В.И.Хомич

ОБ ИЗОМОРФНОЙ ВЛОЖИМОСТИ КОНЕЧНЫХ БУЛЕВЫХ И ТОПОЛОГИЧЕСКИХ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР

Abstract. *In this paper we study the problem of isomorphic embeddability for finite Boolean and topological Boolean algebras. We obtain the criteria of isomorphic embeddability for such algebras. We also obtain some other results in connection with this problem.*

Введение

Настоящая статья посвящена изучению проблемы изоморфной вложимости конечных булевых и топологических булевых алгебр.

Известно (см., например, [1,2,3]), что булевы алгебры и топологические булевы алгебры являются моделями для классической пропозициональной логики и модальной логики **S4** соответственно. Решение многих задач дедуктивного характера, возникающих при исследовании этих логик, сводится к задаче изоморфной вложимости как булевых алгебр так и топологических булевых алгебр друг в друга. Для решения последней часто используется их представления через объекты более простой структуры. В работах [4-9] автором предложено и детально разработано пригодное для этой цели представление конечных импликативных полуструктур и структур и псевдобулевых алгебр [10,11,1] через импликатуры[1] (т.е. $\supset$–алгебры) специального вида. Суть его заключается в том, что заданная алгебра (полуструктура, структура) однозначно (с точностью до изоморфизма) определяется множеством ее неразложимых в пересечение элементов. Более того, это множество можно рассматривать как импликатуру, удовлетворяющую некоторому условию, и как частично упорядоченное множество с наибольшим элементом, причем эти объекты легко превращаются друг в друга [8,9]. При таком подходе и представляемые алгебры (полуструктуры, структуры) и представляющие их импликатуры – суть объекты одной и той же природы, что облегчает изучение конечных импликативных

---

[1] Импликатура (т.е. $\supset$-алгебра) [12,4,5,6] – это множество, на котором задана операция относительного псевдодополнения, являющаяся модельным аналогом интуиционистской логической связки импликация.

полуструктур и структур и псевдобулевых алгебр. Поскольку всякая булева алгебра является псевдобулевой [1], то это представление касается и конечных булевых алгебр.

В работах [13,14] получены критерии изоморфной вложимости для конечных импликативных полуструктур и структур и псевдобулевых алгебр. Они основаны на упомянутом выше представлении алгебр и сводят решение вопроса о вложении алгебры Θ в алгебру Φ к вопросу о вложении импликатуры, представляющей алгебру Θ, в алгебру Φ. В данной работе эти критерии распространим на конечные булевы и топологические булевы алгебры. Покажем, что предложенное автором представление конечных булевых алгебр согласовано с отношениями гомоморфности и изоморфности этих алгебр. Используя указанные выше результаты, достаточно легко докажем известный результат о том, что каждая булева алгебра представляется как некоторая декартова степень двухэлементной булевой алгебры.

§1. Предварительные сведения

Напомним необходимые в дальнейшем сведения. Операции булевой алгебры и топологической булевой алгебры будем обозначать так же, как и соответствующие им (интерпретируемые ими) логические пропозициональные связки, а их наибольший (выделенный, единичный) и наименьший (нулевой) элементы – через **1** и **0** соответственно.

Известно [1], что всякая булева алгебра является псевдобулевой. Поэтому все результаты, полученные для псевдобулевых алгебр, верны и для булевых алгебр. Тем самым, разработанное автором представление конечных псевдобулевых алгебр применимо и к конечным булевым алгебрам. Если в какой-либо псевдобулевой алгебре для любого ее элемента ξ верно соотношение $\xi\vee\neg\xi=\mathbf{1}$, то она булева алгебра. Одноэлементную булеву алгебру будем называть вырожденной.

Пусть Θ - булева алгебра или топологическая булева алгебра, а ξ и η - ее элементы. На Θ можно задать отношение частичного порядка, положив $\xi\leq\eta$ в том и только том случае, когда $\xi\supset\eta=\mathbf{1}$. Элементы ξ и η назовем *несравнимыми* в Θ, если $\xi\supset\eta\neq\mathbf{1}$ и $\eta\supset\xi\neq\mathbf{1}$. В противном случае элементы ξ и η назовем *сравнимыми* в Θ. Элемент ξ назовем *неразложимым в пересечение* или просто *неразложимым* в Θ, если из верности соотношений $\rho,\tau\in\Theta$ и $\rho\&\tau=\xi$ следует, что $\rho=\xi$ или $\tau=\xi$. В противном случае элемент ξ назовем *разложимым* в Θ. Как и в

[5], множество всех неразложимых элементов алгебры Θ будем обозначать через $I(\Theta)$. Очевидно, что $\mathbf{1}\in I(\Theta)$. Согласно лемме 2 из [5] и лемме 1 из [6], если $\sigma\in\Theta$ и $\varphi\in I(\Theta)$, то в Θ верно хотя бы одно из равенств $\sigma\supset\varphi=\varphi$ или $\sigma\supset\varphi=\mathbf{1}$. Поэтому подмножество $I(\Theta)$ алгебры Θ замкнуто в Θ относительно операции $\supset$ и тем самым является импликатурой ($\supset$-алгеброй). Если Θ - конечная невырожденная булева алгебра, то $|I(\Theta)|>1$.

Пусть Ξ - какое-нибудь подмножество алгебры Θ. Элемент ρ множества Ξ назовем *минимальным* в Ξ, если из верности в Θ соотношений $\sigma\in\Xi$ и $\sigma\leq\rho$ следует, что $\sigma=\rho$. Множество всех минимальных элементов множества Ξ будем обозначать через $\Re(\Xi)$, а пересечение в Θ всех элементов множества Ξ (если Ξ конечно и непусто) – через $\langle\Xi\rangle$. Терм $\delta_n\supset(\ldots\supset(\delta_1\supset\gamma)\ldots)$ условимся записывать в виде $\{\delta_1,\ldots,\delta_n\}\supset\gamma$[2].

Конечное непустое множество Δ элементов алгебры Θ назовем *разложением элемента* ξ в Θ, если $\langle\Delta\rangle=\xi$. Пусть Ψ - какое-либо разложение элемента ξ в Θ. Элемент τ разложения Ψ назовем его *сократимым элементом*, если $\Psi\backslash\{\tau\}\neq\varnothing$ и $\langle\Psi\backslash\{\tau\}\rangle=\xi$. В противном случае τ будем называть *несократимым элементом* разложения Ψ. Разложение Ψ назовем *несократимым*, если каждый его элемент является несократимым. В противном случае разложение Ψ будем называть *сократимым*. Если в алгебре Θ для ξ существует несократимое разложение, состоящее из ее неразложимых элементов, то оно единственно [10]. В случае конечности алгебры Θ такое разложение для ξ осуществимо [10,8], а поэтому, имея в виду единственность, в дальнейшем будем обозначать его через $r(\xi)$.

Число элементов конечного множества Ω будем обозначать через $|\Omega|$. Если g – какое-небудь отображение множества Ξ в множество Ψ, а Δ - подмножество множества Ξ, то через $g(\Delta)$ будем обозначать множество образов Δ при отбражении g.

Пусть Θ и Φ - конечные булевы алгебры. Будем говорить, что булева алгебра Θ ($\supset$-алгебра $I(\Theta)$) *вложима* в булеву алгебру Φ, если существует изоморфизм булевой алгебры Θ ($\supset$-алгебры $I(\Theta)$) на некоторую булеву подалгебру ($\supset$-подалгебру) алгебры Φ. Сам изоморфизм будем называть *вложением* булевой алгебры Θ ($\supset$-алгебры $I(\Theta)$) в булеву алгебру Φ. Для конечных топологических булевых алгебр понятия *вложимости* и *вложения* определяются аналогичным образом.

---

[2] По сути, эта запись обозначает семейство графически различных термов, имеющих одно и то же значение.

Пусть f – какое-либо отображение подмножества $I(\Theta)$ алгебры Θ в алгебру Φ. Как и в [5], для f построим отображение $f_{\&}$ множества Θ в Φ, положив $f_{\&}(\zeta)=\langle f(r(\zeta))\rangle$, где $\zeta\in\Theta$. Если $\zeta\in I(\Theta)$, то верно равенство $f_{\&}(\zeta)=f(\zeta)$.

§2. Булевы алгебры

В этом параграфе докажем теорему, дающую критерий изоморфной вложимости для конечных булевых алгебр. Этот критерий является аналогом критериев, полученных автором в работах [13,14] для конечных импликативных полуструктур и структур и псевдобулевых алгебр. Покажем, что предложенное автором представление конечных булевых алгебр согласовано с отношениями гомоморфности и изоморфности этих алгебр. Кроме того, докажем известный результат о том, что каждая булева алгебра представляется как некоторая декартова степень двухэлементной булевой алгебры. Это будет сделано потому, что его доказательство основывается на изучаемым представлении булевых алгебр, использует только что упомянутые результаты и является достаточно простым.

Докажем следующую вспомогательную лемму.

Лемма 1. *Для любой конечной булевой алгебры* Θ *имеют место следующие утверждения*:

1) *если* $\xi,\eta\in I(\Theta)\setminus\{\mathbf{1}\}$ *и* $\xi\neq\eta$, *то верны неравенства* $\xi\supset\eta\neq\mathbf{1}$ *и* $\eta\supset\xi\neq\mathbf{1}$;

2) *если* Θ - *невырожденная булева алгебра, то* $\Re(I(\Theta))=I(\Theta)\setminus\{\mathbf{1}\}$.

Доказательство. Пусть задана конечная булева алгебра Θ. Докажем утверждение 1). Пусть $\xi,\eta\in I(\Theta)\setminus\{\mathbf{1}\}$ и $\xi\neq\eta$. Тогда имеем $\xi\neq\mathbf{1}$ и $\eta\neq\mathbf{1}$. Предположим, что $\xi\supset\eta=\mathbf{1}$ (т.е. $\xi\leq\eta$). Так как $\xi\neq\eta$, то η не является минимальным элементом множества $I(\Theta)$. Поэтому согласно лемме 5 (пункт 2) из [5] верно соотношение $\neg\eta=\mathbf{0}$. Тогда имеем $\mathbf{1}=\eta\vee\neg\eta=\eta\vee\mathbf{0}=\eta$. Получили противоречие. Следовательно, $\xi\supset\eta\neq\mathbf{1}$. Аналогичным образом получаем, что $\eta\supset\xi\neq\mathbf{1}$.

Докажем утверждение 2). Пусть Θ - невырожденная булева алгебра. Покажем, что $\Re(I(\Theta))\subseteq I(\Theta)\setminus\{\mathbf{1}\}$. Пусть $\rho\in\Re(I(\Theta))$. Тогда имеем $\rho\in I(\Theta)$. Если бы $\rho=\mathbf{1}$, то $I(\Theta)=\{\mathbf{1}\}$ и поэтому Θ была бы вырожденной алгеброй, что давало бы противоречие. Значит, $\rho\neq\mathbf{1}$. Тогда имеем $\rho\in I(\Theta)\setminus\{\mathbf{1}\}$. Следовательно, $\Re(I(\Theta))\subseteq I(\Theta)\setminus\{\mathbf{1}\}$.

Покажем, что $I(\Theta)\setminus\{\mathbf{1}\}\subseteq\Re(I(\Theta))$. Пусть $\tau\in I(\Theta)\setminus\{\mathbf{1}\}$. Тогда согласно утверждению 1) этой леммы в $I(\Theta)$ не существует такого элемента σ, что $\sigma\supset\tau=\mathbf{1}$ и $\sigma\neq\tau$. Значит, $\tau\in\Re(I(\Theta))$.

Следовательно, $I(\Theta)\backslash\{\mathbf{1}\}\subseteq\Re(I(\Theta))$. В результате получаем, что $\Re(I(\Theta))=I(\Theta)\backslash\{\mathbf{1}\}$. Лемма 1 доказана.

Теорема 1, анонсированная в работе 13 и доказанная в 14 дает критерий изоморфной вложимости для конечных псевдобулевых алгебр. Для конечных булевых алгебр он упрощается. Докажем теорему, дающую этот критерий.

Теорема 1. *Конечная булева алгебра* Ψ *вложима в конечную булеву алгебру* Φ *в том и только том случае, когда существует такое вложение* f $\supset$*-алгебры* $I(\Psi)$ *в алгебру* Φ, *что* $\langle f(\Re(I(\Theta)))\rangle=\mathbf{0}$.

Доказательство. Пусть заданы конечные булевы алгебры Ψ и Φ. Пусть булева алгебра Ψ вложима в булеву алгебру Φ, т.е. существует подходящее вложение g. По лемме 2 из [5] и лемме 1 из [6] множество $I(\Psi)$ является $\supset$-подалгеброй алгебры Ψ. Следовательно, g - вложение $\supset$-алгебры $I(\Psi)$ в алгебру Φ. Согласно лемме 5 (пункт 1) из [5], в Ψ верно равенство $r(\mathbf{0}_\Psi)=\Re(I(\Psi))$. Значит, $\langle\Re(I(\Psi))\rangle=\mathbf{0}_\Psi$. Поскольку $g(\mathbf{0}_\Psi)=\mathbf{0}$ и g сохраняет операцию &, имеем $\langle g(\Re(I(\Psi)))\rangle=g(\langle\Re(I(\Psi))\rangle)=g(\mathbf{0}_\Psi)=$ $=\mathbf{0}$.

Пусть f - вложение $\supset$-алгебры $I(\Psi)$ в алгебру Φ, удовлетворяющее условию $\langle f(\Re(I(\Psi)))\rangle=\mathbf{0}$. Тогда имеем $f(\mathbf{1})=\mathbf{1}$. Рассмотрим отображение $f_\&$ множества Ψ в Φ. Согласно его построению имеем $f_\&(\mathbf{1})=\mathbf{1}$. Пусть $\xi,\eta\in\Psi$. Покажем, что $f_\&$ сохраняет операцию $\supset$, т.е. $f_\&(\xi\supset\eta)=f_\&(\xi)\supset f_\&(\eta)$. Легко видеть, что $\xi\supset\eta=\langle r(\xi)\rangle\supset\langle r(\eta)\rangle=\langle\{r(\xi)\supset\zeta|\zeta\in r(\eta)\}\rangle$. Если $\zeta\in r(\eta)$ и $r(\xi)\supset\zeta\neq\mathbf{1}$, то $\xi\supset\zeta\neq\mathbf{1}$ и поэтому в силу леммы 2 из [5] имеем $\xi\supset\zeta=\zeta$, откуда получаем, что $r(\xi)\supset\zeta=\zeta$. Следовательно, $r(\xi\supset\eta)=\{\zeta|\zeta\in r(\eta),r(\xi)\supset\zeta\neq\mathbf{1}\}$, если в $r(\eta)$ существует такое ζ, что $r(\xi)\supset\zeta\neq\mathbf{1}$, и $r(\xi\supset\eta)=\{\mathbf{1}\}$ в противном случае. Так как f - вложение $\supset$-алгебры $I(\Psi)$ в алгебру Φ и для любого ζ из $r(\eta)$ в $I(\Psi)$ верно равенство $r(\xi)\supset\zeta=\mathbf{1}$ или равенство $r(\xi)\supset\zeta=\zeta$, то $f(r(\xi))\supset f(\zeta)=\mathbf{1}$ или $f(r(\xi))\supset f(\zeta)=f(\zeta)$. Следовательно, $f_\&(\xi\supset\eta)=$ $=\langle f(r(\xi\supset\eta))\rangle=\langle\{f(r(\xi))\supset f(\zeta)|\zeta\in r(\eta)\}\rangle=\langle\{\langle f(r(\xi))\rangle\supset f(\zeta)|\zeta\in r(\eta)\}\rangle=$ $=\langle f(r(\xi))\rangle\supset\langle f(r(\eta))\rangle=f_\&(\xi)\supset f_\&(\eta)$.

Покажем, что $f_\&$ сохраняет операцию $\neg$, т.е. $f_\&(\neg\xi)=\neg f_\&(\xi)$. Согласно лемме 5 (пункт 1) из [5], в Ψ верно равенство $r(\mathbf{0}_\Psi)=\Re(I(\Psi))$. Поскольку $\langle f(\Re(I(\Psi)))\rangle=\mathbf{0}$, имеем $f_\&(\mathbf{0}_\Psi)=$ $=\langle f(r(\mathbf{0}_\Psi))\rangle=\langle f(\Re(I(\Psi)))\rangle=\mathbf{0}$. Так как $f_\&$ сохраняет операцию $\supset$, то $f_\&(\neg\xi)=f_\&(\xi\supset\mathbf{0}_\Psi)=f_\&(\xi)\supset f_\&(\mathbf{0}_\Psi)=f_\&(\xi)\supset\mathbf{0}=\neg f_\&(\xi)$.

Покажем, что $f_\&$ сохраняет операции & и $\vee$, т.е. $f_\&(\xi\&\eta)=f_\&(\xi)\&f_\&(\eta)$ и $f_\&(\xi\vee\eta)=f_\&(\xi)\vee f_\&(\eta)$. В алгебре Ψ верны равенства $\xi\&\eta=\neg(\xi\supset\neg\eta)$ и $\xi\vee\eta=\neg\xi\supset\eta$, а в Φ - равенства $f_\&(\xi)\&f_\&(\eta)=\neg(f_\&(\xi)\supset\neg f_\&(\eta))$ и $f_\&(\xi)\vee f_\&(\eta)=\neg f_\&(\xi)\supset f_\&(\eta)$.

Поскольку $f_\&$ сохраняет операции $\supset$ и $\neg$, имеем $f_\&(\xi\&\eta)=f_\&(\neg(\xi\supset\neg\eta))=\neg(f_\&(\xi)\supset\neg f_\&(\eta))=f_\&(\xi)\&f_\&(\eta)$ и $f_\&(\xi\vee\eta)=$ $=f_\&(\neg\xi\supset\eta)=\neg f_\&(\xi)\supset f_\&(\eta)=f_\&(\xi)\vee f_\&(\eta)$.

Покажем, что отображение $f_\&$ различным элементам сопоставляет различные элементы. Пусть $\xi\neq\eta$. Предположим, что $f_\&(\xi)=f_\&(\eta)$. Тогда имеем $f_\&(\xi)\supset f_\&(\eta)=\mathbf{1}$ и $f_\&(\eta)\supset f_\&(\xi)=\mathbf{1}$. С помощью равенства $f_\&(\xi)\supset f_\&(\eta)=\mathbf{1}$ получаем, что
$\mathbf{1}=f_\&(\xi)\supset f_\&(\eta)=\langle f(r(\xi))\rangle\supset\langle f(r(\eta))\rangle=\langle\{\langle f(r(\xi))\rangle\supset f(\zeta)|\zeta\in r(\eta)\}\rangle=$
$=\langle\{f(r(\xi))\supset f(\zeta)|\zeta\in r(\eta)\}\rangle=\langle\{f(r(\xi)\supset\zeta)|\zeta\in r(\eta)\}\rangle$. Поэтому для любого ζ из $r(\eta)$ в Φ верно равенство $f(r(\xi)\supset\zeta)=\mathbf{1}$. Так как f - вложение $\supset$-алгебры $I(\Psi)$ в алгебру Φ, то в Ψ верно равенство $r(\xi)\supset\zeta=\mathbf{1}$, где $\zeta\in r(\eta)$. Тогда $\mathbf{1}=\langle\{r(\xi)\supset\zeta|\zeta\in r(\eta)\}\rangle=$ $\langle\{\langle r(\xi)\rangle\supset\zeta|\zeta\in r(\eta)\}\rangle=\langle r(\xi)\rangle\supset\langle r(\eta)\rangle=\xi\supset\eta$ и поэтому имеем $\xi\supset\eta=\mathbf{1}$.

Используя равенство $f_\&(\eta)\supset f_\&(\xi)=\mathbf{1}$, аналогичными рассуждениями получаем, что $\eta\supset\xi=\mathbf{1}$. Значит, $\xi=\eta$. Получили противоречие. Следовательно, $f_\&(\xi)\neq f_\&(\eta)$.

Таким образом, $f_\&$ является вложением булевой алгебры Ψ в булеву алгебру Φ. Теорема 1 доказана.

Докажем, что предложенное автором представление конечных булевых алгебр согласованно с отношением гомоморфности этих алгебр.

Теорема 2. *Конечная булева алгебра* Φ *является гомоморфным образом конечной булевой алгебры* Ψ *тогда и только тогда, когда* $\supset$*-алгебра* $I(\Phi)$ *является гомоморфным образом* $\supset$*-алгебры* $I(\Psi)$.

Доказательство. Пусть заданы конечные булевы алгебры Ψ и Φ. Пусть g – гомоморфизм булевой алгебры Ψ на булеву алгебру Φ. Покажем, что g - гомоморфизм $\supset$-алгебры $I(\Psi)$ на $\supset$-алгебру $I(\Phi)$. Так как множества $I(\Psi)$ и $I(\Phi)$ является $\supset$-подалгебрами булевых алгебр Ψ и Φ соответственно, то для этого достаточно доказать, что g отображает множество $I(\Psi)$ на множество $I(\Phi)$.

Пусть $\xi\in I(\Psi)$. Покажем, что $g(\xi)\in I(\Phi)$. Пусть в Φ верно соотношение $g(\xi)=\alpha\&\beta$, где $\alpha,\beta\in\Phi$. Тогда для α существует такой σ, что $\sigma\in\Psi$ и $g(\sigma)=\alpha$. Если $\alpha\supset g(\xi)=\mathbf{1}$, то $\alpha\leq g(\xi)$ и $g(\xi)=\alpha\&\beta\leq\alpha$, а поэтому имеем $g(\xi)=\alpha$.

Пусть $\alpha\supset g(\xi)\neq\mathbf{1}$. Тогда $g(\sigma)\supset g(\xi)\neq\mathbf{1}$ и поэтому имеем $g(\sigma\supset\xi)\neq\mathbf{1}$. Значит, $\sigma\supset\xi\neq\mathbf{1}$. Так как $\xi\in I(\Psi)$, то согласно лемме 2 из [5] в Ψ верно равенство $\sigma\supset\xi=\xi$. Тогда $g(\sigma)\supset g(\xi)=g(\xi)$, т.е. имеем $\alpha\supset g(\xi)=g(\xi)$. Так как $g(\xi)=\alpha\&\beta$, то верны соотношения $\beta\leq\alpha\supset g(\xi)=g(\xi)$ и $g(\xi)\leq\beta$. Значит, $g(\xi)=\beta$. В результате получаем, что $g(\xi)=\alpha$ или $g(\xi)=\beta$. Следовательно, $g(\xi)\in I(\Phi)$.

Пусть $\gamma\in I(\Phi)$. Тогда для γ существует такой τ, что $\tau\in\Psi$ и $g(\tau)=\gamma$. Так как Ψ - конечна, то в подмножестве $\Delta=\{\zeta|\zeta\in\Psi,f(\zeta)=\mathbf{1}\}$ алгебры Ψ существует наименьший элемент. Обозначим его через ε. Положим $\omega=\varepsilon\supset\tau$. Тогда имеем $g(\omega)=g(\varepsilon\supset\tau)=g(\varepsilon)\supset g(\tau)=\mathbf{1}\supset g(\tau)=g(\tau)=\gamma$. Покажем, что $\omega\in I(\Psi)$. Пусть в Ψ верно соотношение $\omega=\kappa\&\rho$, где $\kappa,\rho\in\Psi$. Тогда имеем $\gamma=g(\omega)=g(\kappa\&\rho)=g(\kappa)\&g(\rho)$. Поскольку $\gamma\in I(\Phi)$, имеем $g(\kappa)=\gamma$ или $g(\rho)=\gamma$.

Пусть $g(\kappa)=\gamma$. Тогда $g(\kappa)=g(\tau)$ и поэтому $\mathbf{1}=g(\kappa)\supset g(\tau)=g(\kappa\supset\tau)$ и тем самым имеем $\kappa\supset\tau\in\Delta$. Значит, $\varepsilon\leq\kappa\supset\tau$. Следовательно, $\mathbf{1}=\varepsilon\supset(\kappa\supset\tau)=\kappa\supset(\varepsilon\supset\tau)$. Отсюда получаем, что $\kappa\leq\varepsilon\supset\tau=\omega$. Кроме того, имеем $\omega=\kappa\&\rho\leq\kappa$. Значит, $\omega=\kappa$. Если $g(\rho)=\gamma$, то аналогичными рассуждениями получаем, что $\omega=\rho$. Следовательно, $\omega\in I(\Psi)$. Таким образом, g отображает $\supset$-подалгебру $I(\Psi)$ булевой алгебры Ψ на $\supset$-подалгебру $I(\Phi)$ булевой алгебры Φ.

Пусть f - гомоморфизм $\supset$-алгебры $I(\Psi)$ на $\supset$-алгебру $I(\Phi)$. Тогда имеем $f(\mathbf{1})=\mathbf{1}$. Рассмотрим отображение $f_{\&}$ множества Ψ в Φ. Согласно его построению имеем $f_{\&}(\mathbf{1})=\mathbf{1}$. Пусть $\eta,\varphi\in\Psi$. Как и в теореме 1, получаем, что $f_{\&}(\eta\supset\varphi)=f_{\&}(\eta)\supset f_{\&}(\varphi)$, т.е. $f_{\&}$ сохраняет операцию $\supset$.

Докажем, что $\langle f(\Re(I(\Psi)))\rangle=\mathbf{0}$. Согласно лемме 5 (пункт 1) из [5], в Φ верно равенство $r(\mathbf{0})=\Re(I(\Phi))$. Поэтому для нашей цели достаточно показать, что для всякого δ из $\Re(I(\Phi))$ существует ν, удовлетворяющий условиям $\nu\in\Re(I(\Psi))$ и $f(\nu)=\delta$. Пусть $\delta\in\Re(I(\Phi))$. Тогда для δ существует такой μ, что $\mu\in I(\Psi)$ и $f(\mu)=\delta$. Так как $\supset$-алгебра $I(\Psi)$ – конечна, то найдется такой ν, что $\nu\in\Re(I(\Psi))$ и $\nu\leq\delta$. Тогда $\nu\supset\mu=\mathbf{1}$ и поэтому имеем $\mathbf{1}=f(\nu)\supset f(\mu)=f(\nu)\supset\delta$. Значит, $f(\nu)\leq\delta$. Поскольку $f(\nu)\in I(\Phi)$ и $\delta\in\Re(I(\Phi))$, имеем $f(\nu)=\delta$.

Покажем, что $f_{\&}$ сохраняет операцию $\neg$, т.е. $f_{\&}(\neg\eta)=\neg f_{\&}(\eta)$. Согласно лемме 5 (пункт 1) из [5], в Ψ верно равенство $r(\mathbf{0}_{\Psi})=\Re(I(\Psi))$. Поскольку $\langle f(\Re(I(\Psi)))\rangle=\mathbf{0}$, имеем $f_{\&}(\mathbf{0}_{\Psi})=$ $=\langle f(r(\mathbf{0}_{\Psi}))\rangle=\langle f(\Re(I(\Psi)))\rangle=\mathbf{0}$. Так как $f_{\&}$ сохраняет операцию $\supset$, то $f_{\&}(\neg\eta)=f_{\&}(\eta\supset\mathbf{0}_{\Psi})=f_{\&}(\eta)\supset f_{\&}(\mathbf{0}_{\Psi})=f_{\&}(\eta)\supset\mathbf{0}=\neg f_{\&}(\eta)$.

Как и в теореме 1, получаем, что $f_{\&}(\eta\&\varphi)=f_{\&}(\eta)\&f_{\&}(\varphi)$ и $f_{\&}(\eta\vee\varphi)=f_{\&}(\eta)\vee f_{\&}(\varphi)$, т.е. $f_{\&}$ сохраняет операции & и $\vee$.

Покажем, что $f_{\&}$ отображает алгебру Ψ на Φ. Пусть $\lambda\in\Phi$. Множество $\{\zeta|\zeta\in I(\Psi),f(\zeta)\in r(\lambda)\}$ конечно и непусто. Тогда $\langle\{\zeta|\zeta\in I(\Psi),f(\zeta)\in r(\lambda)\}\rangle\in\Psi$ и поэтому имеем $f_{\&}(\langle\{\zeta|\zeta\in I(\Psi),f(\zeta)\in r(\lambda)\}\rangle)=\langle\{f_{\&}(\zeta)|\zeta\in I(\Psi),f(\zeta)\in r(\lambda)\}\rangle=$ $=\langle\{f(\zeta)|\zeta\in I(\Psi),f(\zeta)\in r(\lambda)\}\rangle=\langle r(\lambda)\rangle=\lambda$.Теорема 2 доказана.

Докажем, что предложенное автором представление конечных булевых алгебр согласованно с отношением изоморфности этих алгебр.

Теорема 3. *Конечные булевы алгебры* Ψ *и* Φ *изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны* $\supset$*-алгебры* $I(\Psi)$ *и* $I(\Phi)$.

Доказательство. Пусть заданы конечные булевы алгебры Ψ и Φ. Изоморфность алгебр Ψ и Φ равносильна тому, что Ψ - гомоморфный образ Φ и Φ - гомоморфный образ Ψ. Согласно теореме 2 эта конъюнкция равносильна тому, что $\supset$-алгебра $I(\Psi)$ – гомоморфный образ $\supset$-алгебры $I(\Phi)$ и $\supset$-алгебра $I(\Phi)$ - гомоморфный образ $\supset$-алгебры $I(\Psi)$. В свою очередь, последняя конъюнкция равносильна изоморфности $\supset$-алгебр $I(\Psi)$ и $I(\Phi)$. Теорема 3 доказана.

Двухэлементную булеву алгебру, задающую классическую пропозициональную логику и являющуюся также псевдобулевой алгеброй, обозначим через Λ. Для определенности и удобства изложения материала будем считать, что $\Lambda=\{0,1\}$, а 1 – выделенный элемент алгебры Λ. Прямое произведение алгебры Λ на себя n раз (т.е. n–ую степень) [1] будем обозначать через Λ^n. Известно [1], что Λ^n является булевой алгеброй. По определению Λ^0 - вырожденная булева алгебра.

Докажем лемму, описывающую структуру $\supset$-алгебры $I(\Lambda^n)$.

Лемма 2. *Если* $n\geq 1$, *то элемент* $(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$ *алгебры* Λ^n *неразложим в* Λ^n *тогда и только тогда, когда среди* $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ *имеется не более, чем один элемент, равный* 0.

Доказательство. Пусть $n\geq 1$. Зафиксируем элемент $(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$ алгебры Λ^n. Пусть $(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)\in I(\Lambda^n)$. Покажем, что среди $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ имеется не более, чем один элемент, равный 0. Предположим, что среди $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ имеются не менее двух элементов, равных 0. Пусть $\zeta_k=\zeta_l=0$ и $1\leq k<l\leq n$. Положим $\xi_k=1$, $\xi_i=\zeta_i$, $\eta_l=1$ и $\eta_j=\zeta_j$, где $i\in\{1,\ldots,n\}\backslash\{k\}$ и $j\in\{1,\ldots,n\}\backslash\{l\}$. Нетрудно проверить, что в алгебре Λ^n верно соотношение $(\xi_1,\ldots,\xi_n)\&(\eta_1,\ldots,\eta_n)=(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$. Так как $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$, $(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ и $(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$ – различные элементы алгебры Λ^n, то $(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$ – ее разложимый элемент. Получили противоречие. Следовательно, среди $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ имеется не более, чем один элемент, равный 0.

Пусть среди $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ имеется не более, чем один элемент, равный 0. Покажем, что $(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)\in I(\Lambda^n)$. Если $\zeta_1=\ldots=\zeta_n=1$, то имеем $(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)\in I(\Lambda^n)$. Пусть $\zeta_m=0$, $\zeta_s=1$, $1\leq m\leq n$ и $s\in\{1,\ldots,n\}\backslash\{m\}$. Пусть $(\rho_1,\ldots,\rho_n)\&(\tau_1,\ldots,\tau_n)=(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$. Тогда имеем $\rho_t\&\tau_t=\zeta_t$, где $1\leq t\leq n$. Если $t=m$, то $\zeta_t=0$ и поэтому имеем $\rho_t=0$ или $\tau_t=0$. Если $t\neq m$, то $\zeta_t=1$ и поэтому имеем $\rho_t=1$ и $\tau_t=1$.

Значит, $(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)=(\rho_1,\ldots,\rho_n)$ или $(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)=(\tau_1,\ldots,\tau_n)$. Следовательно, $(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)\in I(\Lambda^n)$. Лемма 2 доказана.

С помощью полученных результатов докажем следующий известный результат.

Теорема 4. *Для любой конечной булевой алгебры* Φ *существует такое натуральное число* n, *что булевы алгебры* Φ *и* Λ^n *изоморфны*.

Доказательство. Пусть задана конечная булева алгебра Φ. Если Φ - вырожденная булева алгебра, то Φ изоморфна вырожденной булевой алгебре Λ^0. Пусть Φ не является вырожденной булевой алгеброй. Тогда имеем $|I(\Phi)|>1$. Положим $n=|I(\Phi)\setminus\{\mathbf{1}\}|$. Следовательно, $n\geq 1$. Докажем, что булевы алгебры Φ и Λ^n изоморфны. Согласно теореме 3 для этого достаточно показать, что $\supset$-алгебры $I(\Psi)$ и $I(\Lambda^n)$ изоморфны.

Согласно лемме 2 $\supset$-алгебры $I(\Lambda^n)$ состоит из выделенного элемента $(1,\ldots,1)$ булевой алгебры Λ^n и таких элементов $(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$, что из $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ только один элемент равен 0. Поэтому имеем $|I(\Lambda^n)\setminus\{(1,\ldots,1)\}|=n$. Возьмем взаимно однозначное отображение множества $I(\Phi)\setminus\{\mathbf{1}\}$ на множество $I(\Lambda^n)\setminus\{(1,\ldots,1)\}$ и обозначим его через f. Положим $f(\mathbf{1})=(1,\ldots,1)$. Тогда f - взаимно однозначное отображение множества $I(\Phi)$ на множество $I(\Lambda^n)$. Пусть $\xi,\eta\in I(\Phi)$. Покажем, что f сохраняет операцию $\supset$, т.е. $f(\xi\supset\eta)=f(\xi)\supset f(\eta)$. Если $\xi=\mathbf{1}$, то имеем $f(\xi\supset\eta)=f(\eta)=$ $=(1,\ldots,1)\supset f(\eta)=f(\xi)\supset f(\eta)$. Если $\eta=\mathbf{1}$, то имеем $f(\xi\supset\eta)=f(\mathbf{1})=(1,\ldots,1)=$ $=f(\xi)\supset(1,\ldots,1)=f(\xi)\supset f(\eta)$. Пусть $\xi\neq\mathbf{1}$ и $\eta\neq\mathbf{1}$. Если $\xi=\eta$, то $f(\xi)=f(\eta)$ и поэтому имеем $f(\xi\supset\eta)=f(\mathbf{1})=(1,\ldots,1)=f(\xi)\supset f(\eta)$. Пусть $\xi\neq\eta$. Тогда имеем $f(\xi)\neq f(\eta)$. Согласно лемме 1 (пункт 1) верно соотношение $\xi\supset\eta\neq\mathbf{1}$. Тогда имеем $f(\xi)\supset f(\eta)\neq\mathbf{1}$. Поэтому в силу леммы 2 из [5] имеем $\xi\supset\eta=\eta$ и $f(\xi)\supset f(\eta)=f(\eta)$. Значит, $f(\xi\supset\eta)=f(\eta)=f(\xi)\supset f(\eta)$.

Таким образом, f взаимно однозначно отображает $\supset$-алгебру $I(\Phi)$ на $\supset$-алгебру $I(\Lambda^n)$ и сохраняет операцию $\supset$. Следовательно, $\supset$-алгебры $I(\Phi)$ и $I(\Lambda^n)$ изоморфны. Теорема 4 доказана.

§3. Топологические булевы алгебры

В этом параграфе докажем теорему, дающую критерий изоморфной вложимости для конечных топологических булевых алгебр.

Теорема 5. *Конечная топологическая булева алгебра* Ψ *вложима в конечную топологическую булеву алгебру* Φ *в том и только том случае, когда существует такое вложение* f $\supset$-

алгебры $I(\Psi)$ *в алгебру* Φ, *что* $\langle f(\Re(I(\Psi)))\rangle=\mathbf{0}$ *и для любого* ξ *из* $I(\Psi)$ *в* Φ *имеет место равенство* $f_{\&}(\Box\xi)=\Box f_{\&}(\xi)$.

Доказательство. Пусть заданы конечные топологические булевы алгебры Ψ и Φ. Пусть топологическая булева алгебра Ψ вложима в топологическую булеву алгебру Φ, т.е. существует подходящее вложение g. По лемме 2 из [5] и лемме 1 из [6] множество $I(\Psi)$ является $\supset$-подалгеброй алгебры Ψ. Следовательно, g – вложение $\supset$-алгебры $I(\Psi)$ в алгебру Φ. Согласно лемме 5 (пункт 1) из [5] в Ψ верно равенство $r(\mathbf{0}_{\Psi})=\Re(I(\Psi))$. Значит, $\langle\Re(I(\Psi))\rangle=\mathbf{0}_{\Psi}$. Поскольку $g(\mathbf{0}_{\Psi})=\mathbf{0}$ и g сохраняет операцию &, имеем $\langle g(\Re(I(\Psi)))\rangle=g(\langle\Re(I(\Psi))\rangle)=g(\mathbf{0}_{\Psi})=$ $=\mathbf{0}$.

Для вложения g $\supset$-алгебры $I(\Psi)$ в алгебру Φ построим отображение $g_{\&}$ множества Ψ в Φ. Покажем, что для любого τ из Ψ верно равенство $g_{\&}(\tau)=g(\tau)$. Пусть $\tau\in\Psi$. Алгебра Ψ конечна, а поэтому в ней осуществимо разложение $r(\tau)$. Поскольку $\tau=\langle r(\tau)\rangle$ и g сохраняет операцию &, имеем $g_{\&}(\tau)=\langle g(r(\tau))\rangle=g(\langle r(\tau)\rangle)=g(\tau)$.

С помощью этого утверждения получаем, что для любого ξ из $I(\Psi)$ верно в Φ соотношение $g_{\&}(\Box\xi)=g(\Box\xi)=\Box g(\xi)=\Box g_{\&}(\xi)$.

Пусть f - вложение $\supset$-алгебры $I(\Psi)$ в алгебру Φ, удовлетворяющее условиям $\langle f(\Re(I(\Psi)))\rangle=\mathbf{0}$ и $f_{\&}(\Box\xi)=\Box f_{\&}(\xi)$, где $\xi\in I(\Psi)$. Рассмотрим отображение $f_{\&}$ множества Ψ в Φ. Как и в теореме 1, получаем, что отображение $f_{\&}$ различным элементам сопоставляет различные элементы и сохраняет операции $\supset$, $\neg$, & и $\vee$.

Покажем, что $f_{\&}$ сохраняет операцию $\Box$. Пусть $\rho\in\Psi$. Алгебра Ψ конечна, а поэтому в ней осуществимо разложение $r(\rho)$. Так как $\rho=\langle r(\rho)\rangle$, $f_{\&}$ сохраняет операцию & и в Φ имеет место равенство $f_{\&}(\Box\xi)=\Box f_{\&}(\xi)$ для любого ξ из $I(\Psi)$, то $f_{\&}(\Box\rho)=f_{\&}(\Box\langle r(\rho)\rangle)=f_{\&}(\langle\{\Box\zeta|\zeta\in r(\rho)\}\rangle)=\langle\{f_{\&}(\Box\zeta)|\zeta\in r(\rho)\}\rangle=$
$=\langle\{\Box f_{\&}(\zeta)|\zeta\in r(\rho)\}\rangle=\Box\langle\{f_{\&}(\zeta)|\zeta\in r(\rho)\}\rangle=\Box f_{\&}(\langle r(\rho)\rangle)=\Box f_{\&}(\rho)$.

Таким образом, $f_{\&}$ является вложением топологической булевой алгебры Ψ в топологическую булеву алгебру Φ. Теорема 5 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Расева Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики. Москва: Наука, 1972.
2. *Сикорский Р.* Булевы алгебры. Москва: Мир, 1969.
3. *Фейс Р.* Модальная логика. Москва: Наука, 1974.
4. *Хомич В.И.* О вложении импликатур в импликативные полуструктуры // XVIII Всесоюзная алгебраическая конференция. Тезисы сообщений. Ч.2. Кишинев: Штиинца, 1985. С. 255.

5. *Хомич В.И.* Об отделимых суперинтуиционистских пропозициональных исчислениях и о конъюнктивно неразложимых элементах в импликативных полуструктурах // Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 1986. Bd. 32. S. 149-180.
6. *Хомич В.И.* О вложении импликатур // Вопросы математической логики. Москва: ВЦ АН СССР. 1988. С. 17-33.
7. *Хомич В.И.* О свойствах суперинтуиционистских пропозициональных исчислений // Сибирский математический журнал. 1990. Т. 31. № 6. С. 158-175.
8. *Хомич В.И.* О суперинтуиционистских пропозициональных логиках, связанных с частично упорядоченными множествами // Известия АН СССР. Серия математическая. 1991. Т. 55. № 2. С. 384-406.
9. *Хомич В.И.* О представлении конечных псевдобулевых алгебр и об одном его применении // Математические заметки. 1992. Т. 52. № 2. С. 127-137.
10. *Биркгоф Г.* Теория структур. Москва: Иностранная Литература, 1952.
11. *Карри Х.Б.* Основы математической логики. Москва: Мир, 1969.
12. *Кузнецов А.В.* Об операциях, похожих на импликацию // VII Всесоюзный алгебраический коллоквиум. Резюме сообщений. Кишинев: Штиинца, 1965. С. 60.
13. *Хомич В.И.* О вложимости некоторых обобщений псевдобулевых алгебр // Доклады РАН. 1996. Т. 350. № 2. С. 174-177.
14. *Хомич В.И.* Об изоморфной вложимости псевдобулевых алгебр и некоторых их обобщений // Математические вопросы кибернетики. 1999. № 8. С. 191-218.