Н.А. Алёшина[*], Д.П. Шкатов[**]

О МОДАЛЬНЫХ ЛОГИКАХ С ЭКЗИСТЕНЦИАЛЬНОЙ МОДАЛЬНОСТЬЮ

Abstract. *In this paper we present Hilbert-style axiomatization of polymodal logic* $\mathbf{K}^{\#}$ *with "existential" modality, that is modality that allows us to say that a formula is true in a world accessible by* some *accessibility relation, and prove its completeness. We also prove completeness for the extension of* $\mathbf{K}^{\#}$ *obtained by augmenting it the axiom of determinism.*

1. Цель работы

В настоящей работе мы представляем аксиоматизацию гильбертовского типа полимодальной логики $\mathbf{K}^{\#}$ с "экзистенциальной" модальностью – модальностью, позволяющей записывать утверждения вида "формула φ истинна в мире, достижимом по *какому-то* отношению достижимости" – и доказываем ее полноту. Мы также доказываем полноту расширения $\mathbf{K}^{\#}$, получаемого за счет добавления к $\mathbf{K}^{\#}$ "аксиомы детерминизма".

2. Постановка задачи

В настоящее время одним из наиболее популярных применений модальных логик является использование модальных языков для описания систем транзиций, представляющих собой непустое множество W и множество бинарных отношений на W. Важность таких систем обусловлена тем, что очень широкий круг феноменов, изучаемых в различных областях знания, может быть формально представлен в виде системы транзиций. В философии "возможные миры" и различного рода "достижимости" между ними (временная, эпистемическая, логическая) могут быть представлены как система транзиций. В теоретической компьютеристике состояния вычислительного устройства и переходы из одного состояния в другое, интернет-сайты и ссылки между ними представимы как системы транзиций. (Примеры из других областей знания можно найти в [2].) Особый интерес представляют детерминистические системы, то есть системы в которых из каж-

[*] Работа выполнена при поддержке EPSRC (Великобритания), грант № GR/-M98050/01.
[**] Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 04-03-00266а.

дого элемента W по каждому из отношений системы можно попасть в не более чем один элемент W.

При описании системы транзиций $T = (W, R_{i \in I})$ при помощи модальных языков соответствующий язык, помимо стандартных пропозициональных связок, оснащается "элементарной" модальностью $<i>$ для каждого бинарного отношения R_i, содержащегося в T. Формулы вида $<i>\ \varphi$, оцениваемые на элементах W, в дальнейшем называемых точками, понимаются так: $<i>\ \varphi$ истинна в точке w, если в некоторой точке v, такой, что wR_iv, истинна φ. Помимо этого модальный язык может содержать модальные операторы, например стандартные операторы PDL (пропозициональной динамической логики; детали см. в [2]). В системах транзиций с более чем одним бинарным отношением полезно иметь модальный оператор, позволяющий сказать, что формула φ истинна в точке, достижимой по *какому-то* отношению. Эта модальность, обозначенная $<\#>$, была введена в [1] для описания систем транзиций, моделирующих системы частично структурированной информации, такие, как World-Wide-Web. Очевидно, что в контексте философской логики $<\#>$ может использоваться в рассуждениях о фактах, которые возможны в каком-то, не уточненном, отношении.

В работе [1] оператор $<\#>$ изучался семантически в контексте языка, являющегося расширением языка PDL. В настоящей работе мы рассматриваем $<\#>$ синтаксически, в более простом контексте. Во-первых, мы представляем полную аксиоматизацию гильбертовского типа минимальной полимодальной логики, содержащей $<\#>$; эту логику мы называем $\mathbf{K}^{\#}$. Во-вторых, мы делаем то же самое для логики всех детерминистических систем транзиций; эту логику мы называем $\mathbf{K}^{\#}_{\mathbf{D}}$.

3. Логики $\mathbf{K}^{\#}$ и $\mathbf{K}^{\#}_{\mathbf{D}}$

Рассмотрим пропозициональный язык $L^{\#}$, содержащий (i) счетно-бесконечное множество пропозициональных параметров *Par*, произвольные члены которого мы будем обозначать при помощи $p, q, r, \ldots$, (ii) пропозициональные связки $\neg$ (отрицание) и $\vee$ (дизъюнкция), (iii) для каждого элемента i счетно-бесконечного множества I модальных индексов, унарную модальную связку $<i>$ и (iv) унарную модальную связку $<\#>$. Остальные связки, в том числе дуальные модальности $[i]$ и $[\#]$, определяются обычным образом. Формулы $L^{\#}$ определяются стандартно; они интерпретируются на $L^{\#}$-моделях.

Определение 1. $L^{\#}$-моделью *назовем структуру* $M = (W, \{R\}_{i \in I}, R_{\#}, V)$, *где (1)* W *– непустое множество, (2) каждое* R_i *– это* *бинарное отношение на W, (3) $R_{\#} = \bigcup_{i \in I} R_i$, и (4) V – это функция (оценки) из Par в 2^W. $L^{\#}$-модель $M = (W, \{R_i\}_{i \in I}, R_{\#}, V)$ является* детерминистической, *если для каждого $w \in W$ и каждого $i \in I$ существует не более одного $v \in W$, такого что wR_iv.*

Формулы $L^{\#}$ оцениваются в точках W стандартным образом (мы пишем $M, w \models \varphi$, если φ истинна в точке w модели M):

$M, w \models p$, е.т.е. (если и только если) $\varphi \in V(p)$;
$M, w \models \neg\varphi$, е.т.е. неверно, что $M, w \models \varphi$;
$M, w \models \varphi \vee \psi$, е.т.е. $M, w \mid\!- \varphi$ или $M, w \models \psi$;
$M, w \models \langle i \rangle \varphi$, е.т.е. для некоторого $v \in W$, wR_iv и $M, v \models \varphi$;
$M, w \models \langle\#\rangle \varphi$, е.т.е. для некоторого $v \in W$, $wR_{\#}v$ и $M, v \models \varphi$.

Легко заметить, что вводить оператор <#> имеет смысл только в языки, содержащие бесконечное число модальных индексов; в противном случае, $\langle\#\rangle \varphi$ определима через конечную дизъюнкцию формул вида $\langle i \rangle \varphi$.

Обозначим логику всех $L^{\#}$-моделей $\mathbf{K}^{\#}$ и логику всех детерминистических $L^{\#}$-моделей $\mathbf{K}^{\#}_{\mathbf{D}}$. Наша задача – формулировка полных аксиоматизаций $\mathbf{K}^{\#}$ и $\mathbf{K}^{\#}_{\mathbf{D}}$. Поскольку <#> аналогичен квантору существования первопорядковой логики, разумно предположить, что аксиоматизация $\mathbf{K}^{\#}$ должна выглядеть следующим образом (π обозначает произвольный $i \in I$ или #):

Схемы аксиом

(PL) Все пропозициональные классические тавтологии.
(K) $[\pi] (\varphi \to \psi) \to ([\pi] \varphi \to [\pi] \psi)$.
(ER) $\langle i \rangle \varphi \to \langle\#\rangle \varphi$.

Правила вывода

(MP) Из $\varphi \to \psi$ и φ выводима ψ.
(N) Из φ выводима $[\pi] \varphi$.
(EL) Из $\langle i \rangle \varphi \to \psi$ выводима $\langle\#\rangle \varphi \to \psi$ при условии, что i не входит в ψ.

Также разумно предположить, что аксиоматизация $\mathbf{K}^{\#}_{\mathbf{D}}$ может быть получена добавлением к вышеприведенному списку схем аксиом следующей схемы, иногда называемой "аксиомой детерминизма":

(D) $\langle i \rangle \varphi \to [i] \varphi$.

Нетрудно проверить следующий факт.

Теорема 2. *$\mathbf{K}^{\#}$ непротиворечива по отношению к классу всех $L^{\#}$-моделей. $\mathbf{K}^{\#}_{\mathbf{D}}$ непротиворечива по отношению к классу всех детерминистических $L^{\#}$-моделей.*

Также нетрудно заметить, что ни $\mathbf{K}^{\#}$ ни $\mathbf{K}^{\#}_{\mathbf{D}}$ не имеют строго полной аксиоматизации. Действительно, любое конечное подмножество множества $\{\langle\#\rangle\, \mathrm{p}, \neg\langle i\rangle\, p\colon i\in I\}$ выполнимо, в то время как оно само невыполнимо. Следовательно, обе $\mathbf{K}^{\#}$ и $\mathbf{K}^{\#}_{\mathbf{D}}$ некомпактны. Поскольку некомпактные логики не имеют строго полной аксиоматизации, ни $\mathbf{K}^{\#}$ ни $\mathbf{K}^{\#}_{\mathbf{D}}$ не имеют строго полной аксиоматизации.

В последующих разделах мы доказываем слабую полноту $\mathbf{K}^{\#}$ и $\mathbf{K}^{\#}_{\mathbf{D}}$, то есть показываем, что любая $\mathbf{K}^{\#}$–непротиворечивая и любая $\mathbf{K}^{\#}_{\mathbf{D}}$–непротиворечивая формула имеет модель.

4. Полнота $\mathbf{K}^{\#}$

Для доказательства полноты мы будем использовать технику доказательства полноты через построение конечных моделей (completeness-via-finite-models), подробно описанную в [2].

Определим псевдо-отрицание $\sim\varphi$ формулы φ следующим образом: если φ имеет вид $\neg\psi$, то $\sim\varphi$ – это ψ; в противном случае, $\sim\varphi$ – это $\neg\psi$. Замыканием множества формул Σ будем называть множество $\mathrm{CL}(\Sigma)$, содержащее все подформулы формул из Σ и их псевдо-отрицания. Легко видеть, что замыкание конечного множества конечно. Конечная каноническая модель для формулы φ строится из $\{\varphi\}$-*атомов*, максимально $\mathbf{K}^{\#}$–непротиворечивых подмножеств $\mathrm{CL}(\{\varphi\})$. (В общем, для произвольного множества формул Σ, Σ-атом – это максимально $\mathbf{K}^{\#}$–непротиворечивое подмножество $\mathrm{CL}(\Sigma)$.)

Лемма 3. *Пусть Σ – конечное множество $L^{\#}$-формул и Γ – непротиворечивое подмножество $CL(\Sigma)$. Тогда Γ может быть расширено до Σ-атома.*

Доказательство. Чтобы получить требуемый атом, надо представить формулы $\mathrm{CL}(\Sigma)$ в виде списка и добавить к Γ для каждой формулы из списка либо ее саму, либо ее псевдо-отрицание, так, чтобы множество формул, получаемое на каждом шаге, было непротиворечивым.

Нетрудно проверить, что каждый Σ–атом A обладает следующими свойствами:

(1) Для всякой $\psi\in \mathrm{CL}(\Sigma)$ в точности одна из ψ и $\sim\psi$ принадлежит A.

(2) Для всякой $\varphi\vee\psi\in \mathrm{CL}(\Sigma)$, $\varphi\vee\psi\in A$ е.т.е. $\varphi\in \mathrm{A}$ или $\psi\in A$.

Определение 4. *Пусть Σ – конечное множество $L^{\#}$-формул и пусть a – модальный индекс, не встречающийся в Σ. Конечная каноническая модель M^{Σ} для $\mathbf{K}^{\#}$ относительно Σ – это структура $(At(\Sigma), \{R^{\Sigma}{}_{i}\}_{i\,\in\, I}, R^{\Sigma}{}_{\#}, V^{\Sigma})$, где*

(i) $At(\Sigma)$ – множество всех Σ–атомов.

(ii) AR_iB *е.т.е. (1) i встречается в* Σ *или* $i = a$ *и (2)* $A^{\wedge} \wedge \langle i\rangle B^{\wedge}$ *непротиворечива (*$A^{\wedge}$ *обозначает конъюнкцию всех формул из A).*

(iii) $AR^{\Sigma}_{\#}B$ *е.т.е.* $A^{\wedge} \wedge \langle\#\rangle B^{\wedge}$ *непротиворечива.*

(iv) Для каждого $p \in Par$, $V^{\Sigma}(p) = \{A \in At(\Sigma) : p \in A\}$.

Стандартным образом (детали см. в [2]) может быть доказана следующая лемма.

Лемма о существовании. *Пусть* Σ *–конечное множество* $L^{\#}$*-формул, A –это* Σ*-атом и* π *– или модальный индекс, входящий в* Σ*, или #. Тогда, для каждой* $\langle\pi\rangle\ \varphi \in CL(\Sigma)$*, существует* Σ*-атом такой, что* $AR^{\Sigma}_{\pi}B$ *и* $\varphi \in B$.

Из леммы о существовании и вышеперечисленных свойств атомов непосредственно следует следующая лемма.

Истинностная лемма *Пусть* Σ *– конечное множество* $L^{\#}$*-формул,* M^{Σ} *– конечная каноническая модель относительно* Σ *и* $\varphi \in CL(\Sigma)$*. Тогда для каждого* $A \in At(\Sigma)$ *имеет место, что* $M^{\Sigma}, A \models \varphi$ *е.т.е.* $\varphi \in A$.

Остается только доказать, что конечные канонические модели являются $L^{\#}$-моделями.

Лемма 5. *Каждая конечная каноническая модель* $M^{\Sigma} = (At(\Sigma), \{R^{\Sigma}_i\}_{i \in I}, R^{\Sigma}_{\#}, V^{\Sigma})$ *для* $\mathbf{K}^{\#}$ *является* $L^{\#}$*-моделью.*

Доказательство. Все, что требуется доказать, это что $R^{\Sigma}_{\#} = \bigcup_{i \in I} R^{\Sigma}_i$. Сначала докажем включение справа налево. Предположим, с целью получения противоречия, что для некоторого $i \in I$ имеет место $A\ R^{\Sigma}_i\ B$, и что не имеет места $A\ R^{\Sigma}_{\#}\ B$. Тогда, согласно Определению 4, не имеет места $A^{\wedge} \wedge \langle i\rangle B^{\wedge} \vdash$ F, но имеет место $A^{\wedge} \wedge \langle\#\rangle B^{\wedge} \vdash$ F. Тогда $\langle\#\rangle B^{\wedge} \vdash \neg A^{\wedge}$ и следовательно, в силу **(ER)**, $\langle i\rangle B^{\wedge} \vdash \neg A^{\wedge}$, что невозможно, поскольку $A^{\wedge} \wedge \langle i\rangle B^{\wedge}$ непротиворечива.

Теперь докажем слева направо. Предположим, что $A\ R^{\Sigma}_{\#}\ B$. Если для некоторого $i \in I$ имеет место $A\ R^{\Sigma}_i\ B$, то доказательство закончено. В противном случае мы можем показать, что имеет место $A\ R^{\Sigma}_a\ B$. Действительно, в противном случае $A^{\wedge} \wedge \langle a\rangle B^{\wedge} \vdash$ F и, следовательно, $\langle a\rangle B^{\wedge} \vdash \neg A^{\wedge}$. Тогда, в силу **(EL)**, которое может быть применено, поскольку a не входит в Σ, $\langle\#\rangle B^{\wedge} \vdash \neg A^{\wedge}$, что невозможно, так как $A\ R^{\Sigma}_{\#}\ B$ и, следовательно, $A^{\wedge} \wedge \langle\#\rangle B^{\wedge}$ непротиворечива.

Теорема 6. $\boldsymbol{K}^{\#}$ *слабо полна относительно класса всех* $L^{\#}$*-моделей*.

Доказательство. Непосредственно следует из Леммы 3, Истинностной леммы и Леммы 5.

Замечание 7. Если бы при построении конечной канонической модели относительно Σ для $\mathbf{K}^{\#}$ мы не добавили к модальным индексам Σ "новый индекс" a, то мы не смогли бы доказать, что эта модель является $L^{\#}$-моделью. В качестве контрпримера рассмотрим $\Sigma = \{\langle\#\rangle\, p \wedge \neg \langle b\rangle\, p\}$. В канонической модели относительно такого Σ есть атом, а именно атом, содержащий $\langle\#\rangle\, p \wedge \neg \langle b\rangle\, p$, из которого по $R^{\Sigma}{}_{\#}$ достижим атом, не достижимый ни по какому $R^{\Sigma}{}_{i}$.

5. Полнота $\mathbf{K}^{\#}{}_{\mathbf{D}}$

Вышеприведенное доказательство не может быть легко переделано в доказательство полноты $\mathbf{K}^{\#}{}_{\mathbf{D}}$. Если мы просто заменим в определении конечных канонических моделей $\mathbf{K}^{\#}$-непротиворечивость $\mathbf{K}^{\#}{}_{\mathbf{D}}$–непротиворечивостью, то мы не сможем доказать, что полученные модели являются детерминистическими. Тем не менее, мы можем перестроить конечную каноническую модель для $\mathbf{K}^{\#}{}_{\mathbf{D}}$ в детерминистическую $L^{\#}$-модель.

Для доказательства полноты $\mathbf{K}^{\#}{}_{\mathbf{D}}$ нам придется несколько изменить определение замыкания. Если ψ является подформулой φ, то модальной глубиной вхождения ψ в φ мы называем число модальных связок φ, в области действия которых находится данное вхождение ψ; обозначим это число посредством $\mathbf{md}_{\varphi}(\psi)$. Детерминистическим замыканием множества $L^{\#}$-формул Σ будем называть множество DCL(Σ), содержащее (1) все подформулы формул из Σ, (2) их псевдо-отрицания и (3) для каждой $\varphi \in \Sigma$ и ψ такой, что $\mathbf{md}_{\varphi}(\psi) > 0$, если индекс i встречается в Σ, то $\langle i\rangle\, \psi \in$ DCL(Σ) и $\langle i\rangle \sim\psi \in$ DCL(Σ). Легко увидеть, что если Σ конечно, то DCL(Σ) тоже конечно. Σ-атомы теперь определяются как максимальные непротиворечивые подмножества DCL(Σ).

Определение 8. *Пусть Σ – конечное множество $L^{\#}$-формул. Конечная каноническая модель M^{Σ} для* $\mathbf{K}^{\#}{}_{\mathbf{D}}$ *относительно Σ – это структура $(At(\Sigma), \{R^{\Sigma}{}_{i}\}_{i \in I}, R^{\Sigma}{}_{\#}, V^{\Sigma})$, где*

(i) $At(\Sigma)$ – множество всех Σ–атомов.

(ii) $AR^{\Sigma}{}_{i}B$ е.т.е. $A^{\wedge} \wedge \langle i\rangle\, B^{\wedge}$ непротиворечива.

(iii) $AR^{\Sigma}{}_{\#}B$ е.т.е. $A^{\wedge} \wedge \langle\#\rangle\, B^{\wedge}$ непротиворечива.

(iv) Для каждого $p \in Par$, $V^{\Sigma}(p) = \{A \in At(\Sigma) : p \in A\}$.

Аналогично тому, как это было сделано в предыдущем разделе, могут быть доказаны следующие аналоги Истинностной леммы и Леммы 5.

Истинностная лемма для $\mathbf{K}^{\#}{}_{\mathbf{D}}$. *Пусть Σ – конечное множество $L^{\#}$-формул, M^{Σ} – конечная каноническая модель относительно Σ*

для $\mathbf{K}^{\#}_{\mathbf{D}}$ *и* $\varphi \in DCL(\Sigma)$. *Тогда для каждого* $A \in At(\Sigma)$, *имеет место, что* $M^{\Sigma}, A \vdash \varphi$ *е.т.е.* $\varphi \in A$.

Лемма 9. *Каждая конечная каноническая модель* $M^{\Sigma} = (At(\Sigma), \{R^{\Sigma}{}_{i}\}_{i \in I}, R^{\Sigma}{}_{\#}, V^{\Sigma})$ *для* $\mathbf{K}^{\#}_{\mathbf{D}}$ *является* $L^{\#}$*-моделью.*

Теперь нам нужно преобразовать M^{Σ} в детерминистическую модель. Мы сделаем это в два этапа: сначала избавимся от не-детерминизма в отношении модальных индексов, не встречающихся в Σ, и затем избавимся от не-детерминизма в отношении модальных индексов, встречающихся в Σ. Первый этап прост.

Лемма 10. Пусть $M^{\Sigma} = (At(\Sigma), \{R^{\Sigma}{}_{i}\}_{i \in I}, R^{\Sigma}{}_{\#}, V^{\Sigma})$ *– конечная каноническая модель для* $\mathbf{K}^{\#}_{\mathbf{D}}$ *относительно Σ. Тогда существует модель* $M'^{\Sigma} = (At(\Sigma), \{R'^{\Sigma}{}_{i}\}_{i \in I}, R^{\Sigma}{}_{\#}, V^{\Sigma})$ *такая, что (1) для каждого* i, *не имеющего вхождения в* Σ, *и всяких* $A, B, B' \in At(\Sigma)$, *если* $AR'^{\Sigma}{}_{i}B$ *и* $AR'^{\Sigma}{}_{i}B'$, *то* $B = B'$, *и (2) для всякой* $\varphi \in DCL(\Sigma)$ *и всякого* $X \in At(\Sigma)$ *имеет место* $M'^{\Sigma}, X \models \varphi$ *е.т.е.* $M^{\Sigma}, X \models \varphi$.

Доказательство. Заметим, что в силу Определения 8, если $AR^{\Sigma}{}_{\#}B$, то $AR^{\Sigma}{}_{i}B$ имеет место для каждого i, не входящего в Σ. Для каждой пары атомов оставим только одну "достижимость" по i, не входящему в Σ, если они не связаны никаким j, входящем в Σ, и ни одной "достижимости", если они связаны неким j, входящим в Σ.

Второй этап менее тривиален. Нам потребуется нестандартное определение развертывания модели для получения моделей, которые мы называем строго древовидными.

Определение 11. $L^{\#}$*-модель* $M = (W, \{R\}_{i \in I}, R_{\#}, V)$ *является строго древовидной, если структура* $(W, R_{\#})$ *является иррефлексивным деревом и для каждой* $(w, v) \in R_{\#}$ *существует строго один* $i \in I$, *такой, что* $(w, v) \in R_i$.

Лемма 12. *Пусть* $M = (W, \{R\}_{i \in I}, R_{\#}, V)$ *–* $L^{\#}$*-модель с корнем* w *(точкой, из которой может быть достигнута любая другая точка по* $R_{\#}$*). Тогда существует строго древовидная модель* $M^{T} = (W^{T}, \{R^{T}\}_{i \in I}, R^{T}{}_{\#}, V^{T})$, *такая, что для каждой* $L^{\#}$*-формулы* φ *имеет место* $M^{T}, w \models \varphi$ *е.т.е.* $M, w \models \varphi$.

Доказательство. Сначала построим модель $M' = (W', \{R'\}_{i \in I}, R'_{\#}, V')$ такую, что

(1) W' – это множество всевозможных последовательностей формы $(w, w_1^{i1}, ... w_n^{in})$, где $w_1, ... w_{n \geq 0} \in W$ и $i_1, \ldots, i_n \in I$,

(2) $(w, w_1^{i1}, ... w_n^{in}) R'_j (w, w_1^{i1}, ..., w_n^{in}, w_{n+1}^{in+1})$, если $w_n R_j w_{n+1}$ и $j = i_{n+1}$,

(3) $) R'_{\#} = \bigcup_{i \in I} R'_{i}$.,

(4) $V'(p) = \{(w, w_1^{i1}, ... w_n^{in}): w_n \in V(p)\}$, для каждого $p \in Par$.

Затем возьмем подмодель M', порожденную w. Это и есть требуемая M^T. Легко убедиться, что M^T является строго древовидной (последний член последовательности, выступающей в качестве второго аргумента каждого R'_i имеет в точности один верхний индекс). Сохранение истинности гарантируется тем, что отношение $Z \subseteq W \times W^T$, такое, что $v\ Z\ (w, w_1^{i1}, \ldots w_n^{in})$ е.т.е. $v = w_n$, является бисимуляцией.

Теперь докажем, что в древовидных моделях значение формулы φ в корне w модели не меняется, если мы заменим точку v, достижимую из w в k шагов, на точку v', согласующуюся с v на всех подформулах φ модальной глубины k. (В формулировке следующей леммы, $wR^k_{\#}\, v$ сокращает $wR_{\#}\, u_1\ \ldots\ u_{k-1}R_{\#}\, v$; в частности, $wR^0_{\#}\, v$ означает, что $w = v$.)

Лемма 13. *Пусть φ – это $L^{\#}$-формула, $M = (W, \{R\}_{i \in I}, R_{\#}, V)$ – древовидная $L^{\#}$-модель, $w \in W$ и $v \in W$ такая, что $wR^k_{\#}\, v$. Пусть M' получена из M заменой поддерева, порожденного v, поддеревом с корнем v', таким, что для каждой подформулы ψ формулы φ с* $\mathbf{md}_{\varphi}(\psi) = k$ *имеет место $M', v \models \psi$ е.т.е. $M, v \models \psi$. Тогда $M', w \models \varphi$ е.т.е. $M, w \models \varphi$.*

Доказательство. Индукцией по k.

Если $k = 0$, то $w = v$. Кроме того, v и v' согласуются на всех ψ с $\mathbf{md}_{\varphi}(\psi) = 0$. Поскольку $\mathbf{md}_{\varphi}(\varphi) = 0$, w и v' согласуются на φ.

Предположим, что утверждение леммы верно для $k = n$. Докажем, что тогда оно верно и для $k = n + 1$. Предположим обратное. Тогда, v и v' согласуются на всех ψ с $\mathbf{md}_{\varphi}(\psi) = n + 1$, $M, w \models \varphi$, но неверно, что $M', w \models \varphi$ (другой случай симметричен). Поскольку мы не меняли w, то φ должна содержать подформулу $\langle i \rangle \chi$ с $\mathbf{md}_{\varphi}(\langle i \rangle \chi) = 0$, такую, что для некоторой u, такой, что $w\ R_i\ u$ и u лежит на ветке, ведущей от w к v, $M, u \models \chi$, но не имеет места $M', u \models \chi$ (другой случай симметричен). Теперь $\mathbf{md}_{\varphi}(\chi) = \mathbf{md}_{\varphi}(\langle i \rangle \chi) + 1$ и каждая подформула χ является подформулой φ; следовательно, v и v' согласуются на всех подформулах χ модальной глубины n. Поскольку $uR^k_{\#}\, v$, применяя индуктивное предположение к дереву, порожденному u, получаем, что $M, u \models \chi$ е.т.е $M', u \models \chi$, что дает нам противоречие.

Лемма 14. *Пусть $M^{\varphi T}$ – строго древовидная модель, полученная из канонической модели относительно $\{\varphi\}$, M^{φ} развертыванием (процедурой, описанной в доказательстве Леммы 12) подмодели M^{φ}, порожденной атомом, содержащем φ. Тогда для любых B, $B' \in M^{\varphi T}$ таких, что, для некоторого C, $C\ R_i\ B$ и $C\ R_i\ B'$, и любой ψ с* $\mathbf{md}_{\varphi}(\psi) > 0$ *имеет место $M^{\varphi T}, B \models \psi$ е.т.е. $M^{\varphi T}, B' \models \psi$.*

Доказательство. Предположим обратное. Тогда $M^{\varphi T}, C \models \langle i\rangle\psi$ и $M^{\varphi T}, C' \models \langle i\rangle \sim\psi$. Тогда $\langle i\rangle\psi \in$ DCL($\{\varphi\}$) и $\langle i\rangle \sim\psi \in$ DCL($\{\varphi\}$) и, следовательно, в силу Истинностной леммы для $\mathbf{K}^{\#}_{\mathbf{D}}$ $\langle i\rangle\psi \in C$ и $\langle i\rangle \sim\psi \in$ C, что невозможно, поскольку, в силу аксиомы **(D)**, $\langle i\rangle \psi$, $\langle i\rangle \sim\psi \vdash$ F.

Теперь мы можем доказать полноту.

Теорема 15. $\boldsymbol{K}^{\#}_{\mathbf{D}}$ *слабо полна по отношению к классу всех детерминистических* $L^{\#}$*-моделей.*

Доказательство. Возьмем $\mathbf{K}^{\#}_{\mathbf{D}}$-непротиворечивую формулу φ. Сначала строим конечную каноническую модель M^{φ} по отношению к $\{\varphi\}$. В M^{φ} имеется атом A_{φ}, содержащий φ. Согласно Истинностной лемме для $\mathbf{K}^{\#}_{\mathbf{D}}$, имеет место $M^{\varphi}, A_{\varphi} \models \varphi$. Удалим из M^{φ} все "лишние" достижимости по таким R_i, что i не входит в φ, получая модель M'^{φ}, как описано в доказательстве Леммы 10; в силу этой леммы $M'^{\varphi}, A_{\varphi} \models \varphi$. Теперь развернем M'^{φ} в строго древовидную модель $M'^{\varphi T}$, используя построение из доказательства Леммы 12; согласно этой лемме, $M'^{\varphi T}, A_{\varphi} \models \varphi$. Далее, уровень за уровнем, для каждого атома C и индекса i на уровне n таких, что из C достижимы по R_i атомы $B_1, \dots B_n$, заменим все B_j на B_1. Обозначим полученную модель $M'^{\varphi T}{}'$. Согласно Лемме 13, $M'^{\varphi T}{}', A_{\varphi} \models \varphi$. Наконец, построим модель $M'^{\varphi T}{}''$, заменяя в $M'^{\varphi T}{}'$ идентичные копии B_1 одним-единственным B_1. Очевидно, что $M'^{\varphi T}{}'$ и $M'^{\varphi T}{}''$ бисимулярны; следовательно, $M'^{\varphi T}{}'', A_{\varphi} \models \varphi$. Очевидно, что $M'^{\varphi T}{}''$ является детерминистической $L^{\#}$-моделью.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Alechina N., de Rijke M., Demri S.* A modal perspective on path constrains // Journal of Logic and Computation. 2003.Vol. 13. P. 939-956.
2. *Blackburn P., de Rijke M., Venema Y.* Modal Logic. CUP, 2001.