Общий метод доказательства разрешимости интуиционистских модальных логик[1]

Н.А. Алешина, Д.П. Шкатов[2]

abstract. We generalise the result of [10] on decidability of the two variable monadic guarded fragmet of first order logic with constraints on the guard relations expressible in monadic second order logic. In [10] such constraints apply to one relation at a time. We modify their proof to obtain decidability for constraint involving several relations. Now we can use this result to prove decidability of multi-modal logics where conditions on accessibility relations involve more than one relation. Our main application is intuitionistic modal logic, where the intuitionistic and modal accessibility relations usually interact in a non-trivial way.

1 Введение

В настоящей статье мы предлагаем новый общий метод доказательства разрешимости интуиционистских модальных логик. Этот метод опирается на доказываемое в настоящей работе обобщение результата Ганцингера, Мейера и Вианеса (см. [10]) о том, что двухпеременный монадический защищенный фрагмент GF^2_{mon} классической первопорядковой логики, в котором на некоторое отношение, встречающееся в защитниках, наложено условие, выразимое как условие замкнутости, определимое в монадической второпорядковой логике, разрешим. Мы обобщаем этот результат на случай, когда условия упомянутого вида накладываются на более, чем одно отношение. Такое обобщение позволяет нам доказать разрешимость широкого класса интуиционистских модальных систем путем их погружения в этот раз-

[1]Настоящая статья была опубликована на английском языке в Journal of Applied Logic, Vol 4, N. Alechina, D. Shkatov, A general method for proving decidability of intuitionistic modal logics, pp. 219-230. Публикуется с разрешения Elsevier.

[2]Работа поддержана РГНФ. Грант № 04-03-02660.

решимый фрагмент. Общие результаты о разрешимости и свойстве конечной модели интуиционистских модальных логик были доказаны в [23], [24] и [25] путем погружения интуиционистских модальных логик с n модальностями в классические модальные логики с $n+1$ модальностями, называемые классическими напарниками интуиционистских логик. Однако эти результаты могут быть использованы только для доказательства разрешимости тех интуиционистских логик, разрешимость классических напарников которых уже установлена.

2 Двухпеременный монадический защищенный фрагмент

Начнем с определения двухпеременного монадического защищенного фрагмента GF^2_{mon}, сформулированного в [10]. В нижеследующих определениях $FV(\varphi)$ обозначает множество свободных переменных формулы φ и $\bar{x}$ обозначает упорядоченную последовательность переменных. Мы предполагаем, что наш первопорядковый язык содержит предикатные параметры произвольной местности и предикатную константу равенства $=$, но не содержит ни индивидных, ни функциональных параметров.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Защищенным фрагментом GF первопорядковой логики будем называть наименьшее множество формул, содержащее все первопорядковые атомарные формулы и замкнутое относительно булевых связок и нижеследующего правила: если ρ — атомарная формула, $\varphi \in GF$ и $\bar{x} \subset FV(\varphi) \subset FV(\rho)$, то $\exists\bar{x}(\rho \wedge \varphi) \in GF$ и $\forall\bar{x}(\rho \to \varphi) \in GF$.

Формулу ρ в $\exists\bar{x}(\rho\wedge\varphi)$ и $\forall\bar{x}(\rho \to \varphi)$ будем называть формулой-защитником или, для краткости, просто защитником.

Двухпеременным монадическим защищенным фрагментом GF^2_{mon} будем называть наименьшее подмножество GF, содержащее формулы φ такие, что (i) φ содержит не более двух переменных (свободных или связанных), и (ii) все неунарные предикатные параметры φ содержатся в защитниках.

3 Условия замкнутости

В настоящем разделе мы определяем вид накладываемых на защитников GF^2_{mon} условий, порождающих разрешимые фрагменты первопорядковой логики. При этом мы обобщаем понятие mso-определимых условий замкнутости из [10] таким образом, что оно становится применимым к более чем одному отношению, обозначенному предикатными параметрами формул GF^2_{mon}.

Сначала определим простые и параметризованные операторы замыкания на отношениях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть W — это непустое множество. Будем называть унарную функцию C на 2^W простым оператором замыкания, если для всех $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \subseteq W$ имеют место следующие условия:

1. $\mathcal{P} \subseteq C(\mathcal{P})$ (C растет),

2. $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}'$ влечет $C(\mathcal{P}) \subseteq C(\mathcal{P}')$ (C монотонна)

3. $C(\mathcal{P}) = C(C(\mathcal{P}))$ (C идемпотентна).

Будем называть $n+1$-местную функцию C на 2^W параметризованным оператором замыкания, если $C(\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n, -)$ является простым оператором замыкания для любых $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n \subseteq W$. Мы будем обозначать при помощи $C^{\mathcal{P}_1,\ldots,\mathcal{P}_n}$ операторы замыкания, параметризованные отношениями $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n$.

ПРИМЕР 3. Оператор рефлексивного, транзитивного замыкания бинарных отношений $TC(\mathcal{P})$, отображающий бинарное отношение $\mathcal{P}$ в его рефлексивное, транзитивное замыкание $\mathcal{P}^*$, является простым оператором замыкания.

ПРИМЕР 4. Функция $Incl^{\mathcal{P}'}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}' \cup \mathcal{P}$ является оператором замыкания, параметризованным отношением $\mathcal{P}'$.

Теперь мы определим простые и параметризованные условия замкнутости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Будем называть условие, наложенное на отношение $\mathcal{P}$, простым условием замкнутости, если оно может быть выражено в виде равенства $C(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$, где C — простой оператор замыкания.

Будем называть условие, наложенное на отношение $\mathcal{P}$, параметризованным условием замкнутости, если оно может быть выражено в виде равенства $C^{\mathcal{P}_1,\ldots,\mathcal{P}_n}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$, где $C^{\mathcal{P}_1,\ldots,\mathcal{P}_n}$ — параметризованный оператор замыкания.

ПРИМЕР 6. Рефлексивность-и-транзитивность является простым условием замкнутости, поскольку оно может быть выражено в виде равенства $TC(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ и мы показали в примере 3, что TC — это простой оператор замыкания.

ПРИМЕР 7. Условие $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$ является условием замкнутости на $\mathcal{P}$, параметризованным отношением $\mathcal{P}'$, поскольку оно может быть выражено в виде равенства $Incl^{\mathcal{P}'}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ и мы показали в примере 4, что $Incl^{\mathcal{P}'}$ — это параметризованный оператор замыкания.

Имея совокупность наложенных на множество отношений S условий замкнутости, мы не хотим допустить эффекта «порочного круга» при замыкании отношений из S.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть S — конечное множество отношений, $\mathbf{C}$ — множество условий замкнутости, наложенных на эти отношения, и $\mathbf{C}(\mathcal{P})$ — все условия замкнутости из $\mathbf{C}$, наложенные на отношение $\mathcal{P}$ из S. Будем называть $\mathbf{C}$ ацикличным, если имеется такое упорядочивание $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n$ множества S, что $\mathbf{C}(\mathcal{P}_{i+1})$ не содержит параметров, отличных от $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_i$.

Более того, нам интересны не любые операторы замкнутости, а только те, которые могут быть определены формулами монадической второпорядковой логики. Обозначим при помощи $\|\varphi(x_1, \ldots, x_n)\|^{\mathcal{M}}$ множества n-ок, выполняющих монадическую второпорядковую формулу φ в модели $\mathcal{M}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Будем называть оператор замыкания $C^{\mathcal{P}_1,\ldots,\mathcal{P}_m}$ на n-местных отношениях mso-определимым, если существует монадическая второпорядковая формула $\overline{C_P^{P_1,\ldots,P_m}}$, содержащая предикатные параметры $P_1, \ldots, P_m$ и P, такая, что для любой модели $\mathcal{M}$ и любой n-местной формулы (то есть формулы с n свободными переменными) φ имеет место

$$C^{\mathcal{P}_1,\ldots,\mathcal{P}_m}(\|\varphi\|^{\mathcal{M}}) = \|\overline{C_P^{P_1,\ldots,P_m}}(\varphi/P))\|^{\mathcal{M}}.$$

ПРИМЕР 10. Оператор замыкания TC определим монадической второпорядковой формулой

$$\overline{TC_P}(z_1, z_2) = \forall X(X(z_1) \wedge \forall x, y(X(x) \wedge P(x, y) \to X(y)) \to X(z_2))$$

Для того, чтобы убедиться в том, что $\overline{TC_P}$ определяет рефлексивное, транзитивное замыкание отношения $\mathcal{P}$, предположим, что имеется $\mathcal{P}$-цепь $w_1\mathcal{P}w_2\dots w_{n-1}\mathcal{P}w_n$, связывающая w_1 с w_n, и что имеют место $\mathcal{X}(w_1)$ и $\forall x, y(X(x) \wedge P(x,y) \rightarrow X(y))$. Тогда $\mathcal{X}(w_1)$ влечет $\mathcal{X}(w_2)$ ...влечет $\mathcal{X}(w_n)$; значит, $\overline{TC_P}(z_1, z_n)$ истинна при таком α, что $\alpha(z_1) = w_1$ и $\alpha(z_2) = w_2$. Для доказательства в обратную сторону предположим, что не существует $\mathcal{P}$-цепи, связывающей w_1 с w_n. Припишем переменной X множество $\mathcal{X}$, содержащее w_1 и все элементы модели, которые $\mathcal{P}$-достижимы из w_1. Тогда $\mathcal{X}(w_n)$ не имеет места, и следовательно, $\overline{TC_P}(w_1, w_n)$ ложна при таком α, что $\alpha(z_1) = w_1$ и $\alpha(z_2) = w_2$.

ПРИМЕР 11. Оператор замыкания $Incl^{\mathcal{P}'}$ определим монадической второпорядковой (на самом деле первопорядковой) формулой $\overline{Incl_P^{P'}}(z_1, z_2) = P'(z_1, z_2) \vee P(z_1, z_2)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Будем называть (простое или параметризованное) условие замкнутости, наложенное на отношение $\mathcal{P}$, mso-определимым, если оно может быть выражено при помощи равенства, содержащего mso-определимый (простой или параметризованный) оператор замыкания.

Следующим шагом мы обобщим результат [10] таким образом, чтобы он был применим не только к GF^2_{mon} с единственным mso-определимым условием замкнутости, наложенным на отношения, обозначенные предикатными параметрами формул, но и к множествам mso-определимых условий замкнутости.

ТЕОРЕМА 13. *Пусть $\varphi \in GF^2_{mon}$ и $\boldsymbol{C}$ — ацикличное множество mso-определимых условий замкнутости, наложенных на отношения из φ, такое, что на каждое отношениене наложено не более одного условия замкнутости. Проблема выполнимости φ в модели, удовлетворяющей всем условиям из $\boldsymbol{C}$, разрешима.*

Доказательство. Доказательство похоже на доказательство, предложенное в [10] для непараметризованных условий замкнутости. На самом деле наше доказательство существенно упрощает доказательство из [10], поскольку в [10] все отношения замыкаются относительно эквивалентности (что требуется из-за присутствия в языке константы равенства), а замкнутость относительно эквивалентности — это частный случай параметризованного условия замкнутости, что означает, что мы не должны уделять ей специального внимания в ходе нашего доказательства.

Пусть $\varphi \in GF^2_{mon}$ и пусть **C** — ациклическое множество mso-определимых условий замкнутости на отношения из φ. Мы знаем, что φ выполнима в модели, удовлетворяющей всем условиям из **C**, если и только если сколемовская форма φ, которую мы будем называть N, выполнима в эрбрановой модели, в которой имеют место все условия из **C**. Идея доказательства заключается в сведении проблемы выполнимости N в эрбрановой модели, в которой имеют место все условия из **C**, к проблеме выполнимости формул SkS (монадической второпорядковой теории деревьев с постоянным фактором ветвления k), где k — это число сколемовских функциональных символов в N. Мы построим монадическую второпорядковую формулу MSO_N в словаре SkS (который содержит унарные предикатные параметры, унарные функциональные параметры и равенство) такую, что MSO_N выполнма в древовидной модели, если и только если N имеет эрбрановскую модель, выполняющую все условия из **C**. Построение формулы MSO_N будет произведено в три шага: (1) определение напарников предикатных букв, (2) определение напарников предложений N и (3) определение напарника для самой N.

Шаг 1. Для каждой предикатной буквы P, имеющей вхождение в N, построим формулу φ_P в словаре SkS.

Пусть $P(\overline{t_1}), \ldots, P(\overline{t_m})$ — это все позитивные литералы N, содержащие P. Заметим, что, поскольку $\varphi \in GF^2_{mon}$, то каждая P является или унарной или бинарной предикатной буквой; значит, каждый позитивный литерал содержит не более одной свободной переменной. Для каждого из вышеперечисленных $P(\overline{t_i})$ введем новую унарную второпорядковую переменную $X_{P(\overline{t_i})}$. Пусть $\overline{t}[z]$ — результат подстановки переменной z вместо свободной переменной $\overline{t}$. Тогда, если P — унарная предикатная буква, то

$$\varphi_P(z_1) = \bigvee_{i=1}^{m} \exists z(X_{P(t_i)}(z) \wedge z_1 = t_i[z])$$

и, если P — бинарная предикатная буква, то

$$\varphi_P(z_1, z_2) = \bigvee_{i=1}^{m} \exists z (X_{P(t_{i1}, t_{i2})}(z) \wedge z_1 = t_{i1}[z] \wedge z_2 = t_{i2}[z]).$$

Интуитивно, отношение, определяемое формулой φ_P, является минимальным расширением P.

Теперь, для каждой предикатной буквы P, на которую наложено условие замкнутости, определим замыкание ψ_P формулы φ_P по отношению к условиям замкнутости, наложенным на P. Для каждой такой P имеется единственное условие замкнутости C_P, которое может быть параметризовано другими предикатными буквами. Для простоты изложения предположим, что C_P параметризовано единственной предикатной буквой P', на которую наложено простое условие замкнутости $C_{P'}$. Тогда $C_{P'}$ определимо при помощи монадической второпорядковой формулы $\overline{C_{P'}}(z_1, z_2)$, содержащей P', и C_P определимо при помощи монадической второпорядковой формулы $\overline{C_P^{P'}}(z_1, z_2)$, содержащей P' и P. Сначала определим замыкание P' по отношению к наложенному на него простому условию замкнутости:

$$\psi_{P'}(z_1, z_2) = \overline{C_{P'}}(z_1, z_2)[\varphi_{P'}/P'],$$

то есть мы заменяем каждое вхождение P' в $\overline{C_{P'}}(z_1, z_2)$ на $\varphi_{P'}$.

Затем определим замыкание P по отношению к наложенному на него параметризованному условию замкнутости:

$$\psi_P(z_1, z_2) = \overline{C_P^{P'}}(z_1, z_2)[\psi_{P'}/P', \varphi_P/P].$$

В общем случае для любого ацикличного множества условий $\mathbf{C}$, наложенных на множество отношений S, мы сначала должны определить простые замыкания, затем замыкания, параметризованные отношениями с простыми условиями замкнутости, и так далее. Ацикличность $\mathbf{C}$ гарантирует, что эта процедура может быть успешно завершена.

Шаг 2. Для каждого предложения $\chi = \{\rho_1, \ldots, \rho_l\}$ из N построим формулу MSO_χ в словаре SkS.

Для каждого литерала ρ из χ формула MSO_ρ определяется в соответствии со следующим правилом:

$$MSO_\rho = \begin{cases} X_\rho(x), & \text{если } \rho \text{ — это атом со свободной переменной } x \\ \exists z X_\rho(z), & \text{если } \rho \text{ — это атом без свободных переменных} \\ \neg\psi_P(\bar{t}), & \text{если } \rho \text{ — это } \neg P(\bar{t}), \end{cases}$$

где ψ_P — это формула, построенная на шаге 1. Теперь определим MSO_χ как $MSO_\chi = \bigvee_{\rho\in\chi} MSO_\rho$.

Шаг 3. Наконец, положим, что $MSO_N = \exists\overline{X}\forall\overline{x} \bigwedge_{\chi\in N} MSO_\chi$, где $\overline{X}$ — это все свободные второпорядковые и $\overline{x}$ — все свободные первопорядковые переменные $\bigwedge_{\chi\in N} MSO_\chi$.

Наи остается показать, что N имеет эрбранову модель, удовлетворяющую всем условиям из **C**, если и только если MSO_N выполнима в древовидной модели. Пусть $\mathcal{T}$ — это дерево, соответствующее алгебре термов эрбранового универсума нашей формулы N.

Сначала докажем требуемое утверждение слева направо. Допустим, что N имеет эрбранову модель $\mathcal{A}$, выполняющую все условия замкнутости из **C**. Нам нужно доказать, что $\mathcal{T}$ выполняет MSO_N. Следующим образом зафиксируем «свидетелей» для второпорядковых переменных X_ρ формулы MSO_N:

(i) Если $\overline{t_i}$ содержит свободные переменные, то $X_{P(\overline{t_i})} = \{w : \mathcal{A} \models P(\overline{t_i}[w])\}$.

(ii) Если $\overline{t_i}$ не содержит свободных переменных, то $X_{P(\overline{t_i})}$ — это произвольное непустое множество.

Мы знаем, что для каждого предложения χ из N и каждой последовательности $\overline{w}$ имеет место $\mathcal{A} \models \chi(\overline{w})$. Это означает, что для каждой $\overline{w}$ имеется литерал ρ из χ такой, что $\mathcal{A} \models \rho(\overline{w})$. Мы покажем, что для любых $\overline{w}$ и ρ, если $\mathcal{A} \models \rho(\overline{w})$, то $\mathcal{T} \models MSO_\rho(\overline{w})$. Следовательно, $\mathcal{A} \models \chi(\overline{w})$ влечет $\mathcal{T} \models MSO_\chi(\overline{w})$.

Мы должны рассмотреть три случая, в соответствии с видом литерала ρ. Первые два случая (ρ — это атом $P(\overline{t_i})$ со свободными переменными и ρ — это атом без свободных переменных) в точности совпадают с доказательством из [10], и потому мы их здесь опускаем. Если ρ — это негативный литерал $\neg P(\overline{t_i})$, то мы должны показать, что $\mathcal{T} \models \neg\psi_P(\bar{t})(\overline{w})$. Для этого достаточно показать, что $\|\psi_P\|^{\mathcal{A}} \subseteq P^{\mathcal{A}}$. Действительно, из этого и из нашего предположения, что $\mathcal{A} \models \neg P(\bar{t})[\overline{w}]$, следует $\mathcal{T} \models \neg\psi_P(\overline{w})$. Итак, определение $\mathcal{T}$ гарантирует, что $\|\varphi_P\|^{\mathcal{A}} \subseteq P^{\mathcal{A}}$. Значит, поскольку операторы замыкания монотонны, $C_P^{P_1^{\mathcal{A}}}(\|\varphi_P\|^{\mathcal{A}}) \subseteq C_P^{P_1^{\mathcal{A}}}(P^{\mathcal{A}})$. В соответствии с определением ψ_P, $C_P^{P_1^{\mathcal{A}}}(\|\varphi_P\|^{\mathcal{A}}) = \|\psi_P\|^{\mathcal{A}}$; кроме того, поскольку $\mathcal{A}$ выполняет все условия из $\mathbf{C}$, $C_P^{P_1^{\mathcal{A}}}(P^{\mathcal{A}}) = P^{\mathcal{A}}$; следовательно, $\|\psi_P\|^{\mathcal{A}} \subseteq P^{\mathcal{A}}$.

Теперь докажем требуемое утверждение справа налево. Предположим, что MSO_N истинна в $\mathcal{T}$. Следующим образом определим эрбрановскую модель $\mathcal{A}$. Универсумом $\mathcal{A}$ является множество узлов дерева $\mathcal{T}$, и $P^{\mathcal{A}} = \|\psi_P\|$. Сначала докажем, что $\mathcal{A}$ выполняет все условия из $\mathbf{C}$. Для этого мы должны показать, что $C_P^{\mathcal{P}_1}(P^{\mathcal{A}}) = P^{\mathcal{A}}$. Действительно, $C_P^{P_1^{\mathcal{A}}}(P^{\mathcal{A}}) = C_P^{P_1^{\mathcal{A}}}(\|\psi_P\|) = C_P^{\|\psi_{P_1}\|}(C_P^{\|\psi_{P_1}\|}(\| \varphi_P\|)) = C_P^{\|\psi_{P_1}\|}(\|\varphi_P\|) = \|\psi_P\| = P^{\mathcal{A}}$.

Наконец, мы должны показать, что $\mathcal{A}$ выполняет все предложения из N. Эта часть доказательства в точности совпадает с доказательством, приведенным в [10], поэтому мы ее здесь опускаем. Q.E.D.

4 Интуиционистские модальные логики

Одним из наиболее интересных приложений теоремы 13, доказанной в предыдущем разделе, являются пропозициональные интуиционистские модальные логики, то есть модальные логики, чьей базовой логикой является не классическая, а интуиционистская пропозициональная логика. Интуиционистским модальным логикам посвящена огромная литература, например [9, 3, 4, 5, 19, 13, 15, 16, 11, 8, 18, 6, 22, 24, 23, 25]. Всеобъемлющий обзор может быть найден в [20]; ссылки на более поздние работы могут быть найдены в [26] и [17].

Интерес к изучению интуиционистких модальных логик вызван рядом причин. Во-первых, многие логики (которых принято называть «интуиционистами») по философским соображениям склонны считать интуиционистскую, а не классическую логику той логикой, которую мы должны использовать для проверки корректности рассуждений. Естественным образом, при формализации рассуждений о возможности и необходимости интуиционисты хотят использовать интуиционистскую, а не классическую логику в качестве базиса для построения модальных логик. Во-вторых, в недавнее время интуиционистские логики стали применяться для формального моделирования задач, возникающих в различных приложениях логики, главным образом в теоретической компьютеристике. Например, Могги в [14] расширил формальную семантику функциональных языков программирования, основанную на λ-исчислении с типами, новой конструкцией, монадой, используемой для формального моделирования различных эффектов функциональных языков (например, порождение исключений). Хорошо известна тесная связь между λ-исчислением с простыми типами и интуиционистской пропозициональной логикой (через так называемый изоморфизм Карри—Ховарда); оказалось, что монады при этом соответствуют модальностям типа **S4**. Интуиционистские модальные логики также были использованы для моделирования неполной информации (см. [22]), систем коммуникации (см. [21]) и методов проверки компьютерного оборудования (см. [12, 7]).

Для построения интуиционистских модальных языков к языку пропозициональной интуиционистской логики, содержащему множество пропозициональных параметров $\Phi = \{p_1, p_2, \ldots\}$, унарную связку $\sim$ (отрицание «неверно, что …») и бинарные связки $\wedge$ (конъюнкция «и»), $\vee$ (дизъюнкция «или») и $\Rightarrow$ (импликация «если …, то …»), добавляют обе или одну из связок $\Diamond$ (возможность) и $\Box$ (необходимость). Для обозначения интуиционистских отрицания и импликации мы используем символы, отличные от символов, использованных нами для обозначения классических отрицания и импликации, во-первых, потому, что эти связки имеют различное значение в классической и интуиционистской логиках, и, во-вторых, потому, что позднее нам понадобится одновременно использовать и классические и интуиционистские связки в одном и том же контексте. Аналогично кванторам $\forall$ и $\exists$ в интуиционистских логиках $\Box$ и $\Diamond$ не обязательно являются дуалами друг друга; поэтому, в отличие от того, как это делается в случае классических модальных логик, в интуиционистских модальных логиках $\Box$ и $\Diamond$ следует рассматривать как независимые модальности. В интуиционистских модальных логиках некоторые из классически общезначимых формул необщезначимы; наиболее очевидным примером является формула $\Box(\varphi \vee \sim \varphi)$, так как «закон исключенного третьего» интуиционистски неприемлем. Возможно, более неожиданно, что в некоторых интуиционистских логиках «проваливается» формула $\Diamond(\varphi \vee \psi) \equiv (\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi)$ (см., например, [22]).

Семантика крипкевского типа для интуиционистских модальных логик расширяет семантику крипкевского типа для пропозициональной интуиционистской логики. Интуиционистскими крипкевскими моделями являются структуры $\mathcal{M} = (W, \mathcal{R}, V)$ такие, что (i) $W \neq \emptyset$, (ii) $\mathcal{R}$ — это рефлексивное и транзитивное бинарное отношение на W и (iii) V — это функция из множества пропозициональных параметров Φ в 2^W такая, что для любых $w \in W$ и $p \in \Phi$ имеет место следующее: если $w \in V(p)$ и $w\mathcal{R}v$, то $v \in V(p)$ (это условие обычно называется «наследованием»). Элементы W мы будем называть точками. Истина в точке модели определяется следующим образом ($\rightarrow$ и $\neg$, как и прежде, обозначают классические импликацию и отрицание соответственно):

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{M}, w \Vdash p & \text{е.т.е.} & w \in V(p); \\
\mathcal{M}, w \Vdash \sim \varphi & \text{е.т.е.} & \forall v(\mathcal{R}(w, v) \rightarrow \neg(\mathcal{M}, v \Vdash \varphi)); \\
\mathcal{M}, w \Vdash \varphi \wedge \psi & \text{е.т.е.} & \mathcal{M}, w \Vdash \varphi \text{ и } \mathcal{M}, w \Vdash \psi; \\
\mathcal{M}, w \Vdash \varphi \vee \psi & \text{е.т.е.} & \mathcal{M}, w \Vdash \varphi \text{ или } \mathcal{M}, w \Vdash \psi; \\
\mathcal{M}, w \Vdash \varphi \Rightarrow \psi & \text{е.т.е.} & \forall v(\mathcal{R}(w, v) \rightarrow (\neg(\mathcal{M}, v \Vdash \varphi) \text{ или} \\
 & & \mathcal{M}, v \Vdash \psi).
\end{array}
$$

Для оценки формул вида $\Box\varphi$ и $\Diamond\varphi$ в интуиционистские крипкевские модели добавляют бинарные отношения $\mathcal{R}_\Box$ и $\mathcal{R}_\Diamond$. Не существует единого, общепризнанного определения значения связок $\Box$ и $\Diamond$ в интуиционистской логике. Все из нижеследующих определений встречаются в литературе (всеобъемлющий обзор различных определений $\Box$ и $\Diamond$ в интуиционистском контексте может быть найден в главе 3 дисссертации [20]):

$$
\begin{array}{lll}
(\Box_1)\ \mathcal{M}, w \Vdash \Box\varphi & \text{е.т.е.} & \forall v(w\mathcal{R}_\Box v \rightarrow \mathcal{M}, v \Vdash \varphi) \\
(\Box_2)\ \mathcal{M}, w \Vdash \Box\varphi & \text{е.т.е.} & \forall v(w\mathcal{R}v \rightarrow \forall u(v\mathcal{R}_\Box u \rightarrow \mathcal{M}, u \Vdash \varphi)) \\
(\Diamond_1)\ \mathcal{M}, w \Vdash \Diamond\varphi & \text{е.т.е.} & \exists v(w\mathcal{R}_\Diamond v \wedge \mathcal{M}, v \Vdash \varphi) \\
(\Diamond_2)\ \mathcal{M}, w \Vdash \Diamond\varphi & \text{е.т.е.} & \forall v(w\mathcal{R}v \rightarrow \exists u(v\mathcal{R}_\Diamond u \wedge \mathcal{M}, u \Vdash \varphi))
\end{array}
$$

Заметим, что условие ($\Diamond_2$) определяет модальность, не являющуюся дистрибутивной по отношению к дизъюнкции. Соответственно логики с оператором возможности, определенным таким образом, обычно называются ненормальными интуиционистскими модальными логиками.

Кроме требования, что $\mathcal{R}$ должно быть рефлексивным и транзитивным, семантики интуиционистских модальных логик накладывают дополнительные условия на $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_\Box$ и $\mathcal{R}_\Diamond$. Как правило, эти условия постулируют, как отношения $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_\Box$ и $\mathcal{R}_\Diamond$ взаимодействуют между собой. Например, следующие условия обычно сопровождают условия истинности ($\Box_1$) и ($\Diamond_1$) (см. [24]):

(1) $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}_\Box \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}_\Box$

(2) $\mathcal{R} \circ \overline{\mathcal{R}_\Diamond} \circ \mathcal{R} = \overline{\mathcal{R}_\Diamond}$

В вышеприведенных условиях $\circ$ обозначает композицию отношений, которая определяется следующим образом:

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{R}' = \{ (x, y) : \exists z \ ((x, z) \in \mathcal{R} \ \wedge (z, y) \in \mathcal{R}') \}$$

и $\overline{\mathcal{R}}$ обозначает обратное отношение, которое определяется следующим образом:

$$\overline{\mathcal{R}} = \{ (y, x) : (x, y) \in \mathcal{R} \}.$$

Другое условие, встречающееся в литературе (см., например, [7]), постулирует, что

(3) $\mathcal{R}_\Diamond \subseteq \mathcal{R}$

Оказывается, что многие из условий, налагаемых на отношения $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_\Box$ и $\mathcal{R}_\Diamond$, в том числе приведенные выше условия (1)–(3), являются mso-определимыми условиями замкнутости, определенными в разделе 3. Для того чтобы убедиться, что это так в случае условия (3), достаточно взглянуть на примеры 4 и 7. Следующая теорема показывает, что (1) и (2) также являются mso-определимыми условиями замкнутости.

ТЕОРЕМА 14. *Любое условие вида $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \circ \mathcal{P} \circ \mathcal{P}'$ является mso-определимым условием замкнутости, если $\mathcal{P}'$ рефлексивно и транзитивно.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $Comp^{\mathcal{P}'}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}' \circ \mathcal{P} \circ \mathcal{P}'$. Если $\mathcal{P}'$ рефлексивно и транзитивно, то $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}' \circ \mathcal{P} \circ \mathcal{P}'$ в силу рефлексивности $\mathcal{P}'$. Очевидно, что $\mathcal{P}' \circ \mathcal{P} \circ \mathcal{P}'$ монотонна по отношению к $\mathcal{P}$; кроме того, $Comp^{\mathcal{P}'}$ идемпотентна в силу транзитивности $\mathcal{P}'$. Это доказывает, что если $\mathcal{P}'$ рефлексивно и транзитивно, то $Comp^{\mathcal{P}'}$ — это оператор замкнутости. Условия вида $\mathcal{P}' \circ \mathcal{P} \circ \mathcal{P}' = \mathcal{P}$ могут быть выражены как условие замыкания: $Comp^{\mathcal{P}'}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$. Это условие mso-определимо; на самом деле оно определимо первопорядковой формулой:

$$\overline{Comp^{\mathcal{P}'}_{\mathcal{P}}}(z_1, z_2) = \exists x \exists y (P'(z_1, x) \wedge P(x, y) \wedge P'(y, z_2))$$

Q.E.D.

5 Погружение в двухпеременный монадический фрагмент

В настоящем разделе мы показываем, что всякая интуиционистская модальная логика Λ, определенная семантически через любые из условий истинности $(\Box_1) - (\Diamond_2)$, может быть погружена в GF^2_{mon}.

Для этого мы сначала определим при помощи взаимной индукции две функции, τ_x и τ_y, таким образом, что первопорядковая формула $\tau_v(\varphi)$ $(v \in \{x, y\})$ содержит единственную свободную переменную v, которая интуитивно соответствует точке, в которой φ оценивается в крипкевской модели. τ_x определяется следующими равенствами:

- $\tau_x(p) := P(x)$;
- $\tau_x(\sim \varphi) := \forall y (R(x, y) \to \neg \tau_y(\varphi))$;
- $\tau_x(\varphi \wedge \psi) := \tau_x(\varphi) \wedge \tau_x(\psi)$;
- $\tau_x(\varphi \vee \psi) := \tau_x(\varphi) \vee \tau_x(\psi)$;
- $\tau_x(\varphi \Rightarrow \psi) := \forall y (R(x, y) \to (\neg \tau_y(\varphi) \vee \tau_y(\psi)))$;
- $\tau_x(\Box \varphi) := \forall y (R(x, y) \to \forall x (R_\Box(y, x) \to \tau_x(\varphi)))$;
- $\tau_x(\Diamond \varphi) := \forall y (R(x, y) \to \exists x (R_\Diamond(y, x) \wedge \tau_x(\varphi)))$.

τ_y определяется аналогично, заменой x на y и y на x в вышеприведенных равенствах. Затем мы положим, что стандартным переводом интуиционистской модальной формулы φ в GF^2_{mon}

считается $\tau_x(\varphi)$. Этот перевод предполагает условия истинности ($\Box_2$) и ($\Diamond_2$). Равенства для условий ($\Box_1$) и ($\Diamond_1$) еще проще (на самом деле они совпадают с равенствами, известными из классической модальной логики):

- $\tau'_x(\Box\varphi) := \forall y(R_\Box(x,y) \to \tau'_y(\varphi))$
- $\tau'_x(\Diamond\varphi) := \exists y(R_\Diamond(x,y) \wedge \tau'_y(\varphi))$

Поскольку τ_x — это естественное обобщение стандартного перевода классической модальной логики в классическую первопорядковую логику, неудивительно, что мы можем доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 15. *Пусть φ — это интуиционистская модальная формула и M — класс моделей интуиционистской модальной логики. Пусть $\mathcal{M} \in \mathsf{M}$. Тогда $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi$ е.т.е. $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \tau_x(\varphi)$ при $\alpha(x) = w$ (где $\mathcal{M}$ — это первопорядковая модель, в которой $\mathcal{R}, \mathcal{R}_\Box$ и $\mathcal{R}_\Diamond$ интерпретируют $R, R_\Box$ и $R_\Diamond$).*

6 Разрешимость

Из теоремы 15 следует, что если проблема выполнимости формул GF^2_{mon} в классе моделей M разрешима, то проблема выполнимости интуиционистских модальных формул в M также разрешима.

Хорошо известно, что защищенный фрагмент разрешим в классе всех первопорядковых моделей (см. [2]). Разрешимость GF^2_{mon} в моделях с рефлексивными и транзитивными защитниками доказана в [10]. Из этих фактов и того, что наследственность для пропозициональных параметров входящих в произвольную формулу φ выразима в GF^2_{mon}, непосредственно следует, что базисная интуиционистская модальная логика (в которой на взаимодействие $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_\Box$ и $\mathcal{R}_\Diamond$ не наложено никаких условий) разрешима. Целью настоящей работы является обобщение этого результата на модели, в которых на взаимодействие $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_\Box$ и $\mathcal{R}_\Diamond$ наложены какие-то условия.

Теоремы 15 и 13 непосредственно дают нам нашу основную теорему

ТЕОРЕМА 16. *Пусть M — класс интуиционистских модальных моделей, определенных при помощи ацикличного множе-*

ства mso-определимых условий замкнутости, наложенных на $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_\Box$ и $\mathcal{R}_\Diamond$, таким образом, что не более, чем одно, условие замкнутости соответствует каждому из этих отношений, и пусть φ — это интуиционистская модальная формула. Тогда проблема выполнимости φ в M разрешима.

7 Примеры

В настоящем разделе мы формулируем несколько результатов о разрешимости для иллюстрации нашего метода доказательства разрешимости.

Наш первый результат — по существу, результат о разрешимости нескольких видов базовых интуиционистских модальных логик, то есть логик, в которых на $\mathcal{R}_\Diamond$ и $\mathcal{R}_\Box$ не накладываются никакие условия, за исключением условий, постулирующих, как эти отношения взаимодействуют с интуиционистским отношением достижимости $\mathcal{R}$. Этот результат обобщает ряд известных результатов о разрешимости отдельных систем интуиционистской модальной логики.

ТЕОРЕМА 17. *Любая интуиционистская модальная логика Λ с двумя модальностями $\Box$ и $\Diamond$, определенная классом моделей, в которых*

- $\mathcal{R} \circ \overline{\mathcal{R}_\Diamond} \circ \mathcal{R} = \overline{\mathcal{R}_\Diamond}$
- $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}_\Box \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}_\Box$

и в которых оценка модальных формул определяется любыми из условий ($\Box_1$), ($\Box_2$), ($\Diamond_1$), ($\Diamond_2$) (в любой комбинации, например ($\Box_1$) может встречаться в паре с ($\Diamond_2$); возможно с другими модальностями, условия истинности которых погружаемы в GF^2_{mon}), разрешима.

Доказательство. Класс моделей Λ определим следующими условиями замкнутости для $\mathcal{R}_\Box$, $\mathcal{R}_\Diamond$ и $\mathcal{R}$:

1. $\mathcal{R}$ рефлексивно и транзитивно;
2. $\mathcal{R} \circ \overline{\mathcal{R}_\Diamond} \circ \mathcal{R} = \overline{\mathcal{R}_\Diamond}$;
3. $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}_\Box \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}_\Box$.

Очевидно, что каждому из отношений $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_\Diamond$ и $\mathcal{R}_\Box$ соответствует не более одного условия и что множество условий ациклично. Мы показали в примерах 3 и 6, что условие, наложенное на $\mathcal{R}$, является условием замкнутости, и в примере 10, что оно mso-определимо. В силу теоремы 14 условия, наложенные на $\mathcal{R}_\Box$ $\mathcal{R}_\Diamond$, также являются mso-определимыми условиями замкнутости.

Мы показали, что класс моделей Λ удовлетворяет условиям теоремы 16, чего достаточно для доказательства разрешимости Λ. Q.E.D.

Наш следующий результат относится к логике, похожей на логику PLL (разрешимость которой известна из [7]) условиями, накладываемыми на отношения достижимости, но отличной от PLL отсутствием в ее семантике ненормальных миров (то есть миров, проваливающих общезначимые формулы):

ТЕОРЕМА 18. *Интуиционистская модальная логика Λ с одной модальностью $\Diamond$, определенная классом моделей, где*

$\mathcal{R}_\Diamond$ *рефлексивно и транзитивно;*

$\mathcal{R}_\Diamond \subseteq \mathcal{R}$

и где модальные формулы оцениваются согласно условию ($\Diamond_2$), разрешима.

Доказательство. Класс моделей Λ определим следующими условиями замкнутости:

1. $TC(\mathcal{R}_\Diamond) = \mathcal{R}_\Diamond$;
2. $TC(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$;
3. $Incl^{\mathcal{R}_\Diamond}(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ (см. примеры 4 и 7).

Это множество ациклично, и все условия mso-определимы. Проблема заключается в том, что на отношение $\mathcal{R}$ наложены два условия: оно должно быть замкнуто по отношению как к TC, так и к $Incl^{\mathcal{R}_\Diamond}$. Для того чтобы выполнить условия теоремы 16, мы должны соединить их в одно mso-определимое условие замкнутости. Заметим, что $TC \circ Incl^{\mathcal{P}'}$ — это оператор замыкания такой, что для любого отношения $\mathcal{P}$ имеет место

$$TC(Incl^{\mathcal{P}'}(\mathcal{P})) = \mathcal{P} \ \Leftrightarrow TC(\mathcal{P}) = \mathcal{P} \ \text{ и } \ Incl^{P'}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}.$$

Прежде всего, $TC \circ Incl^{\mathcal{P}'}$ растет и является монотонным, поскольку и TC и $Incl^{\mathcal{P}'}$ являются таковыми. Кроме того, он идемпотентен, поскольку результат применения $TC \circ Incl^{\mathcal{P}'}$ к любому отношению $\mathcal{P}$ — это транзитивное отношение, содержащее $\mathcal{P}'$, и любое последующее применение $TC \circ Incl^{\mathcal{P}'}$ не может этого изменить. Следовательно, $TC \circ Incl^{\mathcal{P}'}$ — оператор замыкания. Чтобы доказать, что замкнутость по отношению к этому оператору эквивалента замкнутости по отношению к TC и к $Incl^{\mathcal{P}'}$, заметим, что одна из импликаций очевидна: если $\mathcal{P}$ замкнуто по отношению к TC и к $Incl^{\mathcal{P}'}$, то оно замкнуто по отношению к $TC \circ Incl^{\mathcal{P}'}$. Для доказательства импликации в другую сторону сначала предположим, что

$$TC(Incl^{\mathcal{P}'}(\mathcal{P})) = \mathcal{P},$$

но что $\mathcal{P}$ не замкнуто по отношению к $Incl^{\mathcal{P}'}$, то есть что оно — собственное подмножество $Incl^{\mathcal{P}'}(\mathcal{P})$. Тогда, поскольку TC растет, $\mathcal{P}$ — это собственное подмножество $TC(Incl^{\mathcal{P}'}(\mathcal{P}))$, что противоречит предположению. Далее, предположим, что $\mathcal{P}$ не замкнуто по отношению к TC, то есть что оно — собственное подмножество $TC(\mathcal{P})$. Однако, поскольку $\mathcal{P} \subseteq Incl^{\mathcal{P}'}(P)$, то имеет место

$$TC(\mathcal{P}) \subseteq TC(Incl^{\mathcal{P}'}(P)),$$

а значит $\mathcal{P}$ — это собственное подмножество $TC(Incl^{\mathcal{P}'}(P))$, что опять-таки противоречит предположению. Это означает, что вышеприведенные условия могут быть переформулированы следующим образом:

1. $TC(\mathcal{R}_\Diamond) = \mathcal{R}_\Diamond$;
2. $TC(Incl^{\mathcal{R}_\Diamond}(\mathcal{R})) = \mathcal{R}$;

и не составляет труда показать, что второе условие mso-определимо. Q.E.D.

В заключение заметим, что мы не смогли применить предложенный нами метод к ряду описанных в литературе логик. Мы не смогли переформулировать условие $\mathcal{R}_\Box \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \circ \mathcal{R}_\Box$, определяющее интуиционистские модальные логики в [1], в виде mso-определимых условий замкнутости. Мы также не смогли применить наш метод к извествной логике IS4, определенной в [20], поскольку условия истинности формул IS4 определены на парах (w, d) (где w — возможный мир и d — элемент его множества-носителя) и, следовательно, стандартный перевод формул IS4 находится вне GF^2_{mon}.

8 Заключение

Мы описали общий метод доказательства разрешимости интуиционистских модальных логик путем погружения их в монадический двухпеременный защищенный фрагмент и демонстрации того, что условия, накладываемые на интуиционистские отношения достижимости, могут быть сформулированы как mso-определимые условия замкнутости. Мы проиллюстрировали этот метод на примере нескольких условий истиности для интуиционистских модальностей и условий истинности, накладываемых на интуиционистские отношения достижимости, встречающиеся в литератере. Несмотря на то что большинство результатов о разрешимости конкретных интуиционистских модальных логик, приведенных в качестве иллюстрации нашего метода, были получены до нас, мы уверены, что наш метод может быть использован для получения новых результатов о разрешимости, особенно в случае ненормальных логик, которые на настоящий момент недостаточно изучены. Очевидно, что наш метод также может быть применен к логикам с более чем двумя модальностями, при условии что их условия истинности могут быть погружены в GF^2_{mon}.

Литература

[1] *Alechina N., Mendler M., de Paiva V., Ritter E.* Categorical and Kripke semantics for constructive modal logics // Proceedings of the 15th International Workshop Computer Science Logic, CSL 2001. Lecture Notes in Computer Science, vol. 2142. Springer, 2001. P. 292–307.

[2] *Andréka H., van Benthem J., Németi I.* Modal Logics and Bounded Fragments of Predicate Logic // Journal of Philosophical Logic. 1998. Vol. 21. P. 217–274.

[3] *Bull R. A.* A modal extension of intuitionistic modal logic // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1965. Vol. VI. P. 142–146.

[4] *Bull R. A.* Some modal calculi based on IC // Formal Systems and Recursive Functions. North Holland, 1965. P. 3–7.

[5] *Bull R. A.* MIPC as the formalisation of an intuitionistic concept of modality // Journal of Symbolic Logic. 1966. Vol. 31. P. 609–616.

[6] *Dosen K.* Models for stronger normal intuitionistic modal logics // Studia Logica. 1985. Vol. 44. P. 39–70.

[7] *Fairtlough M., Mendler M.* Propositional lax logic // Information and Computation. 1997. Vol. 137. P.. 1–33.

[8] *Fisher Servi G.* On modal logics with intuitionistic base // Studia Logica. 1986. Vol. 27. P. 533–546.

[9] *Fitch F. B.* Intuitionistic modal logic with quantifiers // Portugaliae Mathematicae. 1948. Vol. 7. P. 113–118.

[10] *Ganzinger H., Meyer Ch., Veanes M.* The Two-Variable Guarded Fragment with Transitive Relations // Proceedings of 14th IEEE Symposium on Logic in Computer Science. IEEE Computer Society Press, 1999. P. 24–34.

[11] *Goldblatt R.* Metamathematics of modal logic // Reports on Mathematical Logic. 1976. Vol. 6, 7. P. 31–42, 21–52.

[12] *Mendler M.* Constrained Proofs: a Logic for Dealing with Behavioural Constrains in Formal Hardware Verification // Proceedings of Workshop on Designing Correct Circuits, Oxford 1990. Springer-Verlag, 1991.

[13] *Mints G.* Some calculi of modal logic // Труды математического института им. В.А. Стеклова. Т. 98. М., 1968. С. 88–111.

[14] *Moggi E.* Notions of Computation and Monads // Information and Computation. 1991. Vol. 93. P. 55–92.

[15] *Ono H.* On some intuitionistic modal logics // Publications of the Research Institute for Mathematical Science. Kyoto University. 1977. Vol. 13. P. 55–67.

[16] *Ono H., Suzuki N.-Y.* Relations between intuitionistic modal logics and intermediate predicate logics // Reports on Mathematical Logic. 1988. Vol. 22. P. 65–87.

[17] *Pfenning F., Davies R.* A judgmental reconstruction of modal logic // Mathematical Structures in Computer Science. 2001. Vol. 11. P. 511-540.

[18] *Plotkin G., Stirling C.* A framework for intuitionistic modal logic // Theoretical Aspects of Reasoning about Knowledge. 1986. P. 399–406.

[19] *Prawitz D.* Natural Deduction: A Proof-Theoretic Study. Almqvist and Wiksell, 1965.

[20] *Simpson A.* The Proof Theory and Semantics of Intuitionistic Modal Logic. Ph.D. thesis. University of Edinburgh. 1994.

[21] *Stirling C.* Modal Logics for Communicating Systems // Theoretical Computer Science. 1987. Vol. 49. P. 311–347.

[22] *Wijesekera D.* Constructive Modal Logic I // Annals of Pure and Applied Logic. 1990. Vol. 50. P. 271–301.

[23] *Wolter F., Zakharyaschev M.* On the Relation between Intuitionistic and Classical Modal Logics // Algebra and Logic. 1997. Vol. 36. P. 121–155.

[24] *Wolter F., Zakharyaschev M.* Intuitionistic modal logics // Logic and Foundations of Mathematics. Kluwer Academic Publishers, 1999. P. 227–238.

[25] *Wolter F., Zakharyaschev M.* Intuitionistic modal logics as fragments of classical bimodal logics // Orlowska E. (ed.) Logic at Work. Springer-Verlag, 1999. P. 168–186.

[26] *Zakharyaschev M., Wolter F., Chagrov A.* Advanced Modal Logic // Gabbay D. et. al (eds.) Handbook of Philosophical Logic. Kluwer Academic Publishers, 2001. Vol. 3. P. 83–266.