Д.В. Баташев

О НЕСУЩЕСТВОВАНИИ КОНЕЧНОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ ДЛЯ ОДНОЙ ПАРАНОРМАЛЬНОЙ ЛОГИКИ

Abstract. *In this paper a proof of a theorem of nonexistence of finite characteristic matrix for paranormal logic* VVP *is presented*.

Цель работы – доказать, что для предложенной в [1] пропозициональной логики **VVP**, являющейся вариантом паранормальной логики, не существует конечной характеристической матрицы. Логика **VVP** аксиоматизирована в [1] посредством исчисления **HVVP**, описание которого воспроизводится ниже. Алфавит пропозиционального языка $\mathcal{L}$ есть множество $\{\&, \vee, \supset, \neg,), (, p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ символов, элементы которого имеют предполагаемые названия. Индуктивное определение $\mathcal{L}$-формулы (формулы в языке $\mathcal{L}$) стандартно:
(1) всякая пропозициональная переменная языка $\mathcal{L}$ есть $\mathcal{L}$-формула,
(2) если A и B есть $\mathcal{L}$-формулы, то $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(\neg A)$ есть $\mathcal{L}$-формулы.
Следуя [1], (а) условимся, что для всякого целого неотрицательного числа k и всякой пропозициональной переменной p языка $\mathcal{L}$

$$\neg^{(k)}p = \begin{cases} p, \text{ если } k = 0, \\ (\neg(\neg^{(k-1)}p)), \text{ если } k > 0, \end{cases}$$

и (б) определим квазиэлементарную $\mathcal{L}$-формулу как $\neg^{(k)}p$, где k есть целое неотрицательное число и p есть пропозициональная переменная языка $\mathcal{L}$.

Исчисление **HVVP** является стандартно определяемым исчислением гильбертовского типа, язык исчисления **HVVP** есть $\mathcal{L}$. Аксиомами исчисления **HVVP** являются в точности все формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих видов:
(1) $((A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)))$, где A, B и C – $\mathcal{L}$-формулы,
(2) $(A \supset (A \vee B))$, где A и B – $\mathcal{L}$-формулы,
(3) $(B \supset (A \vee B))$, где A и B – $\mathcal{L}$-формулы,
(4) $((A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C)))$, где A, B и C – $\mathcal{L}$-формулы,
(5) $((A \& B) \supset A)$, где A и B – $\mathcal{L}$-формулы,

(6) $((A \mathbin{\&} B) \supset B)$, где A и B – $\mathcal{L}$-формулы,
(7) $((C \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset (A \mathbin{\&} B))))$, где A, B и C – $\mathcal{L}$-формулы,
(8) $((A \supset (B \supset C)) \supset ((A \mathbin{\&} B) \supset C))$, где A, B и C – $\mathcal{L}$-формулы,
(9) $(((A \mathbin{\&} B) \supset C)) \supset ((A \supset (B \supset C))$, где A, B и C – $\mathcal{L}$-формулы,
(10) $(((A \supset B) \supset A) \supset A)$, где A и B – $\mathcal{L}$-формулы,
(11) $((\neg D) \supset (D \supset A))$, где A – $\mathcal{L}$-формула, а D – $\mathcal{L}$-формула, не являющаяся квазиэлементарной $\mathcal{L}$-формулой,
(12) $((D \supset (\neg (A \supset A))) \supset (\neg D))$, где A – $\mathcal{L}$-формула, а D – $\mathcal{L}$-формула, не являющаяся квазиэлементарной $\mathcal{L}$-формулой.

Правило *modus ponens в* $\mathcal{L}$ является единственным правилом вывода исчисления **HVVP**. Доказательства в **HVVP** строятся обычным образом. Исчисление **HVVP** аксиоматизирует логику **VVP**, т.е. множество всех формул, доказуемых в **HVVP**, равно **VVP**.

Лемма 1. Пусть K есть n-элементное (n-целое положительное число) множество, f есть отображение множества K в себя, $*$ есть операция композиции отображений множества K в себя, и для всякого целого неотрицательного числа i

$$f^{(i)} = \begin{cases} f, \text{ если } i = 0, \\ f * f^{(i-1)}, \text{ если } i > 0. \end{cases}$$

Тогда $\underset{k, l \text{ есть целые неотрицательные числа}, k \neq l}{\exists k \, \exists l}: f^{(k)} = f^{(l)}$

Доказательство

Очевидно, что $\underset{k \text{ есть целое неотрицательное число}}{\forall k}: f^{(k)}$ есть отображение множества K в себя.

Отсюда получаем, что множество $\{f^{(0)}, f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots\}$ является подмножеством множества всех отображений множества K в себя. Но множество всех отображений множества K в себя конечно, так как K есть конечное множество (известно, что число всех отображений конечного множества в себя равно m^m, где m-число элементов данного конечного множества). Поэтому множество $\{f^{(0)}, f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots\}$ конечно. Значит, $f^{(0)}, f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots$ не являются попарно различными отображениями. Но тогда существуют такие целые неотрицательные числа k и l, что $k \neq l$ и $f^{(k)} = f^{(l)}$.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Если некоторая матрица, носитель которой есть n-элементное (n есть целое положительное число) множество, является характеристической матрицей для **VVP**, то существуют такие целые неотрицательные числа k и l, что $k \neq l$ и $\mathcal{L}$-формула $(\neg^{(k)} p_1 \supset \neg^{(l)} p_1)$ принадлежит множеству **VVP**.

Доказательство

(1) существует матрица, носитель которой есть n-элементное (n есть целое неотрицательное число) множество, являющаяся характеристической матрицей для **VVP** (допущение).

Пусть (2) $\mathcal{M}$ есть матрица, носитель которой есть n-элементное (n-целое положительное число) множество, являющаяся характеристической матрицей для **VVP**.

Не ограничивая общности рассуждений, положим:

(3) $\mathcal{M} = \langle M, N, \{\&', \vee', \supset', \neg'\}\rangle$, $\&', \vee', \supset'$ есть бинарные, а $\neg'$ есть унарная операции на M.

Оценка языка $\mathcal{L}$ в $\mathcal{M}$ определяется стандартно (как отображение множества всех пропозициональных переменных языка $\mathcal{L}$ в M), обычным образом определяется (индукцией по построению $\mathcal{L}$-формулы) значение $\mathcal{L}$-формулы в $\mathcal{M}$ при заданной оценке языка $\mathcal{L}$ в $\mathcal{M}$ (значение $\mathcal{L}$-формулы F в $\mathcal{M}$ при оценке v языка $\mathcal{L}$ в $\mathcal{M}$ обозначаем через $|F|_v^{\mathcal{M}}$):

(i) $|p|_v^{\mathcal{M}} = v(p)$ для всякой пропозициональной переменной p языка $\mathcal{L}$,

(ii) $|(A \mathbin{\&} B)|_v^{\mathcal{M}} = |A|_v^{\mathcal{M}} \mathbin{\&'} |B|_v^{\mathcal{M}}$ для всяких $\mathcal{L}$-формул A и B,

(iii) $|(A \vee B)|_v^{\mathcal{M}} = |A|_v^{\mathcal{M}} \vee' |B|_v^{\mathcal{M}}$ для всяких $\mathcal{L}$-формул A и B,

(iv) $|(A \supset B)|_v^{\mathcal{M}} = |A|_v^{\mathcal{M}} \supset' |B|_v^{\mathcal{M}}$ для всяких $\mathcal{L}$-формул A и B,

(v) $|(\neg A)|_v^{\mathcal{M}} = \neg' |A|_v^{\mathcal{M}}$ для всякой $\mathcal{L}$-формулы A.

Покажем теперь, что (4) $\underset{x \in M}{\forall x}: x \supset' x \in N$

Пусть $a \in M$ и v_a есть оценка языка $\mathcal{L}$ в $\mathcal{M}$ такая, что $v_a(p) = a$ для всякой пропозициональной переменной p языка $\mathcal{L}$. Тогда $|(p_1 \supset p_1)|_{v_a}^{\mathcal{M}} = |p_1|_{v_a}^{\mathcal{M}} \supset' |p_1|_{v_a}^{\mathcal{M}} = v_a(p_1) \supset' v_a(p_1) = a \supset' a$. Но для всякой оценки v языка $\mathcal{L}$ в $\mathcal{M}$ $|(p_1 \supset p_1)|_v^{\mathcal{M}} \in N$ (из (2), (3) и того, что $\mathcal{L}$-формула $(p_1 \supset p_1)$ доказуема в **HVVP**). Поэтому $a \supset' a \in N$. Отсюда, поскольку a есть произвольный элемент множества M, получаем, что $\underset{x \in M}{\forall x}: x \supset' x \in N$.

Условимся, что (5) для всякого целого неотрицательного числа m

$$\neg'^{(m)} = \begin{cases} \neg', & \text{если } m = 0, \\ \neg' * \neg'^{(m-1)}, & \text{если } m > 0 \end{cases}$$

(здесь * есть операция композиции отображений множества M в себя).

Тогда по лемме 1 получаем, что (6) $\underset{k,\, l \text{ есть целые неотрицательные числа},\, k \neq l}{\exists k\, \exists l}: \neg'^{(k)} = \neg'^{(l)}$.

Пусть (7) k_0 и l_0 есть целые неотрицательные числа, такие, что $k_0 \neq l_0$ и $\neg'^{(k_0)} = \neg'^{(l_0)}$.

Тогда (8) $\underset{x \in M}{\forall x}: \neg'^{(k_0)}(x) = \neg'^{(l_0)}(x)$.

Используя определение значения $\mathcal{L}$-формулы в $\mathfrak{M}$ при оценке языка $\mathcal{L}$ в $\mathfrak{M}$ и договорённости об обозначениях, легко получить, что

(9) $\underset{v \text{ есть оценка языка } \mathcal{L} \text{ в } \mathfrak{M}}{\forall v}: |(\neg^{(k_0)} p_1 \supset \neg^{(l_0)} p_1)|_v{}^{\mathfrak{M}} = (\neg'^{(k_0)} v(p_1)) \supset' (\neg'^{(l_0)} v(p_1))$.

(10) $\underset{v \text{ есть оценка языка } \mathcal{L} \text{ в } \mathfrak{M}}{\forall v}: (\neg'^{(k_0)} v(p_1)) \supset' (\neg'^{(l_0)} v(p_1)) = (\neg'^{(k_0)} v(p_1)) \supset' (\neg'^{(k_0)} v(p_1))$

(из (8) и того, что $\underset{v \text{ есть оценка языка } \mathcal{L} \text{ в } \mathfrak{M}}{\forall v}: v(p_1) \in M$)

(11) $\underset{v \text{ есть оценка языка } \mathcal{L} \text{ в } \mathfrak{M}}{\forall v}: (\neg'^{(k_0)} v(p_1)) \supset' (\neg'^{(k_0)} v(p_1)) \in N$ (из (5) и того, что $\underset{v \text{ есть оценка языка } \mathcal{L} \text{ в } \mathfrak{M}}{\forall v}: \neg'^{(k_0)} v(p_1) \in M$)

(12) $\underset{v \text{ есть оценка языка } \mathcal{L} \text{ в } \mathfrak{M}}{\forall v}: |(\neg^{(k_0)} p_1 \supset \neg^{(l_0)} p_1)|_v{}^{\mathfrak{M}} \in N$ (из (9), (10) и (11))

(13) $(\neg^{(k_0)} p_1 \supset \neg^{(l_0)} p_1) \in$ **VVP** (из (12) и того, что $\mathfrak{M}$ есть характеристическая матрица для **VVP** (см. (2)) и N есть выделенное множество матрицы $\mathfrak{M}$ (см. (3)), по определению характеристической матрицы для **VVP**).

Устраняя допущение (1), получаем, что верна лемма 2.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Для всяких целых неотрицательных чисел k и l, таких, что $k \neq l$, $\mathcal{L}$-формула $(\neg^{(k)} p_1 \supset \neg^{(l)} p_1)$ не принадлежит множеству **VVP**.

При доказательстве леммы 3 будем использовать построенную в [1] семантику исчисления **HVVP**, базирующуюся на понятии *квазиописания описания состояния. Квазиописанием описанием состояния* (*кс*) называется отображение множества всех квазиэлементарных формул в $\{0,1\}$. Можно доказать, что для каждого *кс* α существует единственное отображение $|\ |_\alpha$ множества всех $\mathcal{L}$-формул в $\{0,1\}$, удовлетворяющее следующим условиям:

(a) для всякой квазиэлементарной $\mathcal{L}$-формулы e: $|e|_\alpha = \alpha(e)$,

(b) для всякой $\mathcal{L}$-формулы A, не являющейся квазиэлементарной $\mathcal{L}$-формулой: $|(\neg A)|_\alpha = 1$ т.т.т. $|A|_\alpha = 0$,

(c) для всяких $\mathcal{L}$-формул A и B: $|(A \mathbin{\&} B)|_\alpha = 1$ т.т.т. $|A|_\alpha = 1$ и $|B|_\alpha = 1$,

(d) для всяких $\mathcal{L}$-формул A и B: $|(A \vee B)|_\alpha = 1$ т.т.т. $|A|_\alpha = 1$ или $|B|_\alpha = 1$,

(e) для всяких $\mathcal{L}$-формул A и B: $|(A \supset B)|_\alpha = 1$ т.т.т. $|A|_\alpha = 0$ или $|B|_\alpha = 1$.

Теорема об адекватности логики **VVP** рассмотренной семантике, сформулированная в [1], гласит: $\mathcal{L}$-формула A доказуема в **HVVP** т.т.т. $\mathcal{L}$-формула A такова, что $\forall\alpha$: $|A|_\alpha = 1$.

α есть *кс*

В силу этой теоремы для доказательства леммы 3 достаточно доказать, что

(+) для всяких неотрицательных чисел k и l, таких, что $k \neq l$, существует *кс* α такое, что $|(\neg^{(k)} p_1 \supset \neg^{(l)} p_1)|_\alpha \neq 1$.

Пусть k_0 и l_0 есть произвольные целые неотрицательные числа, такие, что $k_0 \neq l_0$. Пусть α_0 есть $\{\langle e, 0\rangle \mid e$ есть квазиэлементарная $\mathcal{L}$-формула и $e \neq \neg^{(k_0)} p_1\} \cup \{\langle\neg^{(k_0)} p_1, 1\rangle\}$. Ясно, что α_0 есть *кс* такое, что $|\neg^{(k_0)} p_1|_{\alpha 0} = 1$ и $|\neg^{(l_0)} p_1|_{\alpha 0} = 0$. Очевидно, что $|(\neg^{(k_0)} p_1 \supset \neg^{(l_0)} p_1)|_{\alpha 0} \neq 1$. Итак, существует *кс* α такое, что $|(\neg^{(k_0)} p_1 \supset \neg^{(l_0)} p_1)|_\alpha \neq 1$. Но тогда, поскольку k_0 и l_0 есть произвольные целые неотрицательные числа, такие, что $k_0 \neq l_0$, получаем, что для всяких целых неотрицательных чисел k и l, таких, что $k \neq l$, существует *кс* α такое, что $|(\neg^{(k)} p_1 \supset \neg^{(l)} p_1)|_\alpha \neq 1$.

Утверждение (+) доказано.

Лемма 3 доказана.

Следствием леммы 2 и леммы 3 является следующая **теорема**: не существует конечной характеристической матрицы для логики **VVP**.

Автор выражает благодарность В.М.Попову за помощь, оказанную при написании этой статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов В.М.* Паралогики: секвенциальные формулировки и семантика // Доклад, прочитанный 16.03.04 на заседании Объединенного семинара кафедры логики философского факультета МГУ и сектора логики Института философии РАН.