Д.П.Шкатов

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ МАКИНСОНА ДЛЯ НОРМАЛЬНЫХ МОДАЛЬНЫХ ЛОГИК С ОПЕРАТОРОМ СЕГЕРБЕРГА*

Abstract. *We prove the analogue of Makinson's theorem ([Makinson, 1971]) for normal modal logics with the Segerberg operator, i. e. logics with two unary modalities: the usual "necessity" operator* $\Box$ *and the operator* $\Box^*$*, defined by the "Segerberg axioms",* $\Box^*\varphi\leftrightarrow\varphi\&\Box\Box^*\varphi$ *and* $\varphi\&\Box^*(\varphi\to\Box\varphi)\to\Box^*\varphi$. *(The Segerberg operator is widely known as one of the modalities of propositional dynamic logic.) As the corollary of the proven result we get a simple decidability procedure for effectively axiomatizable normal logics with the Segerberg operator.*

1. Цель работы

В настоящей работе доказывается аналог теоремы Макинсона ([Makinson, 1971]) для нормальных модальных логик с оператором Сегерберга, т. е. логик с двумя унарными модальностями – обычным оператором "необходимости" $\Box$ и оператором $\Box^*$, определяемым так называемыми "аксиомами Сегерберга": $\Box^*\varphi\leftrightarrow\varphi\&\Box\Box^*\varphi$ и $\varphi\&\Box^*(\varphi\to\Box\varphi)\to\Box^*\varphi$. (Оператор Сегерберга известен главным образом как одна из модальностей языка логики PDL.) Следствием доказанного результата является наличие простой разрешающей процедуры для эффективно конечноаксиоматизируемых нормальных логик с оператором Сегерберга.

2. Постановка задачи

Синтаксическая непротиворечивость – одно из важнейших метатеоретических свойств логических исчислений. Исчисление синтаксически непротиворечиво, если в нем нельзя доказать любую формулу языка исчисления. (Для расширений классического пропозиционального исчисления непротиворечивость равносильна невозможности доказать "противоречивую" формулу вида φ & $\sim\varphi$). Очевидно, что противоречивые исчисления не пред-

* Я глубоко благодарен Н.А. Алешиной и А.В. Чагрову за научную и эмоциональную поддержку, в которой я так нуждался. Кроме того, я очень признателен А.В. Чагрову за постановку вопроса, обсуждаемого в настоящей работе.

ставляют самостоятельного интереса, ибо цель исчисления – различение общезначимых и необщезначимых формул.

Для эффективно конечноаксиоматизируемых нормальных мономодальных логик – нормальных логик с единственной модальностью □, эффективно представимых в виде гильбертовского исчисления с конечным списком аксиом – существует элегантный алгоритм проверки на непротиворечивость, опирающийся на результат, доказанный Д. Макинсоном ([Makinson, 1971]).

Теорема Макинсона. *Пусть* Λ° *обозначает логику фрейма, содержащего одну рефлексивную точку;* $\Lambda^{\bullet}$ *– логику фрейма, содержащего одну иррефлексивную точку; и* Λ *– произвольную нормальную мономодальную логику.* Λ *непротиворечива, если и только если* $\Lambda \subseteq \Lambda^{\circ}$ *или* $\Lambda \subseteq \Lambda^{\bullet}$.

Из теоремы Макинсона следует, что для того, чтобы проверить произвольную эффективно конечноаксиоматизируемую нормальную логику Λ на непротиворечивость, достаточно проверить, общезначимы ли аксиомы Λ (1) на одной рефлексивной точке, и (2) на одной иррефлексивной точке. Если ответ один из тестов (1) и (2) дает положительный результат, то Λ непротиворечива; в обратном случае Λ противоречива.

К сожалению, для логик в произвольном бимодальном языке теорема Макинсона неверна. Отсюда возникает вопрос, поставленный А. В. Чагровым: можно ли доказать аналог теоремы Макинсона для языка, содержащего помимо □ модальный оператор, определяемый аксиомами Сегерберга?

3. Нормальные логики с оператором Сегерберга

Рассмотрим пропозициональный язык $SL(\Sigma)$, содержащий некоторое множество Σ, называемое *сигнатурой* языка $SL(\Sigma)$, пропозициональных параметров, произвольные элементы которого мы будем обозначать при помощи *p, q*, ….; пропозициональные константы $\perp$ (ложь) и T (истина); бинарную связку & (конъюнкция); и унарные связки ~ (отрицание), □ (бокс), и □* (оператор Сегерберга). Бинарные связки $\vee$ (дизъюнкция), $\rightarrow$(импликация), и $\leftrightarrow$ (эквиваленция) определяются стандартным образом; унарные связки ◊ и ◊* определяются как дуалы □ и □*, соответственно. Формулы $SL(\Sigma)$ определяются стандартно; запись $\varphi \in SL(\Sigma)$ означает, что φ – формула $SL(\Sigma)$. Мы будем опускать упоминание сигнатуры в случаях, когда ее выбор не влияет на ход изложения.

Под логикой в языке *SL* мы понимаем множество формул *SL*, содержащее все теоремы классического пропозиционального исчисления и замкнутое относительно modus ponens и подстановки. Логика Λ в языке *SL* называется нормальной, если она содержит подстановочные случаи следующих формул:

(K1) $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$

(K2) $\Box^*(\varphi \to \psi) \to (\Box^*\varphi \to \Box^*\psi)$

(Seg1) $\Box^*\varphi \leftrightarrow \varphi \& \Box\Box^*\varphi$

(Seg2) $\varphi \& \Box^*(\varphi \to \Box\varphi) \to \Box^*\varphi$

и обладает следующими свойствами замкнутости:

(G1) если $\varphi \in \Lambda$, то $\Box\varphi \in \Lambda$.

(G2) если $\varphi \in \Lambda$, то $\Box^*\varphi \in \Lambda$.

Формулы (Seg1) и (Seg2) мы называем "аксиомами Сегерберга". (K1) и (K2) – это обычные "аксиомы нормальности"; условия (G1) и (G2) – аналоги "правил Геделя". Минимальную нормальную логику в *SL* мы обозначаем **Seg** (в честь Сегерберга). Принадлежащие логике формулы мы будем называть ее теоремами. Примером теоремы **Seg**, а значит и любого ее расширения, является $\Diamond^*\varphi \leftrightarrow \varphi \vee \Diamond\Diamond^*\varphi$.

4. Фреймы и модели

Определение 1. Стандартным фреймом[1] *будем называть тройку вида (W, R, R*), где (1) W – непустое множество (точек или миров), (2) R – бинарное отношение на W, и (3) R* – рефлексивно-транзитивное замыкание R (то есть, xR*y, если и только если x = y или, для некоторого* $n \geq 0$, $xR\, z_1 R \ldots R\, z_n R\, y$).

Определение 2. Фреймом *будем называть тройку вида (W, R, R*), где (1) W – непустое множество, (2) R – бинарное отношение на W, (3) R* – рефлексивное и транзитивное отношение, содержащее R.*

Определение 3. Стандартной моделью *языка SL(Σ) будем называть пятерку вида* $M = (W, R, R^*, V, \models)$, *где (1) (W, R, R*) – стандартный фрейм, (2) V – функция (оценки) из Σ в* 2^W, *и (3)* $\models$ *– отношение истинности формул в точках модели, рекурсивно определяемое следующим образом:*

$M, w \models p$ *если* $w \in V(p)$, *для каждого* $p \in \Sigma$.

$M, w \models \bot$ *ни для какого w ;* $M, w \models \top$ *для всякого w.*

$M, w \models \sim\psi$ *если* $M, w \not\models \psi$.

$M, w \models \psi \,\&\, \psi'$ *если* $M, w \models \psi$ *и* $M, w \models \psi'$.

$M, w \models \Box\psi$ *если, для каждой v такой что* $w\mathbf{R}v$, $M, v \models \psi$.

$M, w \models \Box^*\psi$ *если, для каждой v такой что* $w\mathbf{R}^*v$, $M, v \models \psi$.

Определение 4. Моделью *языка SL(Σ) будем называть пятерку вида* $(W, R, R^*, V, \models)$ *такую что (1) (W, R, R*) – фрейм, (2) V –*

[1] В математической литературе фреймы обычно называются шкалами.

функция из Σ в 2^W, (3) |= – отношение истинности, определяемое так же, как в Определении 3, и (4) если $\varphi \in$ ***Seg***, *то $M, w \models \varphi$ для каждой $w \in W$.*

Нетрудно проверить, что всякая стандартная модель является моделью (обратное не верно; аналогично для фреймов); поэтому, когда мы говорим о моделях (фреймах), мы имеем в виду как стандартную, так и более общую (неквалифицированную) разновидности. Мы обычно будем опускать отношение истинности |= при упоминании модели, так как оно может быть однозначно восстановлено по означиванию V. Мы говорим, что модель (W, R, R*, V) *основана на* фрейме (W, R, R*).

Определение 5. *Формула φ* истинна в модели *M, если φ истинна в каждой точке M. Формула* φ истинна на фрейме *F, если φ истинна в каждой модели, основанной на F.*

Нетрудно убедиться в том, что множество всех формул *SL*, истинных на некотором стандартном фрейме, является нормальной логикой в *SL*. Поэтому для данного стандартного фрейма F мы можем говорить о "логике F", имея в виду логику, идентичную множеству формул, истинных на F.

Если M = (W, R, R*, V) и M' = (W', R', R'*, V') основаны на изоморфных фреймах и V(*p*) = V'(*p*) с точностью до изоморфизма для всякой *p*, входящей в некоторую формулу ψ, то мы говорим, что M и M' *согласуются на* всех параметрах ψ. Легко удостовериться в истинности следующего факта.

Факт 1. *Пусть M и M' – модели, основанные на изоморфных фреймах (обозначим соответствующий изоморфизм при помощи f) и согласующиеся на всех параметрах ψ. Тогда для всякого $w \in W$ мы имеем $M, w \models \psi$ е.т.е. $M', f(w) \models \psi$.*

В ходе последующего изложения нам понадобятся следующие модельные конструкции.

Определение 6. *Пусть $M = (W, R, R^*, V)$ – модель $SL(\Sigma)$ и $w \in W$.* Подмодель *M*, порожденной точкой *w*, *называется модель $M_w = (W', R', R^{*\prime}, V')$, где (1) W' – наименьшее подмножество W такое, что (a) $w \in W'$ и (b) если $v \in W'$ и vRu, то $u \in W'$; (2) $R' = W' \cap R$; (3) $R^{*\prime} = W' \cap R^*$; (4) $V'(p) = W' \cap V(p)$ для каждого $p \in \Sigma$.*

Определение 7. *Пусть $M = (W, R, R^*, V)$ и $M' = (W', R', R^{*\prime}, V')$ – модели $SL(\Sigma)$. Функция f из W в W' называется p-*морфизмом, *если (1) для всякого $p \in \Sigma$, $w \in V(p)$ е.т.е. $f(w) \in V'(p)$; (2a) если wRv, то $f(w)R'f(v)$; (2b) если $f(w)R'v'$, то найдется такая $v \in W$, что wRv и $f(v) = v'$; (3a) если wR^*v, то $f(w)R^{*\prime}f(v)$; (3b) если $f(w)R^{*\prime}v'$, то най-*

дется такая $v \in W$, что wR^*v и $f(v) = v'$. Если f сюръективна, то M' называется p-морфным образом *M*.

Следующие хорошо известные факты легко доказываются индукцией по построению формулы.

Лемма 1. *Пусть $M_w = (W', R', R^{*\prime}, V')$ – подмодель $SL(\Sigma)$-модели $M = (W, R, R^*, V)$, порожденная w. Тогда для всяких $v \in W'$ и $\varphi \in SL(\Sigma)$ $M_w, v \models \varphi$ е.т.е $M, v \models \varphi$.*

Лемма 2. *Пусть f – p-морфизм между $SL(\Sigma)$-моделями M и M'. Тогда для всякой $\varphi \in SL(\Sigma)$, $M, w \models \varphi$ е.т.е $M', f(w) \models \varphi$.*

5. (Нестандартные) канонические модели

Пусть Λ – непротиворечивое расширение **Seg**. Тогда для Λ можно построить каноническую модель из максимальных Λ-непротиворечивых множеств формул. Каноническая модель $\mathbf{M} = (\mathbf{W}, \mathbf{R}, \mathbf{R}^*, \mathbf{V})$ для Λ строится следующим образом: (1) $\mathbf{W}$ – множество всех максимальных Λ-непротиворечивых множеств; (2) $w\mathbf{R}v$, если для всякой $\Box\varphi \in w$ имеет место $\varphi \in v$ (или для всякой $\varphi \in v$ имеет место $\Diamond\varphi \in w$); (3) $w\mathrm{R}^*v$, если для всякой $\Box^*\varphi \in w$ имеет место $\varphi \in v$ (или для всякой $\varphi \in v$ имеет место $\Diamond^*\varphi \in w$); (4) $w \in \mathrm{V}(p)$, если $p \in w$.

Стандартным образом может быть доказано следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть Λ – непротиворечивое расширение **Seg** и **M** – каноническая модель для Λ. Тогда $\varphi \in \Lambda$ е.т.е φ истинна в каждой точке **M**.*

Ключевым шагом в доказательстве Леммы 3 является следующий факт.

Лемма 4. *Пусть Λ – непротиворечивое расширение **Seg** и Δ – максимальное Λ-непротиворечивое множество, содержащее формулу $\Diamond\varphi$. Тогда существует максимальное Λ-непротиворечивое множество Δ' такое, что $\Delta\ \mathbf{R}\ \Delta'$ и $\varphi \in \Delta'$. Аналогичное утверждение истинно для $\Diamond^*$ и $\mathbf{R}^*$.*

Обратим внимание на то, что канонические модели для расширений **Seg** нестандартны. В этом несложно убедиться в случае языков с непустой сигнатурой: множество $\{\Diamond^*p, \sim p, \sim\Diamond^n p, n \geq 0\}$ ($\Diamond^n$ сокращает n знаков $\Diamond$) **Seg**-непротиворечиво, а значит содержится в некотором максимальном **Seg**-непротиворечивом множестве; тогда в канонической модели для **Seg** имеются отличные миры w и w' такие, что $w\mathbf{R}^*w'$, но ни для какого n не имеет места $w\mathbf{R}^n w'$ ($w\mathbf{R}^n w'$ сокращает $w\mathbf{R}^n v_1 \ldots v_{n-1}\mathbf{R}^n w'$). Для языков с пустой сигнатурой аналогичный эффект следует из непротиворечивости множества

$\{\Diamond^*\sim\Diamond T,\ \Diamond T,\ \sim\Diamond^n\sim\Diamond T\}$. Именно нестандартность канонических моделей для расширений **Seg** делает доказательство аналога теоремы Макинсона для них нетривиальным.

6. Аналог теоремы Макинсона

Обозначим (стандартный) фрейм ({w}, R = {(w, w)}, R* = {(w, w)}) символом $\Im^{r}$ и (стандартный) фрейм ({w}, R = $\varnothing$, R* = {(w, w)}) символом $\Im^{ir}$. Обозначим логику фрейма $\Im^{r}$ символом Λ^{r} и логику фрейма $\Im^{ir}$ символом Λ^{ir}.

Теорема 1. *Пусть Λ – произвольное расширение Seg. Λ непротиворечива, если и только если* $\Lambda \subseteq \Lambda^{ir}$ *или* $\Lambda \subseteq \Lambda^{r}$.

Доказательство. Сначала обоснуем утверждение теоремы “слева на право”. Поскольку Λ непротиворечива, можно построить ее каноническую модель **M** = (**W**, **R**, **R***, **V**) в языке с пустой сигнатурой (но содержащем константы $\perp$ и T). Очевидно, что либо (1) имеется такая $w \in \mathbf{W}$, что ни для какой $v \in \mathbf{W}$ не имеет места w **R** v, либо (2) для всякой $w \in \mathbf{W}$ имеется такая $v \in \mathbf{W}$, что w **R** v. Мы покажем, что в первом случае $\Lambda \subseteq \Lambda^{ir}$, в то время как во втором случае $\Lambda \subseteq \Lambda^{r}$.

(1) Предположим, что для некоторой $w \in \mathbf{W}$ не имеется такой $v \in \mathbf{W}$, что w **R**v. Рассмотрим подмодель $\mathbf{M}_w$ модели **M**, порожденную точкой w. Сначала покажем, что $\mathbf{M}_w$ содержит только одну точку, w. Во-первых, согласно предположению (1), нет такой $v \in \mathbf{W}$, что w **R** v. Во-вторых, ни для какой $v \neq w$ не имеет места w **R*** v. Действительно, в обратном случае, поскольку w и v – различные максимально Λ-непротиворечивые множества, имеется формула φ такая, что $\sim\varphi \in w$ и $\varphi \in v$. Но тогда, по определению **R***, $\Diamond^*\varphi \in w$ и, поскольку в силу Леммы 3, $\Diamond^*\varphi \leftrightarrow \varphi \vee \Diamond\ \Diamond^*\varphi \in w$, мы получаем, что $\Diamond\ \Diamond^*\varphi \in w$. Тогда, в силу Леммы 4, для некоторого $v \in \mathbf{W}$ имеет место $w\mathbf{R}v$; это противоречит предположению (1); следовательно, допущение о наличии такого $v \neq w$, что w **R***v, приводит нас к противоречию. Таким образом, мы обосновали, что $\mathbf{M}_w$ содержит только w.

Теперь, с целью получения противоречия, допустим, что Λ не включена в Λ^{r} и, таким образом, существует такая модель M = ({v}, R = $\varnothing$, R* = {v, v}, V), что для некоторой $\psi \in \Lambda$, мы имеем M, $v \not\models \psi$ (заметим, что ψ может быть формулой языка с произвольной сигнатурой). На основе означивания V модели M построим подстановочный случай ψ' формулы ψ; а именно для каждого параметра p, входящего в ψ, сделаем следующую подстановку: если $v \in V(p)$, то заменим p на T; если $v \notin V(p)$, то заменим p на $\perp$. Легко увидеть, что M, $v \models \psi$ е.т.е. M, $v \models \psi'$; следовательно, M, $v \not\models \psi'$. Теперь, так как ψ' – это подстановочный случай ψ, мы имеем $\psi' \in \Lambda$. Следовательно, в силу Леммы 3, $\mathbf{M}, w \models \psi'$, и в силу Леммы 1, $\mathbf{M}_w, w \models \psi'$. Поскольку M и $\mathbf{M}_w$ основаны на изоморфных фреймах и тривиально согласуются на всех параметрах формулы ψ, в силу Факта 1, $\mathbf{M}_w, w \models \psi'$ е.т.е. M, $v \models \psi'$. Мы вынуждены заключить, что M, $v \models \psi'$. Мы получили противоречие и, таким образом, обосновали, что $\Lambda \subseteq \Lambda^{ir}$.

(2) Предположим, что для всякой $w \in \mathbf{W}$ имеется такая $v \in \mathbf{W}$, что $w\mathbf{R}v$. Тогда, поскольку $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}^*$, для всякой $w \in \mathbf{W}$ имеется такая $v \in \mathbf{W}$, что $w\mathbf{R}^*v$. Рассмотрим модель M = ($\{u\}$, R, R*, V), где R = R* = $\{(u, u)\}$ и V(p) = $\varnothing$ для каждого p. Легко увидеть, что M – это p-морфный образ **M**; следовательно, в силу Лемм 2 и 3, каждая теорема Λ истинна в точке u модели M. При помощи аргумента, подобного использованному в случае (1), мы можем показать, что ни одна теорема Λ не может быть провалена в модели, основанной на фрейме, изоморфном фрейму, на котором основана M. Отсюда следует, что $\Lambda \subseteq \Lambda^{r}$.

Утверждение теоремы "справа налево" следует из того, что обе логики Λ^{ir} и Λ^{r} непротиворечивы. Их непротиворечивость следует из того, что (a) обе логики являются логиками одной точки и (b) ни одна формула не может быть истинной в точке вместе со своим отрицанием. **Q.E.D.**

Следствие 1. *Пусть Λ – эффективно конечноаксиоматизируемое, непротиворечивое расширение* ***Seg***. *Проблема непротиворечивости Λ разрешима*.

ЛИТЕРАТУРА

[Makinson, 1971] *Makinson*, D. Some embedding theorems for modal logic. // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1971.Vol. 12. P. 252-254.