С.А. Павлов

БИРЕШЕТКИ ДЛЯ ЛОГИКИ БЕЛНАПА И ЕЕ ОБОГАЩЕНИЯ*

Abstract. *Distributive bilattice used to interpretation of Kleene's strong 3-valued logic, Lukasiewich's 3-valued logic, Belnap's four-valued logic, falsehood logic* FL4.

Целью этой работы является применение отношений порядка истины и порядка знания для интерпретации трехзначных логик Клини и Лукасевича и бирешеток для интерпретации четырехзначных логик: логики Белнапа и логики ложности FL4.

1. Отношения порядка истины и порядка знания и обобщение логики Клини

Для интерпретации трехзначной логики Клини и четырехзначной логики Белнапа Фиттинг использовал два отношения частичного порядка на множестве истинностных значений: отношение порядка истины $\leq_T$ и отношение порядка знания $\leq_K$.

Клини строит трехзначную логику K^S_3 с помощью регулярных таблиц для связок $\overline{\ \ }$, &, $\vee$, $\rightarrow$, $\equiv$, вводимых в сильном смысле [3].

Клини использует три истинностных значения: t («истина»), f («ложь»), u («не определено»), или в другом их толковании «известна истинность», «известна ложность», «неизвестно, истинно или ложно» (также означает отсутствие информации, заключающейся в том, что некоторая формула принимает значение t или f).

Для логики Клини имеются соответствующие ей алгебра Клини с операциями $\wedge$, $\vee$, ~ и дистрибутивная решетка [2].

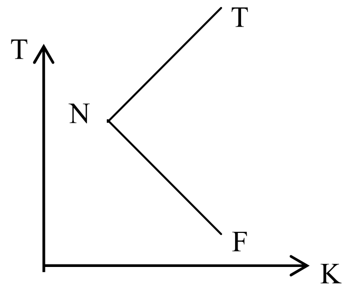
Элементы множества истинностных значений {t, f, u}, которые далее для единообразия обозначим {T, F, N}, упорядочены следующим образом:

T
|
N
|
F

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 04-03-00266.

Отношению частичного порядка $\leq$ для логики Клини K^S_3 отвечает порядок истины $\leq_T$. Тогда на множестве истинностных значений логики Клини порядок истины $\leq_T$ образует полную решетку, а пересечение $\wedge$ и объединение $\vee$ в точности соответствуют конъюнкции и дизъюнкции логики Клини.

Обратим внимание на истинностное значение u. Его смысл состоит том, что о высказываниях, оцениваемых им, мы не знаем достаточно, чтобы оценить их как истинные или ложные, в отличие от высказываний, оцениваемых значениями t или f, о которых мы знаем достаточно, чтобы их соответственно оценить. Поэтому имеет смысл ввести шкалу и порядок знания $\leq_K$. Тогда предыдущую диаграмму следует видоизменить следующим образом:

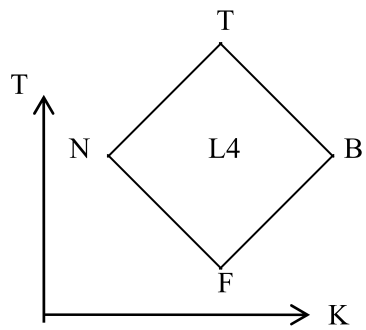


Осям абсцисс и ординат соответствуют порядок знания и порядок истины.

Отметим, что порядок знания $\leq_K$ в данном случае не задает полную решетку, а только полурешетку.

Ситуация меняется при добавлении четвертого истинностного значения B, являющегося верхней гранью (maximum) для порядка знания $\leq_K$.

В этом случае получаем две решетки, которые Белнап называет логической L4 и аппроксимационной A4, и применяет их для анализа построенной им четырехзначной логики, предназначенной для компьютерных рассуждений. Приведем диаграмму для L4.



По мнению Фиттинга [7], такое обобщение логики Клини является естественным и логика Клини является сублогикой логики Белнапа. Подобное сопоставление алгебры Клини и решеток L4 и A4 провел Мускенс в [9].

Вышеуказанные решетки образуют одну систему, которая является бирешеткой. Понятие дистрибутивной бирешетки ввел Гинсберг [8].

Бирешетка $\langle B, \leq_K, \leq_T \rangle$ определяется как непустое множество истинностных значений B с двумя частичными порядками: $\leq_K$ и $\leq_T$, – каждый из которых образует на этом множестве полную решетку.

Фиттинг [7] использует бирешетки с двумя порядками: порядком знания $\leq_K$ и порядком истины $\leq_T$.

Обычным образом задаются бинарные операции пересечения $\wedge$ и объединения $\vee$ для решетки с порядком истины $\leq_T$, а для решетки с порядком знания операции $\otimes$ и $\oplus$ определяются аналогично.

2. Обогащение логик Клини и Белнапа

Как известно, логика Клини характеризуется тем, что в ней отсутствуют аксиомы и теоремы. Поэтому имеет смысл перейти к трехзначной логике Лукасевича в такой формулировке, которая может рассматриваться как логика Клини, обогащенная операторами возможности M и необходимости L или, в немодальном истолковании этих операторов, операторами неложности $--$ и истинности | языка логики ложности FL3N [5].

Лукасевич вводит третье значение истинности $^1/_2$, исходя из утверждений «... существуют высказывания, которые не являются ни истинными, ни ложными, а лишь только *безразличными*», «Безразличные высказывания, которым онтологически соответствует возможность, имеют третье значение» [4]. В других его статьях смысл этого значения передается терминами *неопределенность* или *indetermine*.

Лукасевич конструирует логику $Ł_3$, в которой исходными связками являются $\to^{Ł}$ и отрицание $\sim$.

Другая сигнатура $\{\vee, \sim, L\}$ предложена Е. Слупецким, Г. Брылем и Т. Пруцналем в [10] для аксиоматизации трехзначной логики Лукасевича.

Оператор возможности Mp определяется через исходный оператор необходимости Lp обычным образом:

Mp = $\sim$L$\sim p$.

Унарным операторам необходимости L и возможности M, а также операторам неложности $--$ и истинности | соответствуют истинностные таблицы:

A	LA	MA
0	0	0
$^1/_2$	0	1
1	1	1

A	|A	$--$A
F	F	F
N	F	F
T	T	T

Логики с множествами связок $\{\to^{Ł}, \sim\}$ и $\{\vee, \wedge, \sim, M\}$ эквивалентны. В последней сигнатуре формулируется трехэлементная алгебра Лукасевича

$$L_3 = <\{1, {}^1/_2, 0\}, \vee, \wedge, \sim, M, 1>.$$

Можно также показать, что трехвалентные логики с множествами связок $\{\to^{Ł}, \sim\}$ и $\{\vee, \wedge, \sim, L\}$ эквивалентны. Тогда сформулируем алгебру Лукасевича как

$$L_3 = <\{1, {}^1/_2, 0\}, \vee, \wedge, \sim, L, 1>.$$

Для логик $Ł_3$ и $K^S{}_3$ имеется известное соотношение:

Трехзначная логика Лукасевича $Ł_3$ *функционально эквивалентна трехзначной логике Клини с сильными связками* $K^S{}_3$, *обогащенной связкой полной эквивалентности*.

Тогда возможно получить соотношение алгебр Лукасевича и Клини, такое, что $Ł_3$ есть алгебра Клини, снабженная операцией L, для которой имеют место следующие равенства.

1. $x \vee \sim Lx = 1$,
2. $x \wedge \sim x = x \wedge \sim Lx$,
3. $LLx = Lx$,
4. $L(x \wedge y) = Lx \wedge Ly$.
5. $L(x \vee y) = Lx \vee Ly$.

Имеется также соотношение функциональной эквивалентности для логик $Ł_3$ и FL3N [5]. Отметим, что трехзначная логика FL3N, является сублогикой логики ложности FL4.

Подобно тому, как логика Лукасевича получается посредством обогащения логики Клини $K^S{}_3$ оператором необходимости, обогащение логики Белнапа оператором истинности | ведет к логике ложности FL4.

Соответственно алгебра ложности FA4 есть логическая решетка L4 снабженная операцией |, для которой имеют место следующие равенства.

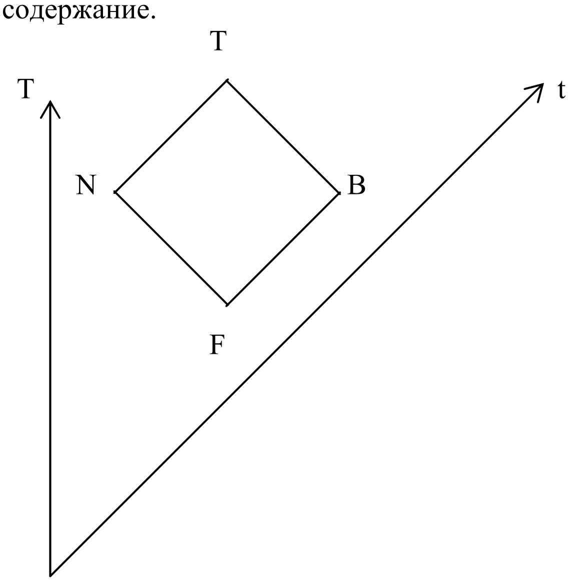
1. $|\,|\,x = |\,x$,
2. $(\,|\,x \vee \sim |\,x) = 1$,
3. $(\,|\,x \wedge \sim |\,x) = 0$,

4. $|\,(x \wedge y) = |\,x \wedge |\,y$,
5. $|\,(x \vee y) = |\,x \vee |\,y$.

Н. Белнап отмечает необходимость отличать знак «говорит только Истину» от знака «по меньшей мере говорит Истину», но не предлагает формального выражения их различения. В языке логики FL4 это отличие в оценках предложений выражается употреблением двух различных операторов: оператора строгой истинности $\lceil$ и оператора истинности $|$.

Подобно различению истинности и неложности от истинности можно различить отношение порядка истины $\leq_T$, отвечающее логической решетке L4, и отношение порядка истинности $\leq_t$, соответствующее сравнению истинностных значений формул, префиксированных оператором истинности. Тогда порядку истины $\leq_T$ отвечает ось T, а порядку истинности $\leq_t$ отвечает ось t.

Это позволяет элиминировать эпистемическую компоненту из характеристик формул языка логики, оставив только логическое содержание.



Отметим, что логикой, в которой таблица для импликации может быть сопоставлена порядку истинности $\leq_t$, может быть логика, предложенная В.М. Поповым в [6].

Приведем таблицы для импликации $\supset$ и отрицания $\neg$ в четырехзначной паранормальной логике AVP [6] и соответствующие им таблицы для импликации истинности $\rightarrow^{t}$, сопоставляемой порядку истинности $\leq_t$, и отрицания $\sim$ в логике ложности FL4 [5].

$\supset$	1	0	f	t
1	1	0	0	1
0	1	1	1	1
f	1	1	1	1
t	1	0	0	1

A	$\neg$A
1	0
0	1
f	f
t	t

$\to^t$	T	F	N	B
T	T	F	F	T
F	T	T	T	T
N	T	T	T	T
B	T	F	F	T

A	~A
T	F
F	T
N	N
B	B

В заключение отметим, что порядок истинности $\leq_t$ не образует решетки, следовательно, полученная система слабее бирешетки, тем не менее в ней можно выразить все логически значимые утверждения логики Белнапа и логики ложности FL4.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белнап Н.* Как нужно рассуждать компьютеру // Белнап Н., Стил Т. Логика вопросов и ответов. М., 1981.
2. *Карпенко А.С.* Многозначные логики // Логика и компьютер. Вып. 4. М., 1997.
3. *Клини С.К.* Введение в метаматематику. М., 1957.
4. *Лукасевич Я.* О детерминизме // Логические исследования. Вып. 2. М., 1993. С. 190-205.
5. *Павлов С.А.* Логика с операторами истинности и ложности. М., 2004.
6. *Попов В.М.* Об одной четырехзначной паранормальной логике // Логика и В.Е.К. М., 2003. С. 192-195.
7. *Fitting M.C.* Kleene's logic, generalized // Journal of Logic and Computation. 1992. Vol. 1. P. 797-810.
8. *Ginsberg M.L.* Multivalued logics: a uniform approach to reasoning in artificial intelligence // Computational Intelligence. 1988. Vol. 4. P. 265-316.
9. *Muskens R.A.* Meaning and partiality. Amsterdam, 1989.
10. *Słupecki J., Bryll G., Prucnal T.* Some Remarks on Three-valued Logic of J. Łukasiewicz // Studia Logica. 1967. Vol. XXI. P. 45-70.