И.А. Карпенко

ПОГРУЖАЮЩИЕ ОПЕРАЦИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Abstract. *Known definitions of translations between logic systems are considered and compared. Examples of embeddings of classical logic into intuitionistic logic are resulted. Embedding of classical propositional logic into a number of paraconsistent logics is constructed.*

В современной логике все чаще применяются различного рода переводы для изучения логических систем. Использование специального вида переводов – погружающих операций – позволяет устанавливать разрешимость и неразрешимость логических систем, проводить доказательства отделимости фрагментов логических исчислений, интерпретировать одно логическое исчисление в семантике другого логического исчисления, выявлять дедуктивные возможности формальных теорий.

Если в лингвистике теория перевода начала разрабатываться еще в XVI веке, то в логике к ее формированию приступили только в середине XX века [1]. Естественно, первые логические переводы были предприняты намного раньше [2]. Хотя до сих пор не существует завершенной логической теории перевода, появление большого количества работ, посвященных данной проблеме, свидетельствует о ее актуальности.

В логике перевод одного исчисления в другое осуществляется посредством отображения, сопоставляющего формулам языка первого исчисления формулы языка второго исчисления. Это отображение, вслед за Н.А. Шаниным, принято называть "погружающей операцией", хотя отображение далеко не всегда является операцией (погружающие операции строят также для исчислений, сформулированных в разных языках). Кроме того, вслед за В.А. Смирновым, различают перевод и погружающую операцию.

Применение погружающих операций для изучения логических систем оправдывается некоторыми свойствами логических систем, которые возможно устанавливать посредством погружающих операций. Имеет смысл рассматривать эти свойства в философском и техническом аспектах.

В философском плане, погружение позволяет изображать одну теорию в терминах другой. Погружение неинтерпретированного исчисления в исчисление, наделенное семантикой, решает проблему семантической осмысленности формул первого из этих исчислений и способствует тем самым пониманию того, какова природа логических отношений, формализованных в этом исчислении.

Встает вопрос о роли отрицания в языке: погружая исчисление, язык которого содержит негацию, в другое позитивное исчисление или собственную позитивную часть, мы получаем возможность формулировать истины первого исчисления только утвердительными выражениями, то есть не говоря "не".

В техническом аспекте, как уже говорилось, следует обратить внимание на проблему разрешимости. Так, в результате погружения какого-либо исчисления в какое-либо разрешимое исчисление положительно решается вопрос о разрешимости первого, в результате погружения какого-либо неразрешимого исчисления C_1 в какое-либо исчисление C_2 устанавливается неразрешимость исчисления C_2, погружение исчисления C в его фрагмент, язык которого не содержит некоторых логических констант, имеющихся в языке L исчисления C, позволяет изображать теоремы исчисления C теоремами этого же исчисления, записанными на языке, число логических констант которого меньше, чем в L. Например, В.М. Попов [3] погружает исчисление, аксиоматизирующее классическую пропозициональную логику, в его импликативный фрагмент, а также в импликативный фрагмент интуиционистской пропозициональной логики. С использованием погружающих операций доказывается отделимость фрагментов в исчислениях, что так же было показано В.М. Поповым [3].

Указанные здесь свойства имеют большое значение для понимания логических систем, и, как становится ясно в современной логике, аппарат погружающих операций удобен для доказательства наличия этих свойств.

Определением погружающих операций и систематизацией погружений интересовались Д. Правиц и П. Малмнас [5], В. Карниэлли и Д`Оттавиано [6], Р. Эпштейн [7]. Последний предложил определение перевода, претендующее на универсальность.

Впервые погружающая операция была введена, как утверждает В.А. Смирнов [8, с.120], А.Н. Колмогоровым [2] в 1925 году. В [2] строится погружение классической арифметики в интуиционистскую арифметику.

Рассмотрим и сравним самые важные, на наш взгляд, определения погружающей операции. Для этого приведем определение погружающей операции, принадлежащее В.А. Смирнову [8], и осуществим реконструкции принадлежащих Р. Вуйцицкому [9] и Р. Эпштейну [7] определений погружающей операции.

Определение В.А. Смирнова из [8]:

Пусть T_1 и T_2 теории, сформулированные соответственно в языках L_1 и L_2 с соответствующими логиками. Пусть φ – рекурсивная функция, сопоставляющая формулам языка L_1 формулы языка L_2 для всякой L_1-формулы A. Функция φ называется переводом теории T_1 в T_2, если выполняется условие: если $A \in T_1$, то $\varphi(A) \in T_2$. Если выполняется дополнительное условие: если $\varphi(A) \in T_2$, то $A \in T_1$, то рекурсивная функция φ называется погружающей операцией теории T_1 в теорию T_2. Теория T_1 погружаема в теорию T_2, если и только если существует рекурсивная функция, погружающая T_1 в T_2.

Функция φ называется погружением исчисления C_1, язык которого есть L_1, в исчисление C_2, язык которого есть L_2, если для всякой L_1-формулы α выполняется следующее условие:

$\vdash_{C1} A$, т.т.т. $\vdash_{C2} \varphi(A)$.

Реконструкция определения Р. Вуйицкого погружающей операции.

Пусть языки L_1 и L_2 – стандартно определяемые пропозициональные языки и множество $\{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ всех пропозициональных переменных языка L_1 равно множеству всех пропозициональных переменных языка L_2, C_1 есть пропозициональное исчисление, язык которого есть L_1, C_2 есть пропозициональное исчисление, язык которого есть L_2, T_1 есть C_1-теория и T_2 есть C_2-теория. i-погружением (i – натуральное число) языка L_1 в язык L_2 называется отображение φ множества всех L_1-формул во множество всех L_2-формул, если выполняется следующее условие:

(1) существует формула ϕ в L_2 от одной пропозициональной переменной p_i такая, что для всякой пропозициональной переменной p, $\varphi(p)=[p_i/p]\phi$, где $[p_i/p]\phi$ есть результат подстановки p вместо p_i в ϕ,

(2) для всякой k-местной ($k \geq 0$) связки r_i языка L_1 существует формула ϕ_i языка L_2 такая, что для всяких формул $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ языка L_1

$$\varphi(r_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_k))=[p_1/\varphi(\alpha_1), \ldots, p_k/\varphi(\alpha_k)]\phi_i,$$

где $[p_1/\varphi(\alpha_1), \ldots, p_k/\varphi(\alpha_k)]\phi_i$ есть результат подстановки $\varphi(\alpha_1)$ вместо p_1, …, $\varphi(\alpha_k)$ вместо p_k в ϕ.

Погружающей операцией теории T_1 в теорию T_2 называется любое i-погружение языка L_1 в язык L_2 такое, что для всякой формулы α языка L_1 верно следующее:

$$\alpha \in T_1 \text{ т.т.т. } \varphi(\alpha) \in T_2.$$

Погружающей операцией исчисления C_1 в исчисление C_2 называется i-погружение языка L_1 в язык L_2 такое, что для всякой формулы α языка L_1 верно следующее:

$$\vdash_{C1} \alpha, \text{ т.т.т. } \vdash_{C2} \varphi(\alpha).$$

Реконструкция определения Р. Эпштейна погружающей операции:

Пусть $L_{\supset\neg}$ есть стандартно определяемый пропозициональный язык, множество всех логических констант которого есть $\{\supset,\neg\}$, при этом $\supset$ – бинарная, а $\neg$ – унарная логические связки языка $L_{\supset\neg}$. Пусть L_1 и L_2 – стандартно определяемые языки, C_1 есть пропозициональное исчисление, язык которого есть L_1, C_2 есть пропозициональное исчисление, язык которого есть L_2.

Погружением исчисления C_1 в исчисление C_2 назовем отображение φ множества всех L_1-формул во множество всех L_2-формул такое, что для всякой L_1-формулы α и всякого множества Γ L_1-формул выполняется следующее условие:

$$\Gamma \vdash_{C1}\alpha, \text{ т.т.т. } \varphi(\Gamma) \vdash_{C2}\varphi(\alpha),$$

где $\varphi(\Gamma)=\{\varphi(\alpha):\alpha\in\Gamma)$.

Пусть A, B и C есть L_1-формулы. i-грамматическим A-B-C отображением (i – натуральное число) языка $L_{\supset\neg}$ в язык L_1 такой, что множество всех пропозициональных переменных языка $L_{\supset\neg}$ равно множеству всех пропозициональных переменных языка L_1, по Эпштейну, называется отображение * множества всех $L_{\supset\neg}$-формул во множество всех L_1-формул, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\varphi(p)=[p_i/p]A$, где $[p_i/p]A$ есть результат подстановки p вместо p_i в формулу A,

2) $\varphi(\alpha\supset\beta)=[p_1/\varphi(\alpha),p_2/\varphi(\beta)]B$, где α и β есть формулы языка $L_{\supset\neg}$, а $[p_1/\varphi(\alpha), p_2/\varphi(\beta)]B$ есть результат подстановки $\varphi(\alpha)$ вместо p_1 и $\varphi(\beta)$ вместо p_2 в формулу B,

3) $\varphi(\neg\alpha)=[p_1/\varphi(\alpha)]C$, где α есть формула языка $L_{\supset\neg}$, а $[p_1/\varphi(\alpha)]C$ есть результат подстановки $\varphi(\alpha)$ вместо p_1 в формулу C.

Грамматическим погружением исчисления C_1, язык которого есть $L_{\supset\neg}$ в исчисление C_2, языку которого принадлежат все те и только те пропозициональные переменные, которые принадлежат языку $L_{\supset\neg}$, по Эпштейну, называется погружение φ исчисления C_1 в исчисление C_2 такое, что для некоторых L_1-формул A, B и C и некоторого натурального числа i φ есть i-грамматическое A-B-C-отображение языка $L_{\supset\neg}$ в язык исчисления C_2.

Грамматическое отображение называется гомофонным, если каждая связка отображается сама в себя. Грамматическое погружение есть грамматическое отображение, которое является погружением.

Легко заметить, что В.А. Смирнов определяет погружение для теорий и исчислений, Вуйцицкий – для языков, теорий и исчислений, Эпштейн для исчислений. Таким образом, и В.А. Смирнов и Вуйцицкий и Эпштейн определяют погружение исчисления в исчисление. Сравним эти определения. Определения Вуйцицкого и Эпштейна отличаются от определения В.А. Смирнова по существу только наличием требования индуктивного определения погружающей операции. Поэтому всякое погружение в смысле Вуйицкого и всякое грамматическое погружение в смысле Эпштейна является погружением в смысле В.А. Смирнова. Эпштейн в определении погружающей операции ставит обязательным условием того, что отображение φ есть грамматическое погружение исчисления C_1 в исчисление C_2, более сильное требование, чем в соответствующем определении Вуйицкий. Требование Эпштейна таково: для всякого множества Γ формул языка исчисления C_1 и всякой формулы α данного языка верно, что $\Gamma \vdash_{C1} \alpha$, т.т.т. $\varphi(\Gamma) \vdash_{C2} \varphi(\alpha)$. Согласно определению Вуйицкого, погружение φ исчисления C_1 в исчисление C_2 удовлетворяет следующему условию: $\vdash_{C1} \alpha$, т.т.т. $\vdash_{C2} \varphi(\alpha)$. В пункте (1) определения погружающей операции по Вуйицкому требуется существование формулы ϕ от одной пропозициональной переменной p_0 такой, что для всякой пропозициональной переменной p, $\varphi(p)=[p_i/p]\phi$, где $[p_i/p]\phi$ есть результат подстановки p вместо p_i в ϕ. Из текста Эпштейна не вполне ясна его позиция относительно аналогичного требования в пункте 1) определения погружающей операции, но если допустить, что он выдвигает такое же требование, то справедливо заключить, что всякое грамматическое погружение в смысле Эпштейна является погружением в смысле Вуйицкого. В противном случае, если Эпштейн не выдвигает такое требование, можно предположить, что существуют исчисления, для которых имеет место погружение в смысле Вуйицкого, но не имеет места грамматическое погружение в смысле Эпштейна, и существуют исчисления, для которых имеет место грамматическое погружение в смысле Эпштейна, но не имеет места погружение в смысле Вуйицкого.

Рассмотрим примеры погружения классической логики в интуиционистскую логику.

Для этого зададим исчисления PC (классическое пропозициональное исчисление) и Int (интуиционистское пропозициональное исчисление), следуя [10].

Язык этих исчислений есть $L_{\wedge\vee\supset\neg}$. Исчисления PC и Int являются исчислениями гильбертовского типа со стандартно определяемым понятием доказательства, а множеству всех правил вывода каждого из этих исчислений принадлежит только одно правило – правило модус поненс в языке $L_{\wedge\vee\supset\neg}$. Поэтому для задания любого из этих исчислений остается определить множество всех его аксиом.

Множество всех аксиом исчисления PC есть множество всех $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формул, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих видов (A, B и C – $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулы):

1.$A\supset(B\supset A)$,
2.$(A\supset(B\supset C))\supset((A\supset B)\supset(A\supset C))$,
3.$(A\wedge B)\supset A$,
4.$(A\wedge B)\supset B$,
5.$A\supset(B\supset(A\wedge B))$,
6.$A\supset(A\vee B)$,
7.$B\supset(A\vee B)$,
8.$(A\supset C)\supset((B\supset C)\supset((A\vee B)\supset C))$,
9.$(A\supset B)\supset((A\supset(\neg B))\supset(\neg A))$,
10.$(\neg(\neg A))\supset A$.

Множество всех аксиом исчисления Int есть объединение множества всех формул, каждая из которых является формулой хотя бы одного из перечисленных выше видов 1.-8. с множеством всех формул вида: 9`.$(\neg A)\supset(A\supset B)$.

Гливенко [11] в 1929 году предложил операцию, погружающую классическую пропозициональную логику в интуиционистскую логику, язык которых есть $L_{\wedge\vee\supset\neg}$. Эта погружающая операция сопоставляет каждой $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формуле A $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулу $\neg(\neg A)$. Используя введенную терминологию, результат Гливенко можно сформулировать в виде следующей теоремы:

T1. $\Gamma \vdash_{PC} A$ т.т.т. $\neg(\neg\Gamma) \vdash_{Int} \neg(\neg A)$.

Здесь $\neg(\neg\Gamma) = \{\neg(\neg B)\colon B\in\Gamma\}$.

Любопытен факт, что аналог погружающей операции, предложенной Гливенко, не является операцией, погружающей классическую первопорядковую логику в интуиционистскую первопорядковую логику.

Погружаюшщая операция Гливенко не является погружающей операцией в смыслах Р. Вуйицкого и Р. Эпштейна.

В 1933 году Гёдель показал [12], что Int может рассматриваться как расширение классической пропозициональной логики, сформулированной в языке $L_{\wedge\neg}$. Уточним сказанное. Пусть $PC_{\wedge\neg} = \{A\colon A$ – формула в $L_{\wedge\neg}$ и $\vdash_{PC} A\}$. Тогда результат Гёделя из [12] можно сформулировать в виде следующей теоремы T2.

T2. Для всякой $L_{\wedge\neg}$-формулы A верно, что $A\in PC_{\wedge\neg}$ т.т.т. $\vdash_{Int} A$.

Доказательство этой теоремы справа налево очевидно, так как множество всех теорем Int включается во множество всех теорем PC. Докажем, что если $A\in PC_{\wedge\neg}$, то $\vdash_{Int} A$.

Доказательство проводится индукцией по построению $L_{\wedge\neg}$-формулы A.

Имеем три возможности: 1) A есть пропозициональная переменная, 2) A есть $\neg B$, 3) A есть $B_1\wedge B_2$.

Рассмотрим 1). В этом случае требуется доказать, что если $p_i \in PC_{\wedge\neg}$, то $\vdash_{Int} p_i$. Но ни одна пропозициональная переменная не может быть теоремой исчисления PC. Поэтому, в силу известных свойств классической импликации, получаем, что, то $\vdash_{Int} p_i$.

Рассмотрим 2). В этом случае требуется доказать, что если $\neg B \in PC_{\wedge\neg}$, то $\vdash_{Int} \neg B$. Но это верно в силу результата Гливенко [11] о том, что для всякой формулы $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулы A $\vdash_{PC} \neg A$ т.т.т. $\vdash_{Int} \neg A$.

Рассмотрим 3). В этом случае требуется доказать, что если $B_1 \wedge B_2 \in PC_{\wedge\neg}$, то $\vdash_{Int} B_1 \wedge B_2$. В силу известных свойств $PC_{\wedge\neg}$ верно, что a) если $B_1 \wedge B_2 \in PC_{\wedge\neg}$, то $B_1 \in PC_{\wedge\neg}$ и $B_2 \in PC_{\wedge\neg}$.

По индуктивному допущению имеем: b) если $B_1 \in PC_{\wedge\neg}$, то $\vdash_{Int} B_1$ и если $B_2 \in PC_{\wedge\neg}$, то $\vdash_{Int} B_2$.

Известно, что c) $\vdash_{Int} B_1 \supset (B_2 \supset (B_1 \wedge B_2))$. Из a), b) и c) по определению доказательства в Int получаем, что $\vdash_{Int} B_1 \wedge B_2$.

Таким образом, теорема T2 доказана.

Простота этого доказательства демонстрирует удобство использования одних результатов о погружениях для построения других погружений.

В 1952 году Я. Лукасевич [13] погрузил (нижеследующая теорема T3) PC в Int посредством следующей погружающей операции *:

$(p)^* = p$

$(A \wedge B)^* = (A)^* \wedge (B)^*$

$(\neg A)^* = \neg (A)^*$

$(A \vee B)^* = \neg((\neg(A)^*) \wedge (\neg(B)^*))$

$(A \supset B)^* = \neg((A)^* \wedge (\neg(B)^*))$,

T3: $\vdash_{PC} A$ т.т.т. $\vdash_{Int} (A)^*$.

Как утверждает Эпштейн (см. [7, p. 213]), погружение в смысле T3 не сохраняет отношения присоединения следствий, так как следующее утверждение (♦) неверно: $\forall\Gamma\forall A$ (если Γ есть множество $L_{\supset\neg\wedge\vee}$-формул и A есть $L_{\supset\neg\wedge\vee}$-формула, то $\Gamma \vdash_{PC} A$ т.т.т. $\Gamma^* \vdash_{INT} A^*$.

Покажем, что утверждение (♦) неверно.

Допустим, что (♦). Тогда (i) $\neg\neg p_1 \vdash_{PC} p_1$ т.т.т. $(\neg\neg p_1)^* \vdash_{Int} (p_1)^*$.

(ii) $(\neg\neg p_1)^* = p_1$ – по определению операции *,

(iii) $(p_1)^* = p_1$ – по определению операции *,

(iv) $\neg\neg p_1 \vdash_{PC} p_1$ т.т.т. $\neg\neg p_1 \vdash_{Int} p_1$ – из (i), (ii) и (iii).

Известно, что (v) $\neg\neg p_1 \vdash_{PC} p_1$,

(vi) $\neg\neg p_1 \vdash_{Int} p_1$ – из (iv) и (v),

(vii) $\vdash_{Int} \neg\neg p_1 \supset p_1$ – из (vi) в силу теоремы дедукции для Int.

Однако известно, что $\vdash_{Int} \neg\neg p_1 \not\supset p_1$.

Таким образом, допущение (♦) неверно.

Еще одно погружение PC в Int, предложенное Генценом в 1936 году [14], сохраняет отношение присоединения следствий. Им строится определяемая ниже погружающая операция ° и доказывается нижеследующая теорема.

$(p)^\circ = \neg\neg p$

$(A \wedge B)^\circ = (A)^\circ \wedge (B)^\circ$

$(\neg A)^\circ = \neg (A)^\circ$

$(A \vee B)^\circ = \neg((\neg A)^\circ \wedge (\neg B)^\circ)$

$(A \supset B)^\circ = (A)^\circ \supset (B)^\circ$,

T4: $\Gamma \vdash_{PC} A$ т.т.т. $(\Gamma)^\circ \vdash_{Int} (A)^\circ$.

В 2000 году вышла работа [3] В.М. Попова, в которой классическая пропозициональная логика погружается в импликативный фрагмент интуиционистской пропозициональной логики.

В [3] классическая пропозициональная логика представлена посредством исчисления $Cl_{\supset f}$, язык которого есть $L_{\supset f}$. Аксиомами исчисления $Cl_{\supset f}$ являются те и только те $L_{\supset f}$-формулы, каждая из которых имеет вид $A \supset (B \supset A)$ или $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$ или $((A \supset f) \supset f) \supset A$. Правило вывода: $A, A \supset B / B$ в $L_{\supset f}$.

Импликативный фрагмент интуиционистской пропозициональной логики представлен в [3] исчислением $Int_{\supset}$. Его аксиомами являются те и только те $L_{\supset}$-формулы, каждая из которых имеет вид $A \supset (B \supset A)$ или $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$. Правило вывода: $A, A \supset B / B$ в $L_{\supset}$.

В [3] определяются следующие операции: Сд (впервые предложенная В.М. Поповым в [15]) и T, где Сд есть отображение множества всех $L_{\supset f}$-формул во множество всех $L_{\supset}$-формул, а T есть отображение множества всех $L_{\supset f}$-формул во множества всех $L_{\supset}$-формул.

$Сд(f) = p_1$,

$Сд(p_i) = p_{i+1}$ (где $i \in \{1,2,3,\ldots\}$),

$Сд(A \supset B) = Сд(A) \supset Сд(B)$.

$T(p_1) = p_1$,

$T(p_i) = (p_i \supset p_1) \supset p_1$ (где $i \in \{1,2,3,\ldots\}$),

$T(A \supset B) = T(A) \supset T(B)$.

Далее доказывается теорема (в нашей нотации T5).

T5: $\vdash_{Cl\supset f} A$ т.т.т. $\vdash_{Int\supset} T(Сд(A))$.

В качестве еще одного примера самостоятельно докажем теорему о погружении. Посредством описываемой ниже операции классическое пропозициональное исчисление из [10], обозначаемое PC, погружается в исчисления I_0, I_1, I_2 и I_3 из [16].

Все упомянутые выше исчисления являются исчислениями гильбертовского типа со стандартно определяемым понятием доказательства. Множеству всех правил вывода каждого из этих исчислений принадлежит только одно правило – правило модус поненс в соответствующем языке.

Исчисление PC. Множество всех аксиом исчисления PC есть множество всех формул, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих видов:

1. $A\supset(B\supset A)$,
2. $(A\supset(B\supset C))\supset((A\supset B)\supset(A\supset C))$,
3. $(A\wedge B)\supset A$,
4. $(A\wedge B)\supset B$,
5. $A\supset(B\supset(A\wedge B))$,
6. $A\supset(A\vee B)$,
7. $B\supset(A\vee B)$,
8. $(A\supset C)\supset((B\supset C)\supset((A\vee B)\supset C))$,
9. $(A\supset B)\supset((A\supset(\neg B))\supset(\neg A))$,
10. $(\neg(\neg A))\supset A$.

Исчисления I_0, I_1, I_2 и I_3. Множество всех аксиом исчисления I_0 есть объединение множества всех аксиом исчисления PC, не содержащих $\neg$, со множеством всех формул, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих видов:

1\`. $(\neg(D\supset D))\supset B$,
2\`. $(A\supset(\neg(B\supset B)))\supset(\neg A)$,
3\`. $(A\supset B)\supset((B\supset(\neg A))\supset(\neg A))$,
4\`. $A\supset((\neg A)\supset(\neg(B\supset B)))$,
5\`. $((B\supset A)\supset A)\supset((\neg A)\supset B)$

Здесь A не является пропозициональной переменной.

Множество всех аксиом исчисления I_1 получаем из множества всех аксиом исчисления I_0 за счет замены схем 2\` и 3\` на схемы 2\`\`. $(D\supset(\neg(B\supset B)))\supset(\neg D)$ и 3\`\`. $(D\supset B)\supset((B\supset(\neg D))\supset(\neg D))$ соответственно.

Множество всех аксиом исчисления I_2 получаем из множества всех аксиом исчисления I_0 за счет замены схем 4\` и 5\` на схемы 4\`\`. $D\supset((\neg D)\supset(\neg(B\supset B)))$ и 5\`\`. $((B\supset D)\supset D)\supset((\neg D)\supset B))$ соответственно.

Множество всех аксиом исчисления I_3 есть объединение множества всех аксиом исчисления I_0 со множеством всех формул вида: 6\`. $A\supset((\neg A)\supset((B\supset(\neg B))\supset(\neg B)))$.

Используя тот факт, что все рассматриваемые здесь логики[1], соответствующие исчислениям I_0, I_1, I_2, I_3, являются конечнознач-

---

[1] Логикой, соответствующей данному исчислению, называется множество всех теорем этого исчисления.

ными (см. [16], [17] и [18]), нетрудно доказать, что все они являются паралогиками в том смысле, что каждая из этих логик паранепротиворечива или параполна. Например, простое доказательство того, что логика I_2 является параполной, дано в [18, с. 61-62]. Можно доказать, что логика I_0 является паранепротиворечивой и параполной; логика I_1 является паранепротиворечивой, но не является параполной; логика I_2 является параполной, но не является паранепротиворечивой; логика I_3 является паранепротиворечивой и параполной. Замечание: из определений исчислений I_0, I_1, I_2 и I_3 следует, что множество всех теорем исчисления I_0 включается во множество всех теорем каждого из исчислений I_1, I_2 и I_3.

Определение операции ψ:

$\psi(p_i) = \neg p_i$ для всякой пропозициональной переменной p_i,

$\psi(A \bullet B) = \psi(A) \bullet \psi(B)$, где $\bullet \in \{\wedge, \vee, \supset\}$, а A и B произвольные формулы,

$\psi(\neg A) = \neg\psi(A)$, где A произвольная формула.

Интересен тот факт, что погружение, осуществляемое посредством этой операции, является гомофонным в смысле Эпштейна.

Теорема (о погружении исчисления PC в исчисление I_i ($i \in \{0,1,2,3\}$): для всякого i из $\{0,1,2,3\}$ и всякой формулы α верно, что $\vdash_{PC}\alpha$ т.т.т. $\vdash_{Ii}\psi(\alpha)$.

Для доказательства теоремы 1 достаточно доказать следующие утверждение (I) и утверждение (II).

Утверждение (I): для всякого i из $\{0,1,2,3\}$ и всякой формулы α верно, что если $\vdash_{PC}\alpha$, то $\vdash_{Ii}\psi(\alpha)$.

Утверждение (II): для всякого i из $\{0,1,2,3\}$ и всякой формулы α верно, что если $\vdash_{Ii}\psi(\alpha)$, то $\vdash_{PC}\alpha$.

Доказательство утверждения (I) проводится возвратной индукцией по длине PC-доказательства формулы α.

Доказательству утверждения (II) предпосылаются лемма 1, лемма 2 и лемма 3.

Лемма 1: для всякого i из $\{0,1,2,3\}$ и всякой формулы α верно, что если $\vdash_{Ii}\alpha$, то $\vdash_{PC}\alpha$.

Доказательство этой очевидной леммы, осуществляемое возвратной индукцией по длине доказательства в исчислении I_i ($i \in \{0,1,2,3\}$) формулы α, здесь не приводится.

Доказательство нижеследующей леммы 2 имеет семантический характер, поэтому нам потребуются определения некоторых семантических понятий. Оценкой назовем любое отображение множества $\{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ всех пропозициональных переменных в $\{0, 1\}$. Оценку ν` назовем обратной к оценке ν , если для всякой пропозициональной переменной p_i верно, что

$$v'(p)=\begin{cases}1,\ если\ \ v(p_i)=0\\ 0,\ если\ \ v(p_i)=1.\end{cases}$$

Означиванием при оценке ν назовем отображение $|\ |\nu$ множества всех формул в $\{0, 1\}$, удовлетворяющее следующим условиям для всякой пропозициональной переменной p_i и всяких формул A и B:

1) $|p_i|\nu=\nu(p_i)$,
2) $|A\supset B|\nu = 1$ т.т.т. $|A|\nu = 0$ или $|B|\nu = 1$,
3) $|A\wedge B|\nu = 1$ т.т.т. $|A|\nu = 1$ и $|B|\nu = 1$,
4) $|A\vee B|\nu = 1$ т.т.т. $|A|\nu = 1$ или $|B|\nu = 1$,
5) $|\neg A|\nu = 1$ т.т.т. $|A|\nu = 0$.

Лемма 2: для всякой оценки ν и всякой формулы α верно, что $|\alpha|\nu = |\psi(\alpha)|\nu`$.

Доказательство леммы 2 проводится индукцией по построению формулы α.

Лемма 3: для всякой формулы α верно, что если $\vdash_{PC}\psi(\alpha)$, то $\vdash_{PC}\alpha$.

Доказательство легко проводится методом от противного.

(1) $\vdash_{PC}\psi(\alpha)$ (условие),
(2) $\nvdash_{PC}\alpha$ (допущение),
(3) $|\alpha|\nu = 0$ (из (2) по теореме о полноте для PC),
(4) $|\psi(\alpha)|\nu` = 0$ (из (3) по лемме 2),
(5) $\nvdash_{PC}\psi(\alpha)$ (из (4) по теореме о непротиворечивости PC),
(6) $\vdash_{PC}\alpha$ (противоречие (1) и (5)).

Лемма 3 доказана.

Докажем утверждение (II).

(1) $\vdash_{Ii}\psi(\alpha)$ (условие),
(2) $\vdash_{PC}\psi(\alpha)$ (из (1) и леммы 1),
(3) $\vdash_{PC}\alpha$ (из (2) и леммы 3).

Утверждение (II) доказано.

Из утверждений (I) и (II) получаем теорему. Таким образом, теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шанин Н.А.* О некоторых логических проблемах арифметики // Тр. мат. ин-та им. В.А.Стеклова. 1955. № 43.
2. *Колмогоров А.Н.* О принципе tertium non datur // Мат. сб. 1925. № 32.
3. *Попов В.М.* Погружение классической пропозициональной логики в ее импликативный фрагмент и в импликативный

фрагмент интуиционистской пропозициональной логики // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. М., 2000.
4. *Попов В.М.* Погружение интуиционистского пропозиционального исчисления в его позитивный фрагмент // Логические исследования. М.: Наука, 2001. Вып. 8. С.183-184.
5. *Prawitz D. & Malmnвs P.E.* A survey of some connections between classical, intuitionistic and minimal logic. Amsterdam: North-Holland. 1968. P. 215-229.
6. *Carnielli W.A. &D`Ottaviano M.L.* Translations between logical systems: A MANIFESTO // Logique et Analyse. 1977. N 157. P. 67-81.
7. *Epstein R.L.* The semantic foundations of logic. Vol.1: Propositional logic. Dordrecht: Kluwer, 1990.
8. *Смирнов В.А.* Логические методы анализа научного знания. М., 2002. С. 119-129.
9. *Wmjcicki R.* Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations. Dordrecht: Kluwer, 1988.
10. *Клини С.К.* Введение в метаматематику. М., 1957. С. 77.
11. *Glivenko M.* Sur quelques points de la logique de M.Brouwer. Acadèmie Royale de Belgique. Bulletins de la classe des sciences. Ser. 5. Vol. 15. P. 183-188.
12. *Gцdel K.* Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie // Ergebnisse eines mathematischen Kolloquims. 1933. Vol. 4. P. 34-38.
13. *Lukasiewicz J.* On the intuitionistic theory of deduction. Konikl. Nederl. Akademie van Wetenschappen, Proceedings, Series A, no. 3. 1952. P. 202-212.
14. *Gentzen G.* Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie // Mathematische Annalen. 1936. Vol. 112. P.493-565.
15. *Попов В.М.* Погружение импликативного фрагмента классической логики в импликативный фрагмент интуиционистской // Логические исследования. М.: Наука, 2000. Вып. 7.
16. *Popov V.M.* On the Logics Related to A. Arruda`s System V1 // Logic and Logical Philosophy. 1999. Vol.7. P.87-90.
17. *Попов В.М.* Об одной трехзначной паранепротиворечивой логике // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. Санкт-Петербург, 2002.
18. *Попов В.М.* Об одной трехзначной параполной логике // Логические исследования. М.: Наука, 2002. Вып.9.