный соответствующими научными комментариями и подробным послесловием, что освобождает от необходимости входить здесь в дальнейшие детали.

В работах Г.И. Малыхиной логические идеи Р. Грассмана были введены в контекст его философских, науковедческих и теологических представлений. Дело в том, что жизненной целью Р. Грассмана была разработка энциклопедического «Здания знания». Оно должно было охватить, по замыслу, все, что представлялось автору входящим в современную ему науку — от естествознания и техники до богословия.

Следует сказать, что анализировать грандиозную научно-философскую конструкцию Р. Грассмана не просто. Его «Здание» включает, наряду с философией, естествознание, общественно-политические науки, тщательно разработанное теологическое учение. Все это Р. Грассман пытается делать, придерживаясь выдвинутого им принципа «строго научного подхода»; однако вне сфер математики и логики использование этого принципа оказывается достаточно призрачным.

Хотя определяющей для всей конструкции Р. Грассмана была установка на разработку строго научной методологии, сопровождаемая критикой «спекулятивной философии», изложенное им «Здание знания» само представляло умозрительное учение. Правда, его онтологическая часть отражала тот значительный интерес, который этот автор проявлял к наукам о природе.

Р. Грассман считал, что построение всеобъемлющей системы научного знания возможно лишь на основе «точного формального метода» — метода, копировавшего генетическую конструкцию «теории величин» и переносившего ее на материал, где этот метод заведомо не применим. Впрочем, Р. Грассман был достаточно «методологически чуток» и не противопоставлял свой метод опытному знанию: научная методология, по его замыслу, должна иметь в своей основе триаду «опытный источник знания — математические средства познания — критический философский анализ утверждений науки». Что касается методологии, то, по мнению Р. Грассмана, ей необходимо выработать принципы «строго научного мышления». Эту задачу он пытался решить в «Учении о науке», сочинении, опубликованном в Штеттине (где вышли все работы Р. Грассмана) в 1875/76 гг., а также в двух томах «Здания знания» (1890). Для достижения этой цели Роберт предполагал создать «строго научный» искусственный язык. Этот язык, в отличие от естественного языка, должен был обеспечивать объективность и однозначность научных результатов. Но предлагаемый им вариант такого языка сводился к тому, что было изложено в его сочинении «Учение о формах» (в его вариантах 1872 и 1895 гг.). Очевидно, что язык этот был слишком слаб даже для формализации математики: отсутствие в нем кванторов делало его непригодным для формального представления действительных чисел и анализа.

В оценке философских взглядов Р. Грассмана мы присоединяемся к квалификациям Г.И. Малыхиной. Она показала, что он придавал большое значение естественным наукам, считая их фундаментом «здания знания»: согласно Р. Грассману, науки о природе призваны вскрыть «первопричины и принципы реально существующего». Онтологическое учение Грассмана содержит положения, относящиеся к различным областям знания. В их числе встречаются механика, физика, химия, астрономия, биология, геология, анатомия, медицина, антропология. К сожалению, многие из этих положений неубедительны. Вместе с тем, отмечала Г.И., этим автором выдвинут ряд свежих идей относительно путей формирования технических дисциплин на базе взаимодействий и синтеза опытных и теоретических наук. Однако, с увлечением обращаясь к миру естествознания, математики и логики, Р. Грассман всегда имел в виду то, что было для него высшей истиной, — теологическое учение.

В сочинениях Р. Грассмана представлена объективно-идеалистическая картина мира. Мотивом для ее разработки и радикального отвержения «старой» методологии служило убеждение в недостаточности философских принципов материалистической метафизики для решения естественно-научных проблем. Отсюда критика им прежних философских систем «спекулятивной философии», в частности гегелевской. Правда, следуя Гегелю, в качестве фундаментальной характеристики процесса развития он признавал диалектические противоречия.

Роберт Грассман, как и его старший брат — Герман, был глубоко религиозным человеком, и неудивительно, что он чаще всего обращался к Платону и Лейбницу. Создатель «Здания знания» отвергал кантовский априоризм в вопросе о категориальных формах познания внешнего мира. В этом отношении он был вполне «материалистом» в смысле Ленина.

В российской науке при анализе развития философии математики в конце XIX — начале XX столетия не всегда подчеркивается различие аксиоматического метода, теоретико-множественного подхода и генетической установки. Это имеет свое оправдание: эти три направления совместны и дополняют друг друга при условии, что противопоставление конструктивного подхода математической «классике» не заостряется. Мы отчетливо чувствуем это, например, в работах И.И. Жегалкина, в которых, как мы видели, присутствует как теоретико-множественное мышление, так и «оперативная» установка, реализованная в его арифметике вычетов по модулю 2, содержится алгоритм доказательства массива теорем пропозициональной логики (Иван Иванович имел перед глазами первый том «Principia Mathematica»). И мы понимаем, почему Н. Бурбаки утверждали, что под чистой математикой Герман Грассман «отчетливо понимал аксиоматическую математику в современном значении слова». Хотя в явной форме к аксиоматическому («евклидову») способу изложения своего «учения о протяженностях» он обратился только во втором издании своего главного математического труда, но уже его арифметика, отчетливо рекурсивно-индуктивная, позволила Хао-Вану [16] так ее реконструировать, что она предстала в аксиоматической форме и с использованием теоретико-множественных операций.

Мы показали, сколь многообразны были формы и направления, в которых отечественная мысль на протяжении двух столетий старалась вобрать в себя — и развить далее — достижения мировой философско-логической, логико-математической и историко-научной мысли. Наш рассказ, разумеется, не претендует на полноту. Например, мы оставили в стороне громадную проблему логической классичности/неклассичности. Но основные вехи, как думается, нами расставлены.

Литература

[1] *Грассман Г.* Чистая математика и учение о протяженности / Перев. П.С. Юшкевича // Новые идеи в математике. Сборник 1. СПб, 1913. С. 78-95.

[2] *Каган В.Ф.* Теоретические основания математики // Энциклопедический словарь «Гранат». Т. 41, VII.

[3] *Яновская С.А.* Категория количества у Гегеля и сущность математики. // Под знаменем марксизма. Ежемесячный философский и обществ[енно]-эконом[ический] журнал. М., 1928, № 3. В подстрочном примечании к статье указано: «Из доклада, читанного в семинаре по Гегелю на естественном отделении Института Красной Профессуры».

[4] *Грассман Г.* Чистая математика и учение о протяженности. С. 69.

[5] «Философская энциклопедия». 1960. Т. 2; 1967. Т. 4.

[6] *Яновская С.А.* Предисловие к русскому переводу // А. Тьюринг. Может ли машина мыслить? С приложением статьи Дж. фон Неймана «Общая и логическая теория автоматов». Редакция и предисловие С.А. Яновской. М., 1960. С. 10, 17.

[7] *Жегалкин И.И.* Трансфинитные числа. М., 1907.

[8] *Жегалкин И.И.* О технике вычисления предложений в символической логике // Матем. сб. 1927. Т. 34, вып. 1. С. 9.

[9] *Жегалкин И.И.* Арифметизация символической логики // Матем. сб. 1928. Т. 35, вып. 3–4; 1929. Т. 36, вып. 3–4; *Он же.* К проблеме разрешимости // Матем. сб. 1939. Т.6 (48), вып. 2; *Он же.* Проблема разрешимости на конечных классах // Ученые записки. МГУ. 1946. Вып. 3–4.

[10] *Шуранов Б.М.* Иван Иванович Жегалкин: вклад в математическую логику // Вестник Международного славянского университета. Вып. 4. М., 1998. С. 32–33.

[11] *Новоселов Н.Н.* Эффективизм // Философская энциклопедия. 1970. Т. 5.

[12] *Бирюкова Л.Г., Бирюков Б.В.* Из истории генетического метода: об одном опыте осмысления грассмановской индуктивно-рекурсивной арифметики (В.Ф. Каган) // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. Материалы VI Международной научной конференции. [СПб], Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2000.

[13] *Бирюкова Л.Г., Бирюков Б.В.* «Учение о формах (величинах)» Германа и Роберта Грасманов как предвосхищение конструктивного направления в математике I. // Вопросы кибернетики. Кибернетика и логическая формализация. Аспекты истории и методологии. М., 1982 [Издание научного совета по кибернетике АН СССР].

[14] *Бирюков Б.* Грассман Роберт // Философская энциклопедия. 1960.Т. 1.

[15] *Малыхина Г.И.* Логические исследования Роберта Грассмана. Дисс. канд. филос. наук. Л., 1981.

[16] *Hao Wang.* The axiomatization of arithmetic // Journal of Symbolic Logic. 1957. Vol. 22. P. 145–158.