Д.В. Баташев, В.М. Попов

ПАРАНОРМАЛЬНАЯ ПОДЛОГИКА ИНТУИЦИОНИСТСКОЙ ЛОГИКИ*

Abstract. *A hilbert style calculi* **HIAP** *is constructed and a paranormal logic* **IAP** *which is sublogic of intuitionistic prepositional logic is defined. A sequent calculi* **GIAP** *axiomatizing a logic* **IAP** *is performed. Kripke style semantics corresponding to logic* **IAP** *is constructed and the maps embedding* **IntP** *to* **IAP** *are defined*.

Строится исчисление **HIAP** гильбертовского типа и определяется паранормальная логика **IAP**, являющаяся подлогикой интуиционистской пропозициональной логики **IntP**. Предлагается секвенциальное исчисление **GIAP**, аксиоматизирующее логику **IAP**. Конструируется семантика крипкевского типа, адекватная логике **IAP**, и определяются отображения, погружающие **IntP** в **IAP**.

Мы предполагаем известными определения, данные в разделе «**Некоторые предварительные определения**» статьи [1].

Исчисление HIAP гильбертовского типа, логика IAP и ее секвенциальная аксиоматизация

HIAP является исчислением гильбертовского типа. Язык этого исчисления есть $\mathcal{L}$. Множеству всех аксиом исчисления **HIAP** принадлежат все те и только те $\mathcal{L}$-формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих видов (здесь A, B и C есть $\mathcal{L}$-формулы, D есть $\mathcal{L}$-формула, не являющаяся квазиэлементарной $\mathcal{L}$-формулой):

(I) $((A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)))$,
(II) $(A \supset (A \vee B))$,
(III) $(B \supset (A \vee B))$,
(IV) $((A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C)))$,
(V) $((A \& B) \supset A)$,
(VI) $((A \& B) \supset B)$,
(VII) $((C \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset (A \& B))))$,
(VIII) $((A \supset (B \supset C)) \supset ((A \& B) \supset C))$,
(IX) $(((A \& B) \supset C)) \supset ((A \supset (B \supset C))$,

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 04-03-00266.

(X) $((\neg D) \supset (D \supset A))$,

(XI) $((D \supset (\neg (A \supset A))) \supset (\neg D))$.

Правило *modus ponens в* $\mathcal{L}$ является единственным правилом вывода исчисления **HIAP**. Доказательства в **HIAP** строятся обычным для гильбертовского типа исчислений образом.

Множество всех $\mathcal{L}$-формул, доказуемых в **HIAP**, обозначаем через **IAP**. Доказана следующая теорема 1.

Теорема 1. IAP есть паранормальная логика.

GIAP является секвенциальным исчислением. Секвенция имеет вид $\pi \to \rho$, где π и ρ есть конечные последовательности $\mathcal{L}$-формул (конечной последовательностью $\mathcal{L}$-формул являются, в частности, пустое множество и любая $\mathcal{L}$-формула).

Множество всех основных секвенций исчисления **GIAP** есть множество всех секвенций, каждая из которых имеет вид $A \to A$, где A есть $\mathcal{L}$-формула.

Множеству всех правил исчисления **GIAP** принадлежат все следующие правила R 1 – R 15 и только они. При нижеследующей формулировке этих правил предполагаем, что Γ, Δ, Σ есть конечные последовательности $\mathcal{L}$-формул, Θ есть не более чем одноченная последовательность $\mathcal{L}$-формул, а A и B есть $\mathcal{L}$-формулы.

R 1: $$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \to \Theta}{\Gamma, B, A, \Delta \to \Theta},$$ R 2: $$\frac{A, A, \Gamma \to \Theta}{A, \Gamma \to \Theta},$$

R 3: $$\frac{\Gamma \to \Theta}{A, \Gamma \to \Theta},$$ R 4: $$\frac{\Gamma \to}{\Gamma \to A},$$

R 5: $$\frac{\Gamma \to A \qquad B, \Sigma \to \Theta}{(A \supset B), \Gamma, \Sigma \to \Theta},$$ R 6: $$\frac{A, \Gamma \to B}{\Gamma \to (A \supset B)},$$

R 7: $$\frac{A, \Gamma \to \Theta}{(A \,\&\, B), \Gamma \to \Theta},$$ R 8: $$\frac{A, \Gamma \to \Theta}{(B \,\&\, A), \Gamma \to \Theta},$$

R 9: $$\frac{\Gamma \to A \qquad \Gamma \to B}{\Gamma \to (A \,\&\, B)},$$ R 10: $$\frac{\Gamma \to \mathrm{A}}{\Gamma \to (\mathrm{A} \vee \mathrm{B})},$$

R 11: $\dfrac{\Gamma \to A}{\Gamma \to (B \vee A)}$, R 12: $\dfrac{\mathrm{A}, \Gamma \to \Theta \quad \mathrm{B}, \Gamma \to \Theta}{(\mathrm{A} \vee \mathrm{B}), \Gamma \to \Theta}$,

R 13: $\dfrac{\Gamma \to D}{(\neg D), \Gamma \to}$ (здесь D есть $\mathcal{L}$-формула, не являющаяся квазиэлементарной $\mathcal{L}$-формулой),

R 14: $\dfrac{D, \Gamma \to}{\Gamma \to (\neg D)}$ (здесь D есть $\mathcal{L}$-формула, не являющаяся квазиэлементарной $\mathcal{L}$-формулой),

R 15: $\dfrac{\Gamma \to A \quad A, \Sigma \to \Theta}{\Gamma, \Sigma \to \Theta}$ (правило сечения).

Выводы в **GIAP** строятся обычным для секвенциальных исчислений генценовского типа образом (см. [2], [3], [4]). Теорема об устранимости сечения для исчисления **GIAP**, теорема 2 о том, что исчисление **GIAP** аксиоматизирует логику **IAP**, и теорема 3 доказаны с использованием методов работы [2].

Теорема 2. Для всякой $\mathcal{L}$-формулы A: секвенция $\to A$ выводима в **GIAP** т.т.т. $A \in$ **IAP**.

Теорема 3. Исчисление **GIAP** разрешимо.

Из теоремы 2 и теоремы 3 вытекает, что логика **IAP** разрешима.

Следует обратить внимание на то, что логика **IAP** не имеет конечной характеристической матрицы. Доказательство несуществования конечной характеристической матрицы для **IAP** можно провести, например, аналогично известному геделевскому доказательству несуществования конечной характеристической матрицы для интуиционистской пропозициональной логики.

Семантика языка $\mathcal{L}$, базирующаяся на понятии IAP-модели Крипке

IAP-моделью Крипке называем упорядоченную тройку $\langle \mathrm{G}, \mathrm{R}, \vDash \rangle$, где G есть непустое множество, R есть рефлексивное и транзитивное бинарное отношение на G, $\vDash$ есть подмножество декартова произведения множества G на множество $Form_{\mathcal{L}}$, и выполняются следующие условия:

(1) для всякой квазиэлементарной $\mathcal{L}$-формулы e и всяких α и β из G, верно, что если $\alpha \vDash e$ и α R β, то $\beta \vDash e$,

(2) для всяких $\mathcal{L}$-формул A и B, всякой $\mathcal{L}$-формулы C, не являющейся квазиэлементарной $\mathcal{L}$-формулой языка $\mathcal{L}$, и всякого α из G верно, что

(2.1) $\alpha \vDash (A \mathbin{\&} B)$ т.т.т. $\alpha \vDash A$ и $\alpha \vDash B$,

(2.2) $\alpha \vDash (A \vee B)$ т.т.т. $\alpha \vDash A$ или $\alpha \vDash B$,

(2.3) $\alpha \vDash (A \supset B)$ т.т.т. для всякого β из G верно, что если α R β и $\beta \vDash A$, то $\beta \vDash B$,

(2.4) $\alpha \vDash (\neg C)$ т.т.т. для всякого β из G верно, что если α R β и $\beta \vDash A$, то неверно, что $\beta \vDash C$.

$\mathcal{L}$-формулу A называем общезначимой в **IAP**-модели Крипке $\langle$G, R, $\vDash\rangle$, если всякий α из G таков, что $\alpha \vDash A$.

Доказана следующая теорема 4.

Теорема 4. Для всякой $\mathcal{L}$-формулы A: A доказуема в **HIAP** т.т.т. A общезначима во всякой **IAP**-модели Крипке.

Используя эту теорему и определение множества **IAP**, получаем, что для всякой $\mathcal{L}$-формулы A: $A \in$ **IAP** т.т.т. A общезначима во всякой **IAP-**модели Крипке.

Отображения, погружающие интуиционистскую пропозициональную логику в IAP

Обозначаем через **IntP** интуиционистскую пропозициональную логику в языке $\mathcal{L}$.

Доказаны следующие теоремы 6 и 7 о погружении **IntP** в **IAP**.

Теорема 6. Пусть φ есть отображение множества всех пропозициональных переменных языка $\mathcal{L}$ во множество $Form_{\mathcal{L}}$, удовлетворяющее условиям:

1) $\varphi(p)$ не есть квазиэлементарная $\mathcal{L}$-формула ни для какой пропозициональной переменной p языка $\mathcal{L}$,

2) для всякой пропозициональной переменной p языка $\mathcal{L}$ $\mathcal{L}$-формулы $(p \supset \varphi(p))$ и $(\varphi\,(p) \supset p)$ принадлежат логике **IntP**.

Тогда для всякой $\mathcal{L}$-формулы A верно, что $A \in$ **IntP** т.т.т. $h_\varphi\,(A) \in$ **IAP**, где h_φ есть такое отображение множества $Form_{\mathcal{L}}$ в себя, что для всякой пропозициональной переменной p языка $\mathcal{L}$ и всяких $\mathcal{L}$-формул B и C выполняются условия:

(1) $h_\varphi\,(p) = \varphi\,(p)$,

(2) $h_\varphi\,((B \circ C)) = (h_\varphi\,(B) \circ h_\varphi\,(C))$ (здесь $\circ \in \{\&, \vee, \supset\}$),

(3) $h_\varphi\,((\neg B)) = (\neg\, h_\varphi\,(B))$.

Например, определив для всякой пропозициональной переменной p языка $\mathcal{L}$ $\varphi(p)$ как (p & p) (или как (p $\vee$ p)) получаем операцию h_φ, погружающую **IntP** в **IAP** .

Теорема 7. Пусть φ есть такое отображение множества $Form_{\mathcal{L}}$ в себя, что для всякой пропозициональной переменной p языка $\mathcal{L}$ и всяких $\mathcal{L}$-формул B и C выполняются условия:

(1) $\varphi(p) = p$,

(2) $\varphi((B \circ C)) = (\varphi(B) \circ \varphi(C))$ (здесь $\circ \in \{\&, \vee, \supset\}$),

(3) $\varphi((\neg B)) = (\varphi(B) \supset (\neg (p_1 \supset p_1)))$.

Тогда для всякой $\mathcal{L}$-формулы A: $A \in$ **IntP** т.т.т. $\varphi(A) \in$ **IAP**.

Следствие теоремы 7

Для всякой $\mathcal{L}$-формулы А, в которую не входит $\neg$, верно следующее: $A \in$ **IntP** т.т.т. $A \in$ **IAP**.

Таким образом, позитивный фрагмент интуиционистской пропозициональной логики, сформулированной в языке $\mathcal{L}$, равен позитивному фрагменту **IAP**.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баташев Д.В., Попов В.М.* Об одной девятизначной паранормальной логике// Логические исследования Вып.12 (см. наст. сборник)
2. *Генцен Г.* Исследования логических выводов // Математическая теория логического вывода. М., 1967 С. 9 – 74.
3. *Смирнов В.А.* Формальный вывод и логические исчисления. М., 1972.
4. *Драгалин А.Г.* Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств. М., 1979.