В. Х. Хаханян

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ НА И ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ С ИНТУИЦИОНИСТСКОЙ ЛОГИКОЙ.

Abstract *In thw work we constructed the new type models for the set theory with intuitionistic logic*

1. Функциональные алгебраические модели для арифметики.

В настоящей работе будет обобщен для теории множеств с интуиционистской логикой предложенный А.Г.Драгалиным очень общий подход к построению моделей для нестандартных логик, в частности, для интуиционистской логики, в стиле равномерных алгебр, см. [1]. Приводимое изложение А.Г.Драгалина (достаточно ясное, но без очевидных деталей) сопровождается достаточным количеством примеров для арифметики (см. там же), и необходимо для понимания обобщения данного подхода на теорию множеств. Также, в цитируемой работе в последнем из примеров, рассматривая модель для штрих-реализуемости Клини (см. [2], столбец С), автор приводит «...модель соответствующую штрих-реализуемости Клини...» ([1], стр. 194). Но связь между приводимой моделью и реализуемостью Клини такова: «...$^{o}\varphi^{o}$ **= T** $\Leftrightarrow$ **((**$|\varphi$**)** $\wedge$ **HA** $\vdash$ φ**)** »; см. также [1], стр.195; сравни с [3]. Конечно, с помощью приведённой модели (соответствующей как раз формульной реализуемости из [3]) можно доказать свойства дизъюнктивности и экзистенциальности для арифметики **HA** (именно этот результат и стремится получить автор, используя подходящую равномерную алгебру). Однако штрих-реализуемость Клини (да и другие модели типа равномерной алгебры для **HA**) не совпадают с выводимостью в интуиционистской арифметике. В [4] доказано, что функциональной алгебраической модели для штрих-реализуемости Клини не существует. По-видимому, этим свойством обладает любая функциональная алгебраическая модель (и для теории множеств также), в которой формализуется содержательное понятие «выводимости». Все результаты, приводимые в данной Главе, анонсированы в работах автора [5], [6], [7].

Как отмечалось выше, в [1] даётся ряд примеров, в которых для той или иной модели **НА** (в первую очередь для моделей типа реализуемости) приводится соответствующая этой модели функциональная алгебраическая модель (ФАМ). Сейчас мы достаточно кратко опишем и охарактеризуем общую схему построения ФАМ для арифметики, что сократит изложение и облегчит понимание подобной модели для теории множеств.

Известно, что при исследовании **НА** было построено (см. [3]) большое количество моделей типа реализуемости. Естественно попытаться рассмотреть эти модели с некоторой единой точки зрения (да и не только модели отмеченного типа). Алгебраическое исследование таких моделей приводит к рассмотрению существенно неполных псевдобулевых алгебр (ПБА), в которых верхние и нижние грани существуют лишь для некоторых семейств, которые задаются структурой языка. Приведем описание одного из вариантов такого рассмотрения, предложенного А.Г. Драгалиным, см. [1] или [3].

Функциональная псевдобулева алгебра (ФПБА) задаётся набором $< \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{F} >$, где **B** - ПБА (алгебра истинностных значений), **D** - непустое множество (объектная область), а **F** - семейство функций (или семейство форм) ФПБА. Всякий элемент из **F** есть функция нескольких аргументов (м.б., нульместных), всюду определённая на элементах из **D** и со значениями в ПБА. На **F** накладываются следующие ограничения:

1. **F** замкнуто относительно операций:
   а) добавления фиктивного аргумента; б) перестановки аргументов
   в) отождествления аргументов.
2. **F** содержит нуль и единицу ПБА в качестве нульместных функций.
3. **F** замкнуто относительно псевдобулевых операций $\wedge, \vee, \supset$.

Последнее означает вот что. Если **f**, **g** есть две формы из **F** с одним и тем же количеством аргументных мест, то найдётся функция **h** из семейства форм такая, что для любых элементов $\mathbf{a_1,...,a_n}$ из **D** $\mathbf{h(a_1,...,a_n) = f(a_1,...,a_n) \wedge g(a_1,...,a_n)}$ или, кратко, $\mathbf{h = f \wedge g}$. Аналогично, требуется существование форм $\mathbf{f \vee g}$ и $\mathbf{f \supset g}$.

4. Наше множество форм должно быть замкнуто относительно операций взятия верхних и нижних граней. Это означает вот что. Пусть фиксировано некоторое аргументное место, например $\mathbf{x_1}$. Если **f** из семейства форм, то требуется, чтобы существовали формы **g** и **h** от аргументов $\mathbf{x_2,...,x_n}$ такие, чтобы для любых объектов $\mathbf{a, a_2,...,a_n}$ из **D** было выполнено:

$\mathbf{g(a_2,...,a_n)=\wedge\{f(a,a_2,...,a_n):a\in D\}}$, $\mathbf{h(a_2,...,a_n)=\vee\{f(a,a_2,...,a_n):a\in D\}}$, т.е. требуется существование соответствующих пересечений и объединений в ПБА. Будем это записывать так: $\mathbf{g(x_2,...,x_n)=\forall x f(x,x_2,...,x_n)}$, $\mathbf{h(x_2,...,x_n)=\exists x f(x,x_2,...,x_n)}$. Определение ФПБА на этом завершено. Заметим, что совершенно не требуется, чтобы ПБА была полной, т.е. чтобы содержала все нижние и верхние грани своих подмножеств.

Далее рассматриваются логико-математические языки без выделенного равенства и функциональных символов, т.е. каждый язык задаётся набором **<Cnst, Pr>** - констант и предикатных символов. Функциональная алгебраическая модель (ФАМ) для языка **<Cnst, Pr>** определяется набором **A= <B, D, F, *Cnst, Pr*>**, где **<B, D, F>** есть ФПБА, функция ***Cnst*** сопоставляет каждой константе **c** нашего языка объект ***c***=***Cnst*(c)** , а каждому предикатному символу **P** нашего языка сопоставляется элемент $^o\mathbf{P}^o$=***Pr*(P)** из семейства форм **F**. Дополнительно предполагается, что семейство форм нашей модели **A** удовлетворяет и такому условию: это семейство замкнуто относительно операции фиксации аргумента объектной области ***c***, где **c** есть константа нашего языка, что означает вот что: если $\mathbf{f\in F}$, $\mathbf{f=f(x_1,...,x_i,...,x_n)}$, $\mathbf{c\in Cnst}$, тогда найдётся функция $\mathbf{g\in F}$ такая, что для всех объектов $\mathbf{a_1,...,a_n}$ $\mathbf{g(a_1,...,a_{i-1}, a_{i+1},...,a_n)=f(a_1,...,\mathit{c},...,a_n)}$.

Если задана (ФАМ) **A** для языка **Q**, то можно определить значение в модели для всякой формулы языка **Q**. Значением формулы φ будет при этом некоторая форма ФПБА $^o\varphi^o\in\mathbf{F}$. Заметим, что, в отличие от обычных алгебраических моделей (см. [8]), значение приписывается не формулам, оцененным объектами модели, а просто формулам языка **Q**, в том числе и формулам с параметрами.

Для определения значения формулы в модели будем помечать аргументные места форм переменными языка **Q**. С этой целью линейно упорядочим все переменные языка **Q** каким-либо фиксированным способом. Если дана формула φ, то все ее параметры выпишем в список $\mathbf{x_1,....x_n}$ в упомянутом выше линейном порядке. В качестве значения формуле φ будет сопоставляться форма $\mathbf{f} \in \mathbf{F}$ от аргументов $\mathbf{x_1,....x_n}$.

Теперь определим значение $^o\varphi^o$ индукцией по построению формулы. Если φ - атомарная формула вида $\mathbf{P\ (u_1,\ ....u_n)}$, где $\mathbf{u_i}$ - переменные или константы, а $\mathbf{x_1,....x_n}$ - стандартный список параметров φ, то $^o\mathbf{P\ (u_1,\ ....u_n)}^o$ есть форма от аргументов $\mathbf{x_1,....x_n}$, получающаяся из $^o\mathbf{P}^o$ с помощью фиксации аргументов соответствующими константами. Значение $^o\perp^o$ есть нуль алгебры **B**.

Если φ имеет вид $(\psi \wedge \eta)$, $(\psi \vee \eta)$, $(\psi \supset \eta)$, то форму $^o\varphi^o$ вычисляем следующим образом. Сначала найдем $^o\psi^o$ и $^o\eta^o$. Затем с помощью тривиальных операций перестановки и добавления фиктивных аргументов получим из форм $^o\psi^o$ и $^o\eta^o$ формы $\mathbf{f_1(x_1, ..., x_n)}$ и $\mathbf{f_2\ (x_1, ..., x_n)}$ от параметров формулы φ и, наконец, вычислим $^o\varphi^o$ как форму $\mathbf{f_1 \wedge f_2}$, $\mathbf{f_1 \vee f_2}$ или $\mathbf{f_1 \supset f_2}$.

Если φ имеет вид $\forall \mathbf{x}\psi(\mathbf{x})$ или $\exists \mathbf{x}\eta(\mathbf{x})$, то определим $^o\varphi^o = \forall \mathbf{x}\, ^o\psi(\mathbf{x})^o$ или, соответственно, $^o\varphi^o = \exists \mathbf{x}\, ^o\eta(\mathbf{x})^o$. Разумеется, если у формулы нет параметра **x**, то никаких изменений при определении формы $^o\varphi^o$ не происходит. Если φ - предложение нашего языка, то соответствующая форма оказывается нульмерной и принадлежит ПБА. Предложение φ истинно в модели **A**, если $^o\varphi^o=\mathbf{1}$ - единица нашей ПБА. **A** есть модель для теории **H**, если все нелогические аксиомы **H** будут истинны в **A**. Теорема о корректности для нашего класса моделей имеет следующий вид. **Теорема** (А.Г.Драгалин, см. [1]): если **A** - ФАМ для языка **Q**, φ - предложение **Q**, выводимое в интуиционистской логике предикатов, то $^o\varphi^o=\mathbf{1}$.

Доказательство теоремы проводится индукцией по длине вывода формулы φ.

Теперь рассмотрим некоторые виды реализуемости в языке арифметики. Сам язык арифметики **HA** нужно модифицировать так, чтобы избежать употребления функциональных символов. Это делается с помощью стандартной процедуры: каждому **n**-местному функциональному символу $\mathbf{f(x_1,\ ...,\ x_n)}$, сопоставляется $(\mathbf{n}\ +\ \mathbf{1})$-местный предикатный символ $\mathbf{y = f\ (x_1,..., x_n)}$ и все аксиомы, относящиеся к этому функциональному символу, естественным образом заменяются на аксиомы, относящиеся к предикатному символу. Соответственно, несколько изменяются и другие аксиомы. Например, принцип арифметической индукции приобретает вид: φ **(0)** $\wedge \forall$ **xy** (φ **(x)** $\wedge$ **(y = Sx)** $\rightarrow \varphi$ **(y))** $\rightarrow \forall$**x**φ **(x)**. Мы считаем, что наш язык арифметики имеет один сорт переменных **x, y, z**,… и семейство констант **0, 1, 2**,.... для изображения натуральных чисел.

Все функциональные алгебраические модели для языка **HA**, которые мы рассмотрим ниже в качестве примеров, см. [1], (все эти модели и получаемые с их помощью результаты, можно будет поднять на уровень теории множеств (двусортной и односортной) после того, как ниже будет приведена конструкция обобщения техники А.Г.Драгалина для арифметики на теорию множеств), будут иметь одну и ту же объектную область, т.е. в моделях **A = <B, D, F, *Cnst, Pr*>** функция **D** будет одной и той же. А именно, объектная область **D** состоит, во-первых, из всех констант **0, 1, 2**,... для натуральных чисел и, во-вторых, из счетного семейства символов **[x]**, **[y]**, **[z]**,..., которые будем называть каналами. Канал изображает константу - натуральное число, «о котором ничего не известно».

Функция ***Cnst*** во всех моделях ниже определяется тривиальным образом: константе **n** языка сопоставляется объект ***n***$\in$**D**. Таким образом, в рассматриваемых примерах модель задается определением **D, F и *Pr***. Оцененная формула есть, по определению, формула φ, в которой все вхождения параметров замещены объектами из **D** (константами или каналами).

Приведём теперь две наиболее простых ФАМ. Каждую формальную теорию, например, **HA**, можно рассматривать как функциональную алгебраическую модель. По существу это известная алгебра Линденбаума - Тарского. В качестве алгебры **B** истинностных значений следует взять просто множество всех оцененных формул, а в качестве множества **F** форм - множество всех формул. Каждая формула задает форму относительно операции замещения параметров.

Основное отношение на **B** определяется так : **a** $\leq$ **b** $\Leftrightarrow$ **(HA** $\vdash$ **a’** $\supset$ **b’)**, где **a’**, **b’** получены из **a**, **b** соответственно путем согласованного превращения каналов в переменные. Псевдобулевы операции над формами при этом будут совпадать с синтаксическими операциями над соответствующими формулами. Если определить $^o\varphi^o = \varphi$ для атомарных формул, то для всякого предложения ψ будем иметь $^o\psi^o$ **= 1** $\Leftrightarrow$ **(HA** $\vdash \psi$**).**

Но можно определить и более интересную и неожиданную модель **HA**, где в качестве форм будут фигурировать формулы (см. также [1]). Для всякой арифметической формулы φ через $\mathbf{Pr}(\varphi)$ обозначим формулу с теми же параметрами, что и у φ, содержательный смысл которой таков: $\mathbf{Pr}\ (\varphi)$ утверждает, что в исчислении **HA** выводится замкнутая формула, полученная из φ замещением ее параметров натуральными числами из некоторого списка $\boldsymbol{y}$, который есть полный список всех параметров формулы φ. Формула $\mathbf{Pr}\ (\varphi)$ строится стандартным образом по формуле φ, с подробностями можно ознакомиться, например, по статье [9]. Для всякой формулы φ через $\Box\varphi$ обозначим формулу $\varphi \wedge \mathbf{Pr}(\varphi)$.

В качестве алгебры **B** вновь возьмем множество всех оцененных формул, а в качестве множества **F** форм - множество всех формул, но теперь основное отношение определим иначе: $\mathbf{a \le b \Leftrightarrow (HA \vdash \Box a' \supset b')}$. Для атомарных формул полагаем ${}^{o}\varphi^{o} = \varphi$.

Псевдобулевы операции в этой модели определяются следующим образом (здесь слева стоит знак операции в нашей модели, а справа - формула, являющаяся значением):
$(\varphi) \wedge (\psi) = (\varphi \wedge \psi)$; $(\varphi) \vee (\psi) = \mathbf{(}\Box\varphi \vee \Box\psi\mathbf{)}$; $\mathbf{(\varphi) \supset (\psi) = (\Box\ \varphi \supset \psi)}$; $\mathbf{\neg(\varphi) = (\neg\ \Box\varphi)}$; $\mathbf{\forall x(\varphi) = (\forall x\varphi)}$; $\mathbf{\exists x(\varphi) = (\exists x\Box\varphi)}$; $\perp=$ $\mathbf{(0{=}1)}$.

Реализуемость, соответствующая этой модели, была использована Бизоном. (см. [10]). Связь модели с реализуемостью Бизона можно теперь выразить следующей эквивалентностью: ${}^{o}\varphi^{o} \mathbf{= 1 \Leftrightarrow (HA \vdash \varphi^{\,p})}$.

Далее в работах [1] и [3] рассматривается отмеченная во введении штрих-реализуемость Клини и для неё строится подходящая ФАМ, однако нетрудно видеть, доказывая свойства эффективности логических связок, что эта ФАМ совпадает с выводимостью в интуиционистской арифметике. Мы докажем, что не существует модели ФАМ для штрих-реализуемости Клини (и, тем не менее, существует модель типа ФАМ для формализованной и содержательной реализуемостей Клини: см. [1] и [3]).

Предположим, что некоторая ФАМ **A** есть модель для штрих-реализуемости Клини. Тогда (по определению) имеется такое отображение формул языка арифметики в множество форм **A**, что для всякой формулы

φ : $\mid$- реализуема φ тогда и только тогда, когда $\mathbf{F}_\varphi \in \mathbf{1}$ ($\mathbf{F}_\varphi$ - форма из ФПБА модели ФАМ **A**, соответствующая формуле арифметики φ, а **1**- единица ПБА, использованной при построении ФАМ **A**).

Рассмотрим два различных, неразрешимых в **HA**, утверждения φ и η (т.е. **HA** $\nvdash \varphi$, **HA** $\nvdash \neg\varphi$, **HA** $\nvdash \eta$ и **HA** $\nvdash \neg\eta$). Так как **HA** $\nvdash \varphi$ и так как в **HA** $\nvdash \eta$, то формулы φ и η не являются выводимыми, однако являются $\mid$- реализуемыми формулами языка арифметики. Если в ФАМ **A** им соответствуют формы $\mathbf{F}_{\neg\varphi}$ и $\mathbf{F}_{\neg\eta}$ соответственно, то эти формы принадлежат **1** ПБА, а тогда форма $\mathbf{F}_{\neg\varphi} \vee \mathbf{F}_{\neg\eta} = \mathbf{F}_{\neg\varphi\vee\neg\eta}$ (последняя соответствует в ФПБА модели **A** формуле $\neg\varphi \vee \neg\eta$) также принадлежит **1** нашей ПБА и, следовательно, формула $\neg\varphi \vee \neg\eta$ является $\mid$- реализуемой. Но это влечёт, что в **HA** $\vdash \neg\varphi$ или в **HA** $\vdash \neg\eta$, что невозможно в силу выбора формул φ и η. Таким образом, доказана

Теорема 1. Не существует ФАМ **A**, соответствующей штрих-реализуемости Клини.

2.Функциональные алгебраические модели для теории множеств.

В оставшейся части данной Главы техника А.Г.Драгалина будет обобщена на теорию множеств с интуиционистской логикой. Пусть имеется некоторая функциональная псевдобулева алгебра **B**. Построим универсум **D** (объектную область), используя внешнюю индукцию по ординалам (наше построение и доказательство не выйдет за рамки теории **ZFIR+DCS**). Все дальнейшие построения и результаты этой Главы были анонсированы в [6] и [7].

Пусть **B** – псевдобулева алгебра, не обязательно полная, не факторизованная по отношению эквивалентности и **0** и **1** – ноль и единица этой алгебры; пусть $\mathbf{B}^{-} = \mathbf{B}\backslash\{\mathbf{0}\}$ и **p** – произвольный элемент алгебры, не равный нулю. Полагаем: $\mathbf{D_0}=\varnothing$; $\mathbf{D_{\alpha+1}=\{x : xext(\alpha+1)\}}$;
$\mathbf{xext((\alpha+1) \Leftrightarrow x \subseteq (B^{-}\times\cup\{D_\beta : \beta\leq\alpha\}) \wedge [y\approx z\ (\alpha,p) \wedge \langle a,y\rangle \in x \Rightarrow (\exists b\in B)(b \geq (a\wedge p) \wedge \langle b,z\rangle \in x)]}$;
$\mathbf{y\approx z(\alpha,p) \Leftrightarrow (\langle a,x\rangle \in y \Rightarrow (\exists b\in B)\ (b \geq (a\wedge p) \wedge \langle b,x\rangle \in z)) \wedge (\langle a,x\rangle \in z \Rightarrow (\exists b\in B)(b \geq (a\wedge p) \wedge \langle b,x\rangle \in y))}$; если α - предельный ординал, то

$\mathbf{D}_\alpha = \cup\{\mathbf{D}_\beta : \beta<\alpha\}$. Полагаем теперь $\mathbf{D} = \cup\{\mathbf{D}_\alpha : \alpha\in\mathbf{On}\}$. Универсум **D** (объектная область) определен.

В качестве ФПБА берем теперь множество отображений из $\mathbf{D}^\mathbf{n}$ в **B**, обладающее всеми свойствами, описанными выше в виде ограничений на ФПБА и содержащее форму $^o\mathbf{x}\in\mathbf{y}^o$; (полагаем $^o\mathbf{x}\in\mathbf{y}^o(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathbf{c} \Leftrightarrow \langle\mathbf{c},\mathbf{a}\rangle \in \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \neq \mathbf{0}$).ФПБА определена.

Определим теперь ФАМ для языка односортной теории множеств **ZFIR + DCS**. Функция ***Cnst*** не определена (считаем, что в языке нет индивидных констант), функция ***Pr*** уже определена, т.к. в языке один бинарный предикатный символ $\in$. Таким образом, определена функциональная алгебраическая модель набор **A= <B, D, F, *Cnst, Pr*>** для языка теории множеств.

Теорема 2. Если **A** – ФАМ для языка теории множеств и φ - предложение, выводимое в теории **ZFIR + DCS**, то $^o\varphi^o = \mathbf{1}$.

Доказательство Теоремы 2. проводим индукцией по построению вывода предложения φ в теории **ZFIR + DCS**. Аксиомы и правила вывода интуиционистской логики предикатов следуют из Теоремы Драгалина для логики предикатов (см. выше). Поэтому остаётся проверить, что значение всех собственных аксиом и схем аксиом теории множеств равно **1** алгебры **B**. Отметим, что метаматематика нашего доказательства не будет выходить за рамки теории множеств **ZF**, которая является равнонепротиворечивой с нашей теорией **ZFIR + DCS**.

а) Проверка выполнимости аксиомы объёмности: пусть $p = {}^o\,\forall\mathbf{u}(\mathbf{u}\in\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{u}\in\mathbf{y})^o$ и пусть $\mathbf{q} = {}^o\mathbf{x}\in\mathbf{z}^o$ и пусть $\mathbf{r} = {}^o\mathbf{y}\in\mathbf{z}^o$. Нужно доказать, что $\mathbf{p}\wedge\mathbf{q} \leq \mathbf{r}$. Докажем, что $\mathbf{x} \approx \mathbf{y}(\mathbf{p},\alpha)$ для некоторого ординала α. Пусть для всякого $\mathbf{u}$ $^o\,\mathbf{u}\in\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{u}\in\mathbf{y}^o = \mathbf{s}$, где $\mathbf{s} = \mathbf{s}_1\wedge\mathbf{s}_2$, а $\mathbf{s}_1 = {}^o\,\mathbf{u}\in\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{u}\in\mathbf{y}^o$ и $\mathbf{s}_2 = {}^o\,\mathbf{u}\in\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{u}\in\mathbf{y}^o$. Имеем $\mathbf{p} \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_1 = \mathbf{a}\rightarrow\mathbf{b}$, где $\mathbf{a} = {}^o\mathbf{u}\in\mathbf{x}^o$ и $\mathbf{b} = {}^o\mathbf{u}\in\mathbf{y}^o$. Получаем по законам ПБА, что $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}$, т.е. $\mathbf{p} \wedge \mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ и в обратную сторону симметрично с заменой $\mathbf{s}_1$ на $\mathbf{s}_2$. Отсюда следует, что $\mathbf{x} \approx \mathbf{y}(\mathbf{p},\alpha)$, где α - ранг множества $\mathbf{y}$. Так как множество $\mathbf{z}$ из универсума, то $\mathbf{p}\wedge\mathbf{q} \leq \mathbf{r}$. Таким образом, истинность аксиомы объёмности равна **1** нашей алгебры.

б) Проверка выполнимости аксиом пары, объединения и степени: проверим только одну из этих аксиом, т.к. все три аксиомы проверяются аналогично. Проверим выполнимость аксиомы пары

$\forall ab\exists x(a\in x \wedge b\in x)$. В качестве искомого множества x берем $\{\langle 1,u\rangle : [u \approx a(p,\alpha)] \vee [u \approx b(p,\alpha)]\}$, где α - максимальный ординал из рангов множеств a и b, а p – любой элемент ПБА, отличный от нуля. Очевидно, что x принадлежит D и что истинность аксиомы пары равна 1 по определению x. Аксиома пары выполнена. Аксиомы степени и объединения проверяются аналогично, удлиняется лишь определение множества x. Например, для аксиомы объединения $x = \{\langle 1,y\rangle : \exists pqz(\langle p,y\rangle \in z \wedge \langle q,z\rangle \in a)\}$.

в) Проверка выполнимости аксиомы бесконечности: предположим, что мы теперь имеем дело с двусортным вариантом нашей теории множеств **ZFI2 + DCS**. Тогда аксиома бесконечности имела бы очень простой вид: $\exists x\forall n(n\in x)$. Нужное x из нового универсума D строилось бы как в предыдущем пункте (конечно, изменились бы определения эквивалентности множеств на соответствующем уровне с каким-либо элементом из ПБА, который обязан быть больше нуля, и определение экстенсиональности множеств, выбираемых для универсума на данном ординальном уровне. Однако в сущности это никак не поменяло бы идей построения нашего нового универсума по сравнению со старым, построенным для модели для односортной теории множеств: множества из нового универсума содержали бы теперь не только упорядоченные пары ⟨ненулевой элемент из ПБА, множество уже построенное⟩, но и пары ⟨ненулевой элемент из ПБА, натуральное число⟩. Доказательства выполнимости аксиом и схем аксиом делались бы точно также, с учетом появления новых упорядоченных пар: просто удлинились бы построения за счет появления в модели натуральных чисел). С учётом сказанного получаем, что истинность аксиомы бесконечности равна **1**.

г) Проверка выполнимости аксиомы **DCS**: $\exists x\forall y(\neg\neg y\in a \rightarrow y\in x)$. Полагаем $x = \{\langle 1,y\rangle : \exists p \langle p,y\rangle\in a\}$. Нужно доказать, что $(p\rightarrow 0)\rightarrow 0 \leq 1$, но это очевидно. Также очевидно, что множество x принадлежит универсуму D. Выполнимость аксиомы **DCS** доказана.

д) Проверка выполнимости схемы аксиом выделения: $\exists x\forall y(y\in x \leftrightarrow y\in a \wedge \varphi(y))$; здесь формула $\varphi(y)$ может содержать параметры. Полагаем $x = \{\langle q,y\rangle : q = {}^{o}\, y\in a \wedge \varphi(y)\, {}^{o}$. Докажем, что при выбранном x истинность схемы аксиом выделения равна **1**. Но истинности левой и правой частей эквивалентности совпадают и поэтому истинность схемы равна **1**, что и доказывает требуемое. Однако нужно доказать, что множество **x** принадлежит универсуму **D**.

Лемма 2.1 Если $\mathbf{y \approx z\ (\alpha,p)}$, то $\mathbf{p} \wedge {}^{o}\,\varphi\mathbf{(y)}^{o} = \mathbf{p} \wedge^{o}\,\varphi\mathbf{(z)}^{o}$.

Доказательство Леммы 2.1 проводим индукцией по построению формулы φ.

Атомарные случаи:

1) $\varphi \Leftrightarrow \mathbf{y{\in}u}$; т.к. $\mathbf{u{\in}D}$, то если $\langle\mathbf{q,y}\rangle\in\mathbf{u}$, то $\exists\mathbf{r}\in\mathbf{B}(\langle\mathbf{r,z}\rangle\in\mathbf{u} \wedge (\mathbf{p}\wedge\mathbf{q}) \leq \mathbf{r})$, т.е. ${}^{o}\mathbf{z{\in}u}^{o} \geq \mathbf{p} \wedge {}^{o}\mathbf{y{\in}u}^{o}$ и наоборот в силу симметрии;

2) $\varphi \Leftrightarrow \mathbf{u{\in}y}$; если $\langle\mathbf{q,u}\rangle\in\mathbf{y}$, то $\exists\mathbf{r}\in\mathbf{B}(\langle\mathbf{r,u}\rangle\in\mathbf{z} \wedge (\mathbf{p}\wedge\mathbf{q}) \leq \mathbf{r})$, т.е. ${}^{o}\mathbf{u{\in}y}^{o} \wedge \mathbf{p} \leq {}^{o}\mathbf{u{\in}z}^{o}$.

Случаи связок: конъюнкция и дизъюнкция разбираются очевидным образом; пусть $\varphi \Leftrightarrow \psi \rightarrow \eta$ и пусть утверждение Леммы 2.1 выполнено для ψ и η, и пусть ${}^{o}\psi\mathbf{(y)}^{o} = \alpha$, ${}^{o}\psi\mathbf{(z)}^{o} = \beta$, ${}^{o}\eta\mathbf{(y)}^{o} = \alpha_1$, ${}^{o}\eta\mathbf{(z)}^{o} = \beta_1$. Дано $\mathbf{p} \wedge \alpha \rightarrow \alpha_1$, $\mathbf{p} \wedge \beta \rightarrow \beta_1$. Нужно доказать, что $(\mathbf{p} \wedge \alpha{\rightarrow}\beta) \rightarrow (\alpha_1{\rightarrow}\beta_1)$. Предположим $\mathbf{p}$, $(\alpha{\rightarrow}\beta)$, α_1 и докажем β_1. Так как α_1, то $\mathbf{p} \wedge \alpha$, а так как α, то β, а так как $\mathbf{p} \wedge \beta$, то β_1, ч.т.д.

Случаи кванторов:

1) $\varphi \Leftrightarrow \forall\mathbf{x}\psi\mathbf{(x,y)}$; имеем $\forall\mathbf{x}(\mathbf{p}\wedge{}^{o}\psi\mathbf{(x,y)}^{o} \leq {}^{o}\psi\mathbf{(x,z)}^{o}$ по индукционному предположению, а тогда $\forall\mathbf{x}(\mathbf{p}\wedge{}^{o}\forall\mathbf{x}\psi\mathbf{(x,y)}^{o}\leq {}^{o}\psi\mathbf{(x,z)}^{o})$, т.е. $\mathbf{p}\wedge{}^{o}\forall\mathbf{x}\psi\mathbf{(x,y)}^{o} \leq {}^{o}\forall\mathbf{x}\psi\mathbf{(x,z)}^{o}$;

2) $\varphi \Leftrightarrow \exists\mathbf{x}\psi\mathbf{(x,y)}$; имеем $\mathbf{p} \wedge{}^{o}\psi\mathbf{(x,y)}^{o} \leq {}^{o}\psi\mathbf{(x,z)}^{o} \leq {}^{o}\exists\mathbf{x}\psi\mathbf{(x,z)}^{o}$ по предположению индукции, а тогда $\mathbf{p}\wedge{}^{o}\exists\mathbf{x}\psi\mathbf{(x,y)}^{o} \leq {}^{o}\exists\mathbf{x}\psi\mathbf{(x,z)}^{o}$. Лемма 2.1 доказана, а с ней доказана и выполнимость схемы аксиом выделения.

e) проверка выполнимости схемы аксиом трансфинитной индукции:

$\forall\mathbf{x}[\forall\mathbf{y}(\mathbf{y{\in}x} \rightarrow \varphi\mathbf{(y)}) \rightarrow \varphi\mathbf{(x)}] \rightarrow \forall\mathbf{x}\varphi\mathbf{(x)}$. Введём следующие обозначения $\mathbf{p}={}^{o}\forall\mathbf{x}[\forall\mathbf{y}(\mathbf{y{\in}x} \rightarrow \varphi\mathbf{(y)}) \rightarrow \varphi\mathbf{(x)}]^{o}$, а $\mathbf{q}={}^{o}\forall\mathbf{y}(\mathbf{y{\in}x} \rightarrow \varphi\mathbf{(y)})^{o}$. Трансфинитной индукцией по рангу множества докажем, что $\forall\mathbf{x}({}^{o}\varphi\mathbf{(x)}^{o} \geq \mathbf{p})$. Предположим, что $\forall\mathbf{y}\ (\mathbf{rng(y)} < \mathbf{rng(x)} \rightarrow {}^{o}\varphi\mathbf{(y)}^{o} \geq \mathbf{p})$. Имеем $\mathbf{q} \rightarrow {}^{o}\varphi\mathbf{(x)}^{o}\geq \forall\mathbf{x}[\mathbf{q} \rightarrow {}^{o}\varphi\mathbf{(x)}^{o}] = \mathbf{p}$, т.е. $\mathbf{p} \rightarrow (\mathbf{q} \rightarrow{}^{o}\varphi\mathbf{(x)}^{o})$; докажем, что $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$; но при фиксированом $\mathbf{x}$ пусть $\mathbf{rng(y)} < \mathbf{rng(x)}$, а тогда $\mathbf{p} \rightarrow {}^{o}\,\varphi\mathbf{(y)}^{o}$ и, следовательно, $\mathbf{p} \rightarrow ({}^{o}\mathbf{y{\in}x}^{o} \rightarrow{}^{o}\varphi\mathbf{(y)}^{o})$ для всех $\mathbf{y}$ таких, что ${}^{o}\mathbf{y{\in}x}^{o}> \mathbf{0}$; но тогда предыдущее утверждение верно для любых $\mathbf{y}$ из нашего универсума $\mathbf{D}$, т.е. $\mathbf{p} \rightarrow{}^{o}\forall\mathbf{y}(\mathbf{y{\in}x} \rightarrow \varphi\mathbf{(y)})^{o}$, т.е. $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$, а тогда $\mathbf{p} \rightarrow {}^{o}\varphi\mathbf{(x)}^{o}$.

ж) Проверка выполнимости схемы аксиом собирания («collection»;считаем, что ПБА **B** является множеством):
$\forall \mathbf{x}(\mathbf{x}\in\mathbf{a} \rightarrow \exists \mathbf{y}\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})) \rightarrow \exists \mathbf{H}\forall \mathbf{x}(\mathbf{x}\in\mathbf{a} \rightarrow \exists \mathbf{y}(\mathbf{y}\in\mathbf{H} \wedge \varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})))$. Пусть истинность посылки есть **p**, а $\mathbf{q}_x = {}^o\exists \mathbf{y}\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}))^o$. Имеем $\mathbf{q}_x \geq {}^o\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})^o$ для всякого **x**; также $\mathbf{p} \leq {}^o\mathbf{x}\in\mathbf{a}^o \rightarrow {}^o\exists \mathbf{y}\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}))^o$ или $\forall \mathbf{x}(\mathbf{p} \rightarrow ({}^o\mathbf{x}\in\mathbf{a}^o \rightarrow \mathbf{q}_x))$. Нужно доказать, что для некоторого множества **H** из **D** имеет место ${}^o\forall \mathbf{x}(\mathbf{x}\in\mathbf{a} \rightarrow \exists \mathbf{y}(\mathbf{y}\in\mathbf{H} \wedge \varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})))^o \geq \mathbf{p}$, т.е. доказать, что для всякого **x** $({}^o\mathbf{x}\in\mathbf{a}^o \rightarrow ({}^o\exists \mathbf{y}(\mathbf{y}\in\mathbf{H} \wedge \varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}))^o = \mathbf{r}_x)) \geq \mathbf{p}$. Рассмотрим $\mathbf{R}_x = \{\mathbf{s}\in\mathbf{B} : \exists \mathbf{y}.\mathbf{s} = {}^o\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})^o$, где **x** – фиксированное множество из **D**. $\forall \mathbf{s}\in\mathbf{R}_x\exists \mathbf{y}.\ \mathbf{s} = {}^o\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})^o$, а тогда (в силу внешней схемы аксиом собирания (**collection**)), $\exists \mathbf{H}_x\forall \mathbf{s}\in\mathbf{R}_x\exists \mathbf{y}\in\mathbf{H}_x.\ \mathbf{s} = {}^o\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})^o$. Так как существует верхняя грань элементов ${}^o\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})^o$ по $\mathbf{y}\in\mathbf{H}_x$ (в силу существования ${}^o\exists \mathbf{y}\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}))^o$) и равна последней, то полагаем $\mathbf{H} = \{\langle 1,\mathbf{y}\rangle : \mathbf{y}\approx\mathbf{z}\ (\alpha,\mathbf{p}) \wedge \mathbf{z}\in\mathbf{H}_x\}$ для некоторого **x** такого, что ${}^o\mathbf{x}\in\mathbf{a}^o \neq \mathbf{0}\}$. Нетрудно видеть, что для всякого **x** $({}^o\mathbf{x}\in\mathbf{a}^o \rightarrow ({}^o\exists \mathbf{y}(\mathbf{y}\in\mathbf{H} \wedge \varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}))^o) \geq \mathbf{p}$, а тогда истинность схемы аксиом собирания равна **1**. **Теорема 2** доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Драгалин А.Г.* Функциональные алгебраические модели. // Семиотика и информатика, М.: ВИНИТИ, 1979, Вып.XIII , С. 184-195.
2. *Kleene S.C.* Realizability: a retrospective survey.// Lecture Notes in Math.1973, N.337, P. 96
3. *Драгалин А.Г.* Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств. М.: Наука, 1979, С.60-61.
4. *Хаханян В.Х.* Функциональная алгебраическая модель, эквивалентная штрих-реализуемости Клини. // Матем. заметки, т.75, январь 2004, Вып.1, С. 155- 157.
5. *Хаханян В.Х.* Функциональная алгебраическая модель, соответствующая штрих-реализуемости Клини. // М.: Наука,2003, Логические исследования. Вып. 10,С.198-203.
6. *Хаханян В.Х.* Функциональные алгебраические модели для неклассической теории множеств. // М.: Наука,1997, Логические исследования. Вып. 4, С. 192-195.
7. *Khakhanian V.Kh.* Functional algebraic models for non-classical set theory. // Bulletin of the Section of Logic, !998, ½ (march-june), v. 27, P. 53-54.
8. *Расёва Е.,Сикорский Р.* Математика метаматематики. М.: Наука,1972.
9. *Feferman S.* Arithmetization of mathematics in general setting.// Fundamenta Mathematica, 1960, N.49, P.35-92
10. *Beeson M.* The nonderivability in intuitionistic formal system of theorem on the continuity of effective operations.// The Journal of Symbolic Logic, 1975, v.40, N.3, P.321-346.